Лекция 10

Текстовые задачи

ЕГЭ-2014 В-14

I. Задачи на движение

1. Движение по прямой дороге
2. Движение по замкнутой дороге
3. Движение по реке
4. Движение протяженных тел
5. Средняя скорость

Если нет специальных оговорок, то движение считается равномерным, при этом пройденный путь определяется по формуле: $\boldsymbol{S = v \cdot t}$, где S – расстояние, пройденное телом; v – скорость движения тела; t – время движения тела.
Отсюда $t = S : v$ и $v = S : t$

Важно! Указанные величины должны быть в одной системе единиц.

$$1 \text{ м/с} = \frac{18}{5} \text{ км/ч};$$

$$10 \text{ м/с} = 10 \cdot \frac{18}{5} \text{ км/ч} = 36 \text{ км/ч}$$

$$1 \text{ км/ч} = \frac{1000 \text{ м}}{60 \text{ мин}} = \frac{50}{3} \text{ м/мин};$$

$$30 \text{ км/ч} = 30 \cdot \frac{50}{3} \text{ м/мин} = 500 \text{ м/мин};$$

$$1 \text{ м/мин} = \frac{3}{50} \text{ км/ч};$$

$$100 \text{ м/мин} = 100 \cdot \frac{3}{50} \text{ км/ч} = 6 \text{ км/ч}.$$

$$1 \text{ км/ч} = \frac{1000 \text{ м}}{3600 \text{ с}} = \frac{5}{18} \text{ м/с};$$

$$90 \text{ км/ч} = 90 \cdot \frac{5}{18} \text{ м/с} = 25 \text{ м/с};$$

Движение по прямой дороге

Пример 1. Поезд, пройдя 450 км, был остановлен из-за снежного заноса. Через полчаса путь был расчищен, и машинист, увеличив скорость поезда на 15 км/ч, привел его на станцию без опоздания.

Найдите первоначальную скорость поезда, если путь, пройденный им до остановки, составил 75% всего пути.

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
По расписанию	150	x	$\frac{150}{x}$
Фактически	150	$x+15$	$\frac{150}{x+15}$

Так как после остановки поезд затратил на $\frac{1}{2}$ часа меньше, чем по расписанию, то составим уравнение $\frac{150}{x} - \frac{150}{x+15} = \frac{1}{2}$.

Это уравнение уже решено выше и имеет один положительный корень 60.

Ответ: 60 км/ч.

Движение по замкнутой дороге

- Если длина замкнутой дороги равна S, а скорости объектов υ_1 и υ_2, то:

а) при движении объектов в разных направлениях время между их встречами вычисляется по формуле $t = \dfrac{S}{\upsilon_1 + \upsilon_2}$;

б) при движении объектов в одном направлении время между их встречами вычисляется по формуле $t = \dfrac{S}{\upsilon_1 - \upsilon_2}$ $(\upsilon_1 > \upsilon_2)$.

Пример 2. На соревнованиях по кольцевой трассе один лыжник проходит круг на 2 мин быстрее другого и через час обошел его ровно на круг. За какое время каждый лыжник проходит круг?

Решение. Пусть x мин и y мин – время, за которое проходит круг первый и второй лыжники соответственно. Из первого условия получаем уравнение $y – x = 2$.

Из второго условия получим $\frac{60}{x} - \frac{60}{y} = 1$.

Решим систему уравнений $\begin{cases} y - x = 2 \\ \frac{60}{x} - \frac{60}{y} = 1 \end{cases}$, сделаем подстановку $y = x + 2$, получим $x^2 + 2x – 120 = 0$,

$x = 10$, значит $y = 12$

Ответ: 10мин, 12мин.

Движение по реке

- Если объект движется по течению реки, то его скорость равна $v_{\text{по теч.}} = v_{\text{соб.}} + v_{\text{теч.}}$
- Если объект движется против течения реки, то его скорость равна $v_{\text{против теч.}} = v_{\text{соб.}} - v_{\text{теч.}}$
- Собственная скорость объекта (скорость в неподвижной воде) равна $v_{\text{соб.}} = (v_{\text{по теч.}} + v_{\text{пр. теч.}}):2$
- Скорость течения реки равна $v_{\text{теч.}} = (v_{\text{по теч.}} - v_{\text{пр. теч.}}) : 2$
- Скорость движения плота равна скорости течения реки.

Пример 3. Катер спустился вниз по течению реки на 50 км, а затем прошел в обратном направлении 36 км, что заняло у него на 30 минут больше времени, чем по течению. Какова собственная скорость катера, если скорость течения реки 4км/ч?

- *Решение* Пусть собственная скорость катера равна x км/ч, тогда его скорость по течению реки равна (x + 4) км/ч, а против течения реки (x - 4) км/ч.

	S (км)	V (км/ч)	t (ч)
По течению	50	x + 4	
Против течения	36	x – 4	

По условию $t_{пр.теч} > t_{по\ теч.}$ на 0,5 ч. Получим уравнение, $\frac{36}{x-4} - \frac{50}{x+4} = \frac{1}{2}$.

Итак, собственная скорость катера равна 16 км/ч.

Ответ: 16 км/ч.

Пример 4. Моторная лодка прошла по течению реки 36 км, а против течения 48км, затратив на весь путь столько времени, сколько надо на прохождение 90 км по озеру. Найдите собственную скорость лодки, если скорость лодки равна 3 км/ч.

Решение. Пусть собственная скорость лодки составляет *x* км/ч. Составим таблицу.

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
Против течения	48	$x-3$	$\frac{48}{x-3}$
По течению	36	$x+3$	$\frac{36}{x+3}$
По озеру	90	x	$\frac{90}{x}$

Согласно условию задачи составим уравнение

$$\frac{36}{x+3}+\frac{48}{x-3}=\frac{90}{x}.$$

$$\frac{6}{x+3}+\frac{8}{x-3}=\frac{15}{x}.$$

Значит, собственная скорость моторной лодки равна 15 км/ч.

Ответ: 15 км/ч.

Движение протяженных тел

- **Пример 5.** По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют пассажирский и товарный поезда, скорости которых равны соответственно 70 км/ч и 50 км/ч. Длина товарного поезда равна 500 метрам. Найдите длину пассажирского поезда, если время, за которое он прошел мимо товарного поезда, равно 2 минутам 33 секундам. Ответ дайте в метрах.

Решение. Чтобы проехать мимо товарного поезда полностью, пассажирскому поезду необходимо проехать путь, равный сумме длины товарного поезда 500 м и своей длины l м. Скорость, с которой пассажирский поезд обгоняет товарный, равна

70 - 50 = 20 (км/ч), 20 км/ч =1000/3 м/мин, а 2мин 33 сек = 51/20 мин.

Тогда, составим уравнение $x + 500 = \frac{1000}{3} \cdot \frac{51}{20}$, длина поезда $x = 350$ м.

Ответ: 350 м.

Средняя скорость

- Чтобы найти **<u>среднюю скорость</u>** движения объекта, необходимо **<u>все</u>** пройденное расстояние разделить на **<u>общее</u>** время движения.
  - **Пример 6.** Первую треть трассы автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, вторую треть – со скоростью 90 км/ч, а последнюю – со скоростью 45 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.
  - *Решение*. Пусть автомобиль проехал *S* км со скоростью 60 км/ч, *S* км со скоростью 90 км/ч и *S* км со скоростью 45км/ч. Всего автомобиль проехал 3*S* км и затратил на это $\frac{S}{60}+\frac{S}{90}+\frac{S}{45}=\frac{9S}{180}=\frac{S}{20}$ ч.

Средняя скорость автомобиля на протяжении всего пути $v_{\text{ср}}=3S:\frac{S}{20}=60$ (км/ч).

Ответ: 60.

II. Задачи на работу

- Задачи на работу аналогичны задачам на движение.

Вся <u>работа</u> играет роль <u>расстояния</u>, а <u>производительности</u> объектов, совершающих работу, аналогичны <u>скоростям</u> движения.

- В задачах на работу обычно используют три величины:

время t , в течение которого производится работа; производительность N – работа, произведенная в единицу времени; объем работы A , произведенный за время t .

- Указанные величины связаны формулой: $A \cdot N = t$.
- Отсюда N= $\frac{A}{t}$ и $t = \frac{A}{N}$. Все величины (объем работы, производительность, время) считаются положительными.

- К задачам на работу относят также задачи на заполнение резервуаров. В качестве произведенной работы рассматривают объем перекаченной жидкости.
- Время и объем работы (при постоянной производительности) – прямо пропорциональные величины:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{A_1}{A_2}$$

- Производительность и объем работы (при постоянном времени) – прямо пропорциональные величины: $\frac{N_1}{N_2} = \frac{A_1}{A_2}$
- Производительность и время (при постоянном объеме работы) – обратно пропорциональные величины: $\frac{N_1}{N_2} = \frac{t_2}{t_1}$

Явный объем работы

- **Пример 1.** Одна тракторная бригада должна была вспахать 240 га, а другая на 35% больше, чем первая. Вспахивая ежедневно на 3 га меньше второй бригады, первая всё же закончила работу на 2 дня раньше, чем вторая. Сколько гектаров вспахивала каждая бригада ежедневно?
- *Решение*. Так как 35% = 0,35 , то вторая бригада должна вспахать на $0{,}35 \cdot 240 = 84$ (га) больше, чем первая, то есть вспахать всего $240 + 84 = 324$ (га). Пусть первая бригада вспахивает x гектаров ежедневно.

Составим таблицу

	Объем работы (га)	Производительность (га/день)	Время (дни)
Первая бригада	240	x	$\frac{240}{x}$
Вторая бригада	324	$x+3$	$\frac{324}{x+3}$

Вторая бригада на выполнение работы тратит на 2 дня больше, чем первая бригада.

Составим уравнение: $\frac{324}{x+3} - \frac{240}{x} = 2$

- $x^2 - 39x + 360 = 0$.
- $x_1 = 24$ и $x_2 = 15$.
- Если первая бригада ежедневно вспахивала 24 га, то вторая бригада

24+3=27 (га);

Если первая бригада ежедневно вспахивала 15 га, то вторая бригада

15 + 3 = 18 (га).

- Ответ: 24 га; 27 га или 15 га; 18 га.

Неявный объем работы

- Рассмотрим задачи, в которых объем работы не указывается и не является искомым. Объем всей работы, который должен быть выполнен, принимается за единицу.
- **Пример 8.** Аквариум наполняется водой через две трубки за 3 часа. За сколько часов может наполниться аквариум через первую трубку, если для этого потребуется на 2,5 ч меньше, чем для наполнения аквариума через вторую трубку?

Решение. Примем объем аквариума за1. Пусть аквариум наполняется через одну первую трубку за *x* часов.
Составим таблицу и найдем производительности (пропускную способность) трубок.

	Объем аквариума	Производительность (1/час)	Время (час)
Первая трубка	1	$\frac{1}{x}$	x
Вторая трубка	1	$\frac{1}{x+2,5}$	$x+2,5$

Составим уравнение $\frac{3}{x}+\frac{3}{x+2,5}=1$

- Последнее уравнение имеет один положительный корень $x = 5$.

Значит, аквариум наполняется через одну первую трубку за 5 часов.

Ответ: 5 часов.

Пример 9. Оператор ЭВМ, работая вместе с учеником, обрабатывает задачу за 2 ч. 24 мин. Если оператор проработает 2 ч, а ученик 1 ч, то будет выполнено $\frac{2}{3}$ всей работы. Сколько времени потребуется оператору и ученику в отдельности на обработку задачи?

Решение. Обозначим производительность (часть работы, выполненная за 1час) оператора и ученика соответственно через x и y . Весь объем работы примем за единицу, тогда оператору и ученику в отдельности на обработку задачи потребуется соответственно $\frac{1}{x}$ часов и $\frac{1}{y}$ часов.

Так как $2\,\text{ч.}\,24\,\text{мин.} = 2\frac{24}{60}\,\text{ч} = \frac{12}{5}\,\text{ч}$, то согласно условию задачи составим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{12}{5}\cdot x + \frac{12}{5}\cdot y = 1, \\ 2\cdot x + 1\cdot y = \frac{2}{3}\cdot 1. \end{cases} \quad \begin{cases} 12x + 12y = 5, \\ 6x + 3y = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x + 12y = 5, \\ 12x + 6y = 4. \end{cases} \quad \begin{cases} 6y = 1, \\ 12x + 6y = 4. \end{cases} \quad \begin{cases} y = \dfrac{1}{6}, \\ x = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Итак, время выполнения всего задания одним оператором равно $1 : \frac{1}{4} = 4$ (часа), а одним учеником – $1 : \frac{1}{6} = 6$ (часов).

Ответ: 4 ч; 6 ч.

III. Задачи на проценты

1. Части и проценты

2. Процентное сравнение величин

3. Сложные проценты

1. Части и проценты

- *Чтобы найти проценты от данного числа, надо:*
- *а) выразить проценты в виде дроби;*
- *б) умножить данное число на эту дробь.*

*(**a** составляет **p%** от **b**)=>* $a = \frac{p}{100} \cdot b$

Пример 10. Из данных четырех чисел первые три относятся между собой как $\frac{1}{5}:\frac{1}{3}:\frac{1}{20}$, а четвертое составляет 15% второго числа. Найдите эти числа, если известно, что второе число на 8 больше суммы остальных.

Решение. Так как

$$\frac{1}{5}:\frac{1}{3}:\frac{1}{20}=\left(60\cdot\frac{1}{5}\right):\left(60\cdot\frac{1}{3}\right):\left(60\cdot\frac{1}{20}\right)=$$
$$=12:20:3,$$

то первые три числа соответственно равны $12x$, $20x$ и $3x$, где x - коэффициент

Четвертое число равно

$0{,}15\cdot 20x = 3x$.

По условию задачи второе число на 8 больше суммы остальных, составим уравнение

$20x - (12x + 3x + 3x) = 8$.

Отсюда $x = 4$.

Тогда числа равны 48, 80, 12, 12.

Ответ: 48, 80, 12, 12.

2. Процентное сравнение величин

- При сравнении двух величин за 100% принимается та, с которой производится сравнение. В задачах на проценты сначала следует понять, какая величина принимается за 100%.
- **Пример 11.** Букинистический магазин продал книгу со скидкой 10% с назначенной цены и получил при этом 8% прибыли. Сколько процентов прибыли первоначально полагал получить магазин?

Решение. Пусть назначенная цена книги составляет x рублей, тогда книгу продали за $0{,}9x$ рублей, что составляет 108% от первоначальной цены книги в y рублей (100%).

- Из пропорции $\frac{0{,}9x}{y} = \frac{108}{100}$ найдем первоначальную цену книги

$y = \frac{5x}{6}$ рублей.

Из пропорции $\frac{5x}{6} : x = 100 : z$ находим, что назначенная

цена x рублей составляет z =120%.

Значит, магазин предполагал получить прибыль 120 -100 = 20(%) .

- *Ответ*: 20%.

3. Сложные проценты

При неоднократном процентном изменении величины удобно использовать формулу «сложных» процентов.

- *Формула «сложных» процентов для двукратного изменения выглядит так:*

$A_2 = A_0\,(1 \pm 0{,}01p_1)(1 \pm 0{,}01p_2)$, *где* A_0 *- первоначальное значение величины* A, A_2 *- новое значение величины* A *после ее двукратного процентного изменения,* p_1 и p_2 *– проценты изменения величины* A.

- Формула сложных процентов особенно удобна тем, что допускает простое и логичное обобщение в виде увеличения числа сомножителей аналогичного вида для любого нужного числа изменений.

Пример 12. Число 240 увеличили на 30%, а затем увеличили на 70%. Найти полученное число.

◦ *Решение*. Так как 30% = 0,3 и 70% = 0,7, то после первого увеличения имеем 240(1+ 0,3) = 312. После второго увеличения получаем 312(1+ 0,7) + 530, 4 .

Краткая запись: 240(1+ 0,3)(1+ 0,7) = 530, 4.

Ответ: 530,4.

Пример 13. Зарплата служащего составляла 2000 у.е. Затем зарплату повысили на 20%, а вскоре понизили на 20%. Сколько стал получать служащий?

◦ *Решение*. Так как 20% = 0, 2 , то имеем 2000(1+ 0,2)(1- 0, 2) =1920.

Ответ: 1920 у.е.

Пример 14. Зарплата служащего составляла 2000 у.е. Затем зарплату понизили на 20%, а вскоре повысили на 20%. Сколько стал получать служащий?

◦ *Решение*. Так как 20% = 0, 2 , то имеем 2000(1- 0,2)(1+ 0, 2) =1920.

Ответ: 1920 у.е.

Пример 15. За год стипендия студента увеличилась на 32%. В первом полугодии стипендия увеличилась на 10%. Определите, на сколько процентов увеличилась стипендия во втором полугодии?

◦ *Решение*. Обозначим через a часть, на которую увеличилась стипендия во втором полугодии, через x первоначальную стипендию. Так как 10% = 0,1 и 32% = 0,32, то получаем уравнение $x(1+ 0,1)(1+ a) = x(1+ 0,32)$ или $1,1(1+ a) =1,32$. Далее имеем $1+ a = 1, 2$; $a = 0, 2$. Значит, во втором полугодии стипендия увеличилась на 20%.

Ответ: 20%.

Пример 16. В течение года завод дважды увеличивал выпуск продукции на одно и то же число процентов. Найдите это число, если известно, что в начале года завод ежемесячно выпускал 600 изделий, а в конце года – 726 изделий.

- *Решение*. Обозначим через a часть, на которую увеличивался выпуск продукции каждый раз. Тогда имеем уравнение

$600(1+a)(1+a) = 726$. Далее получаем $(1+a)^2 = \frac{726}{600}$; $\quad (1+a)^2 = 1{,}21$;

$1+a = 1{,}1$; $\quad a = 0{,}1$.

Значит, завод дважды увеличивал выпуск продукции на 10%.

Ответ: 10%.

- **Пример 17.** Клиент А. сделал вклад в банке в размере 6200 рублей. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Ровно через год на тех же условиях такой же вклад в том же банке сделал клиент Б. Ещё ровно через год клиенты А. и Б. закрыли вклады и забрали все накопившиеся деньги. При этом клиент А. получил на 682 рубля больше клиента Б. Какой процент годовых начислял банк по этим вкладам?
- *Решение*. Обозначим через x – часть, на которую банк повышает сумму вклада.

Тогда через два года на счету клиента А. будет $6200(1+x)(1+x)$ рублей, а у клиента Б. через год – $6200(1+x)$ рублей.

Согласно условию задачи составим уравнение $6200(1+x)^2 = 6200(1+x) = 682$,

$100(1+x)^2 - 100(1+x) - 11 = 0$. Сделаем замену $100(1+x) = t$, тогда уравнение примет вид

$\frac{t^2}{100} - t - 11 = 0$ или $t^2 - 100t - 1100 = 0$. Находим корни $t_1 = 110$ и $t_2 = -10$ последнего уравнения. Для положительного корня рассмотрим уравнение $100(1+x) = 110$. Отсюда $x = 0{,}1$. Следовательно, банк начисляет 10% годовых по вкладам.

- *Ответ*: 10%.

◦**Пример 18.** Начальный капитал акционерного общества составляет 15 миллионов рублей.

Ежегодно капитал увеличивался на 25%. Найдите минимальное количество лет, после которых капитал акционерного общества превысит 45 миллионов рублей.

◦*Решение*. Так как 25% = 0,25, то имеем неравенство $15(1+0,25)^n > 45$, где через *n* обозначено искомое количество лет. Решаем неравенство $1,25^n > 3$. Так как $1,25^4 < 3$ и $1,25^5 > 3$,то $n = 5$.

Ответ: 5 лет.

IV. Задачи на концентрацию

Основной принцип решения задач на концентрацию заключается в определении массы «сухого вещества» в данной массе раствора.

Пример 19. К 120 г раствора, содержащего 80% соли, добавили 480 г раствора, содержащего 20% той же соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

- *Решение*. 1) $120 + 480 = 600$ (г) – масса нового раствора.
- 2) $0,8 \cdot 120 = 96$ (г) – масса безводной соли в первом растворе.
- 3) $0,2 \cdot 480 = 96$ (г) – масса безводной соли во втором растворе.
- 4) $96 + 96 = 192$ (г) – масса безводной соли в новом растворе.
- 5) $192 : 600 \cdot 100 = 32$ (%) – процентное содержание соли в новом растворе.
- *Ответ*: 32%.

Пример 20. Один раствор содержит 20% (по объему) соляной кислоты, а второй – 70% кислоты. Сколько литров первого и второго растворов нужно взять, чтобы получить 100 л 50% раствора кислоты?

- *Решение*. Пусть для получения нового раствора необходимо взять x литров первого раствора, а значит, и $(100 - x)$ литров второго раствора. Так как 20% = 0, 2 и 70% = 0,7 ,

то первый раствор содержит $0{,}2x$ л кислоты, а второй раствор $0{,}7(100 - x)$ л кислоты.

Новый раствор содержит $0{,}5 \cdot 100 = 50$ литров кислоты.

Используя объем безводной кислоты, составим уравнение

- $0{,}2x + 0{,}7(100 - x) = 50$.
- $2x + 7(100 - x) = 500$.
- $2x + 700 - 7x = 500$.
- $-5x = -200$.
- $x = 40$.
- Итак, необходимо взять 40 литров первого раствора и 100 - 40 = 60 (литров) второго раствора.
- *Ответ*: 40 л; 60 л.