ФЕНОМЕН МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЛОТКИ–ВОЛЬТЕРРЫ И СХОДНЫХ С НЕЙ

Шилова Н.А.

Математическая модель Лотки-Вольтерры

Общий вид модели
«хищник-жертва»

$$\begin{cases} \dfrac{dB_i}{dt} = B_i\left(f(B_0, \ldots, B_n) - \sum_{j=0}^{n} \beta_{ij} B_j \right) - \alpha_i RF(B_i), \quad i = \overline{0,n} \\ \dfrac{dR}{dt} = R\left(e_0 \alpha_0 F(B_0) + \ldots + e_n \alpha_n F(B_n) - \mu\right) \end{cases}$$

Используется для описания различных процессов

биологии,
экологии,
медицине,
в социальных исследованиях,
в истории, в радиофизике и других наук

<u>Изучаемые процессы:</u>

1. популяционное взаимодействие
2. Модели взаимодействия загрязнения с окружаю-щей средой;
3. модель классовой борьбы;
4. модель бесклассового общества эпохи охотников-собирателей;
5. модель военных действий;
6. вирусная модель инфекцион-ного заболевания;
7. модель распространения эпидемий включая модель заражения вирусом компьютеров;
8. модель взаимодействия когнитивных и/или эмоциональных мод мозга.

Основные гипотезы модели на основе экологических примеров

Модель Лотки–Вольтерры – есть математическое описание **дарвинского принципа борьбы за существование**. Она описывает взаимодействие двух видов – **популяции хищников и популяции жертв.**

N(t) – численность жертв

P(t) – численность хищников

$$\frac{dN}{dt} = aN - bNP$$
$$\frac{dP}{dt} = -dP + cNP$$

где a,b,d,c – положительные постоянные.

Основные гипотезы модели на основе экологических примеров

Система уравнений основана на следующих допущениях:

• при отсутствии хищников жертвы размножаются неограниченно согласно уравнению $dN/dt = aN$, которое называют иногда уравнением Мальтуса;

• хищники при отсутствии жертв вымирают согласно уравнению $dP/dt = -dP$;

• слагаемые, пропорциональные произведению NP, рассматриваются как превращение энергии одного источника в энергию другого (эффект влияния популяции хищников на популяцию жертв, то есть результат их встречи, состоит в уменьшении скорости прироста dN/dt численности жертв на величину NP, пропорциональную численности хищников).

Данная модель является **структурно-неустойчивой**

Система «хищник-жертва» с учетом внутривидовой конкуренции

N(t) – численность жертв

P(t) – численность хищников

$$\frac{dN}{dt} = aN\left(1 - \frac{N}{K_1}\right) - bNP$$

$$\frac{dP}{dt} = -dP\left(1 - \frac{P}{K_2}\right) + cNP$$

где $K_{1,2}$ – потенциальные емкости экологических систем, которые определяются доступным количеством ресурсов и соответствуют предельным значениям численности популяций.

Модель конкуренции и модель мутуализма (симбиоза)

Модель конкуренции

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1}\right) - eN_1N_2$$

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2}\right) - hN_1N_2$$

где $r_{1,}$ $r_{2,}$ e, h – положительные постоянные. Анализ системы уравнений показывает: если n популяций линейно зависят от m ресурсов, причем $m < n$, то по крайней мере одна из популяций вымирает

Модель мутуализма (симбиоза)

$$\frac{du_1}{dt} = u_1(r_1 + a_{11}u_1 + a_{12}u_2)$$

$$\frac{du_2}{dt} = u_2(r_2 + a_{21}u_1 + a_{22}u_2)$$

Для описания мутуализма достаточно потребовать, чтобы

$$a_{11} > 0 \text{ и } a_{12} > 0$$

Возможные дополни-тельные факторы внутри- и межпопуляционных отношений

- Нелинейная зависимость скорости размножения популяций жертв от плотности при малых значениях плотности (отсутствие достаточного количества брачных пар): $A(u) = \frac{au_2}{(N+u)}$, где a и N – положительные постоянные.
- Внутривидовая конкуренция жертв: $A(u) = au(1 - \frac{u}{K})$
- Насыщение хищников: $B_1(u) = \frac{bu}{(1+au)}$ – трофическая функция хищника.
- Нелинейный характер выедания хищниками жертв: $B_1(u) = \frac{bu_2}{(1+au)}$
- •Конкуренция хищников за жертв: $B_2(v) = \frac{bv}{(1+\beta u)}$. При этом *B(u, v)* =
- = *B1(u)B2(v)*.
- Конкуренция хищников за отличные от жертв ресурсы: $C(v) = \frac{v}{(1+\frac{v}{K_1})}$
- Нелинейный характер зависимости скорости размножения хищника от плотности популяции при малых значениях плотности: $C_2(v) = \frac{cv}{(Nv+v)}$, при этом $C(u,v) = C_1(u)C_2(v)$ и $C_1(u) = B_1(u). D_2(v) = cv$,

$$\text{т. е.}\, C(u,v) = \frac{cv}{(Nv+v)B_1(u)}$$

1. Математическая модель взаимодействия загрязнения с окружающей средой

Ситуация «загрязнение – природа» ≈ частный случай модели «хищник-жертва»

N(t) – численность жертв ≈ *природа*

P(t) – численность хищников ≈ *загрязнение*

Главное предположение

окружающая среда активно абсорбирует и перерабатывает загрязнение вплоть до определенного предела

Сценарии взаимодействия

1. При малых выбросах загрязнения окружающая среда его полностью перерабатывает (устойчивая ситуация).

2. При увеличении выбросов загрязнения в зависимости от внешних условий и случайных причин окружающая среда может находиться в удовлетворительном состоянии, а может и погибнуть (бистабильная ситуация)

3. Наконец, третья ситуация соответствует экологической катастрофе – полному вымиранию природы

1. Математическая модель взаимодействия загрязнения с окружающей средой

Построение модели:

P – концентрация загрязнения

E – плотность биомассы.

В случае постоянно действующего источника загрязнения, скорость его изменения можно описать следующим образом:

$$\frac{dP}{dt} = a - bP,$$

где a – мощность источника загрязнения в единицу времени, b-– коэффициент естественного уничтожения загрязнения.

При начальном условии $P(t = 0) = P_0$ решение уравнения имеет вид

$$P(t) = \frac{a}{b} + \left(P_0 - \frac{a}{b}\right) e^{-bt}$$

то есть со временем концентрация загрязнения уменьшается естественным образом

Гипотеза: загрязнение находится в постоянном взаимодействии с окружающей средой, которая оказывает очищающий эффект на загрязнение. Тогда

процесс взаимодействия с окружающей средой можно описать следующей системой уравнений:

где функция $f(E,P) \geq 0$ – описывает абсорбирование и переработку загрязнения окружающей средой; $g(E)$ – слагаемое, описывающее динамику окружающей среды в отсутствие загрязнения; $h(E,P)$ – функция, описывающая вредное влияние загряз- нения на окружающую среду

1. Простейшая модель взаимодействия загрязнения с окружающей средой

Примем в качестве функций взаимодействия загрязнения и живой природы $f(E,P) = cEP$ и $h(E,P) = dEP$, где c и d – постоянные коэффициенты.

Будем считать, что при отсутствии загрязнения поведение окружающей среды можно описать логистическим уравнением, то есть $g(\mathcal{E}) = r\mathcal{E}(1 - \mathcal{E}/K)$, где r – постоянный коэффициент, а K – соответствует максимальному значению $\mathcal{E}$ при $d\mathcal{E}/dt = 0$. Подставив выражения для $f(\mathcal{E},\mathcal{P})$, $h(\mathcal{E},\mathcal{P})$, и $g(\mathcal{E})$ в систему уравнений (9), получим

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} = a - b\mathcal{P} - c\mathcal{E}\mathcal{P}, \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = r\mathcal{E}\left(1 - \frac{\mathcal{E}}{K}\right) - d\mathcal{E}\mathcal{P}.$$

Переходя в системе уравнений (10) к безразмерным переменным

$$\mathcal{P} = \frac{bu}{d}, \quad \mathcal{E} = \frac{bv}{c}, \quad \tau = bt, \quad \alpha = \frac{ad}{b^2}, \quad u_0 = \frac{r}{b}, \quad p = \frac{r}{cK},$$

получаем простейшую математическую модель взаимодействия загрязнения с окружающей средой в виде следующих уравнений:

$$\frac{du}{dt} = \alpha - u - uv, \quad \frac{dv}{dt} = v(u_0 - u) - pv^2.$$

2. Математическая модель очистки сточных вод

Рассмотрим далее модель очистки сточных вод, основанную на следующих простых представлениях.

Будем рассматривать загрязнитель как «жертву», а биологически активный ил как «хищника». Процесс биохимического окисления загрязнителя будем трактовать как «поедание» его микроорганизмами активного ила.

Предположим, что имеется постоянный источник загрязнения, а активный ил способен перерабатывать загрязнение до определенного предела. Считаем, что изменение концентрации активного ила в чистой воде убывает по экспоненциальному закону.

Тогда динамику очистки сточных вод можно описать уравнениями

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} = a - bD(\mathcal{P}) - cf(\mathcal{P}, \mathcal{E}), \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -d\mathcal{E} + eh(\mathcal{P}, \mathcal{E}),$$

где $\mathcal{P}(t)$ – концентрация загрязнения воды, $\mathcal{E}(t)$ – плотность биомассы активного ила, $D(\mathcal{P})$ – функция диссипации, характеризующая естественный распад загрязнения; $f(\mathcal{P}, \mathcal{E})$ и $h(\mathcal{P}, \mathcal{E})$ – трофические функции, характеризующие процесс очистки загрязнителя биологически чистым илом; $a > 0$ – мощность источника загрязнения; $d > 0$ – постоянная, характеризующая скорость убывания активного ила в чистой воде; c и e – положительные постоянные.

2. Математическая модель очистки сточных вод

Допустим, что $D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$, а трофические функции «хищника» и «жертвы» одинаковы и имеют вид:

$$f(\mathcal{P},\mathcal{E}) = h(\mathcal{P},\mathcal{E}) = \frac{\mathcal{P}\mathcal{E}}{r+\mathcal{P}}, \quad \text{где} \quad r > 0 \ - \ \text{постоянная.}$$

Тогда будем иметь:

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} = a - b\mathcal{P} - \frac{c\mathcal{P}\mathcal{E}}{r+\mathcal{P}}, \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -d\mathcal{E} + \frac{e\mathcal{P}\mathcal{E}}{r+\mathcal{P}}.$$

Разумно предположить, что существует некоторое пороговое значение концентрации загрязнения $\mathcal{P}^*$, при превышении которого очищающая способность ила уменьшается, и рассмотреть трофические функции вида

$$f(\mathcal{P},\mathcal{E}) = \mathcal{E}\mathcal{P}e^{-r\mathcal{P}}, \quad r = \text{const} > 0.$$

В этом случае величина порогового значения загрязнения $\mathcal{P}^* = 1/r$. В реальности в описываемом процессе есть еще одна компонента – процесс аэрации – насыщения ила кислородом, который значительно повышает способность переработки биологически активным илом загрязнителя. С учетом сказанного математическая модель очистки примет вид:

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} = a - b\mathcal{P} - cf(\mathcal{P},\mathcal{E}), \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -d\mathcal{E} + ef(\mathcal{P},\mathcal{E})Q(t), \quad \frac{dQ}{dt} = -hQ + R,$$

где $a, b, c, d, e = \text{const} > 0$. Здесь $Q(t)$ – концентрация кислорода, а $R > 0$ определяет величину притока кислорода в систему в единицу времени.

3. Моделирование классовой борьбы

Запишем уравнения модели «хищник–жертва» в виде следующей системы:

$$\frac{dx}{dt} = a(y_1 - y)x, \quad \frac{dy}{dt} = -b(x - x_1)y,$$

где x, y – численность популяций, x_1 и y_1 – их стационарные значения, a и b – постоянные.

Рассмотрим, два типа граждан: рабочих и капиталистов.
Рабочие тратят весь свой доход wL на потребление, капиталисты накапливают свой доход $Y - wL$, где Y – продукция производства. Цена потребительских товаров нормирована к единице.

Пусть K означает капитал, $a = a_0 e^{gt} = Y/L$ – производительность труда, возрастающую с постоянной скоростью g, $k = K/Y$ – коэффициент капиталоемкости продукции, $N = N_0 e^{nt}$ – предложение на рынке рабочей силы, которое увеличивается с темпом роста n. Доля затрат на оплату труда по отношению к национальному доходу составляет $wL/Y = w/a$. Следовательно, доля прибыли капиталистов составляет $(1 - w/a)$. Поскольку сбережения можно определить как $S = Y - wL = (1 - w/a)Y$, доля инвестиций составляет $dK/dt = S = (1 - w/a)Y$ или $(dK/dt)(1/K) = (1 - w/a)(Y/K)$; при этом выбытием капитала пренебрегаем.

3. Моделирование классовой борьбы

После простых преобразований, с учетом получаем

$$\frac{dx}{dt} = x\left[\frac{1-y}{k} - (g+n)\right],$$

$$\frac{dy}{dt} = y\left[\frac{1}{w}\frac{dw}{dt} - \frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right],$$

где $(da/dt)(1/a) = g$.

$$\frac{dx}{dt} = x\left[\frac{1}{k} - (g+n) - \frac{y}{k}\right], \quad \frac{dy}{dt} = y[-(g+r) + px].$$

Заметим, что модель Гудвина, учитывающая взаимодействие между уровнем занятости и законодательно установленной долей отчислений на оплату труда, весьма напоминает классические модели политической экономии (её иногда называют неомарксистской). Модель вновь привлекает внимание к трудам экономистов-классиков, таких как Риккардо, Смит, Маркс. Увы, модель структурно неустойчива.

Итак, модель «хищник»–«жертва» может быть использована для моделирования явлений взаимосвязи городской земельной ренты и интенсивности землепользования, безработицы и динамики экономического роста.

4. Сходная идеология людей для описания военных действий

В данной модели состояние системы описывается точкой *(x, y)* положительного квадранта плоскости. Координаты этой точки *x* и *y* – численности противостоящих армий. Уравнения модели имеют следующий вид:

$$\frac{dx}{dt} = -by, \quad \frac{dy}{dt} = -ax.$$

Здесь *a* и *b* – мощность оружия армии x и армии y, соответственно.
В работе В.И. Арнольда предполагается, что непрерывная аппроксимация достаточно хороша, и скорость изменения численности войск пропорциональна эффективности выстрелов противной стороны. «Жесткая» модель допускает точное решение в виде:

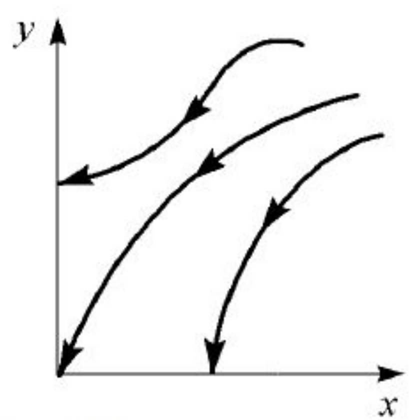

Рис. «Мягкая» модель войны

$$ax^2 - by^2 = \text{const}.$$

$$\frac{dx}{dt} = -b(x,y)y, \quad \frac{dy}{dt} = -a(x,y)x?$$

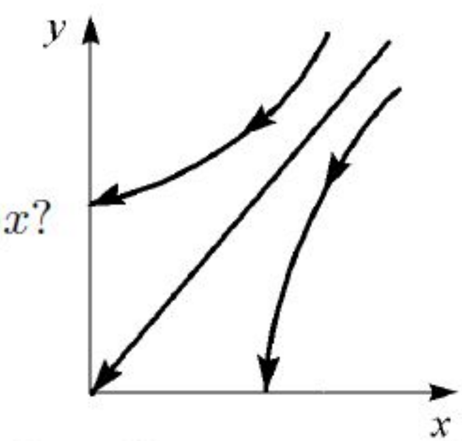

Рис. «Жесткая» модель войны

5. Простейшая вирусная модель инфекционного заболевания

Основными факторами в модели инфекционного заболевания являются следующие:

- концентрация патогенных размножающихся антигенов $V(t)$;
- концентрация антител $F(t)$; под антителами понимают субстраты иммунной системы, нейтрализующие антигены (иммуноглобулины, рецепторы клеток);
- концентрация плазмоклеток C – носителей и продуцентов антител – предполагается постоянной;
- степень поражения органа-мишени не учитывается.

Уравнение, описывающее изменение числа антигенов (чужеродных клеток, проникающих в организм), имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = \beta V - \gamma FV.$$

Для получения второго уравнения подсчитаем баланс числа антител, реагирующих с антигеном. Будем иметь

$$dF = \rho C dt - \eta\gamma FV dt - \mu_f F dt.$$

5. Простейшая вирусная модель инфекционного заболевания

Рассмотрим два предельных случая динамики болезни. Допустим, что организм не производит антител данной специфичности, то есть $F(t) = F_0 = 0$ для всех $t \geq 0$ и $\rho = 0$. Тогда из (28) следует, что

$$\frac{dV}{dt} = \beta V \quad \text{и} \quad V(t) = V_0 e^{\beta t},$$

где V_0 – доза заражения (начальная концентрация антигенов) при $t = 0$.

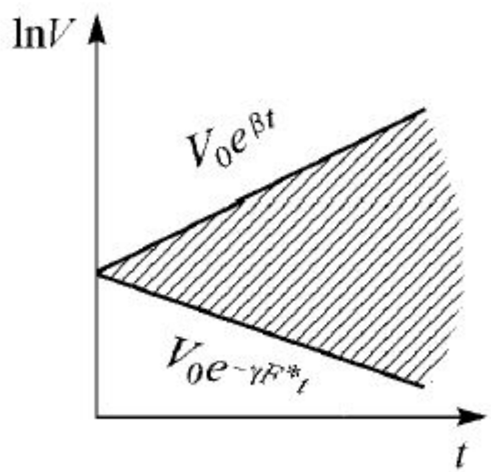

Рис. Область заболеваний, ограниченная решениями для двух предельных случаев

6. Сходные модели распространения эпидемий

Рассмотрим SIR–модель Кермака–МакКендрика, полагая, что особи популяции могут быть в трех различных состояниях:

- $S(t)$ – здоровые особи, которые находятся в группе риска и могут подхватить инфекцию;
- $I(t)$ – заразившиеся переносчики болезни;
- $R(t)$ – те, кто выздоровел и перестал распространять болезнь (в эту категорию относят, например, приобретших иммунитет или даже умерших).

Типичная эволюция особи популяции описывается следующей диаграммой: $S \to I \to R$.

Построим феноменологическую модель, соответствующую диаграмме, используя следующие допущения:

1) популяция замкнута и имеет постоянный размер N;

2) промежуток времени, когда заболевший остается опасным для окружающих, распределен по экспоненциальному закону со средним $1/\gamma$;

3) контакты случайны и равновозможны (однородное перемешивание).

При этих допущениях будем иметь:

$$\frac{dS}{dt} = -\lambda S, \quad \frac{dI}{dt} = \lambda I - \gamma I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I,$$

6. Сходные модели распространения эпидемий

где λ – так называемая сила инфекции, которая в данном случае равна произведению количества контактов в единицу времени, сделанных одним здоровым (обозначим это количество как cN), вероятности передать ему инфекцию при контакте p и вероятности встретить заболевшего $I(t)/N$. Обозначим $\beta = cp$. Тогда получаем $\lambda = \beta I$ и приходим к стандартной форме уравнений:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I, \quad \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0 \text{ и}$$

$$S(t) + I(t) + R(t) = N.$$

Третье уравнение в приведенной системе избыточно и, поскольку $dS/dt \leq 0$, то естественно считать фазовым пространством треугольник $S(t) + I(t) \leq N$.

В книге предложено использовать модель, рассмотренную выше, с некоторой модификацией для анализа заражения вирусом компьютеров. Постановка задачи следующая:

Пусть S – число компьютеров, которые подвергаются заражению вирусом, I – часть компьютеров, зараженных вирусом и не имеющих антивирусного программного обеспечения, R – часть компьютеров, имеющих должную антивирусную защиту (иммунитет).

6. Модификация модели распространения эпидемий

$$\frac{dS}{dt} = -aSI, \quad \frac{dI}{dt} = aSI - bI, \quad \frac{dR}{dt} = bI.$$

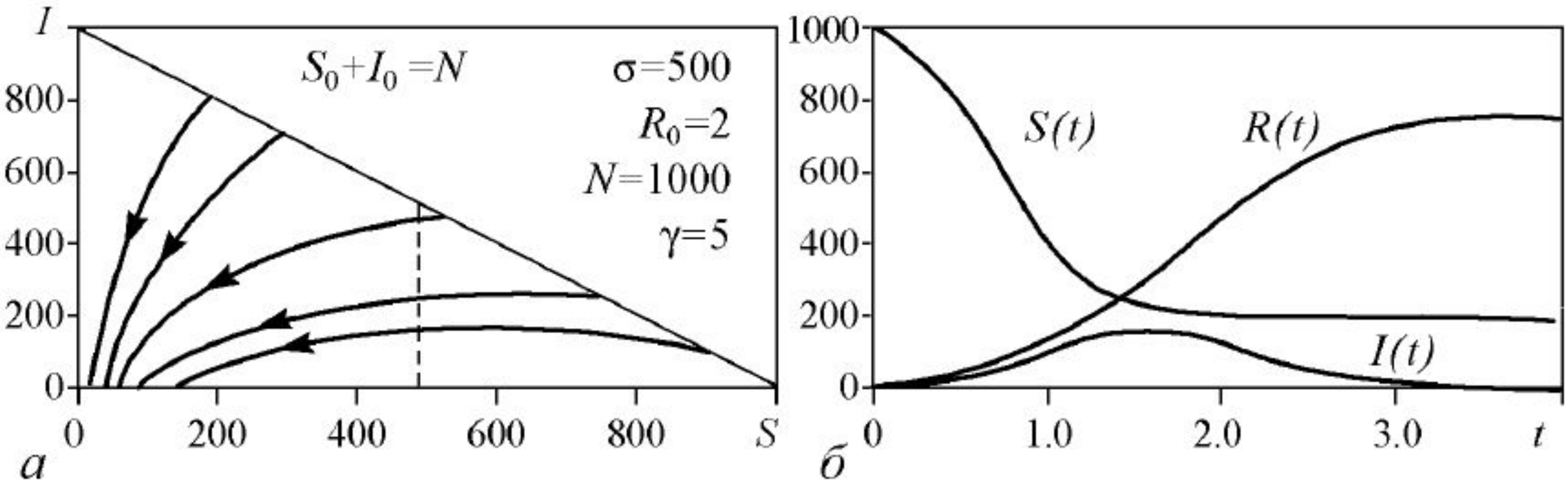

Рис. Пример конкретного расчета по уравнениям

7. Обобщенная модель Лотки–Вольтерры для описания взаимодействия когнитивных и/или эмоциональных мод мозга

Крупномасштабные когнитивные паттерны (моды или представления, наблюдаемые в эксперименте) в рабочем режиме мозга должны подавлять друг друга, что естественно должно происходить последовательно во времени. Иными словами, работающий мозг демонстрирует когнитивную и эмоциональную активность в виде цепочки сменяющих друг друга во времени комбинаций функциональных мод, а сами эти комбинации определяются родом ментальной активности.

Упомянутые выше процессы конкуренции когнитивных и эмоциональных мод между собой, а также эмоциональных и когнитивных мод друг с другом в работе предлагается описывать системами уравнений типа Лотки–Вольтерры в следующей обобщенной форме:

$$\tau \frac{dx_i(t)}{dt} = x_i(t)\left[\mu_i(E) - \sum_{i=1}^{n} \varphi_{i,j}(E) x_i(t)\right] + x_i(t)\eta(t), \quad i = 1, \ldots n.$$

Здесь $x_i(t)$ характеризует активность i-й моды (численность i-й популяции в экологии); n – число взаимодействующих мод (популяций); $\mu_i(E)$ – поступающая в систему информация или доступные ресурсы; $\varphi_{i,j}(E)$ – элементы матрицы взаимодействия; $\eta(t)$ – мультипликативный шум, присутствующий в системе; τ – характерное время, определяющее процесс.