Неравенства

Л. А. Янкина, к.п.н., доцент

Неравенства с одной переменной

Пусть f(x) и g(x) – два выражения с переменной *x* и областью определения **X**.

Тогда неравенство

$$f(x) > g(x)$$

$$(f(x) < g(x),\ f(x) \geq g(x),\ f(x) \leq g(x))$$

называется **неравенством с одной переменной.** Множество **X** называется *областью его определения*.

Решением неравенства называется каждое значение переменной $x \in X$, при котором неравенство обращается в истинное числовое неравенство.

Решить неравенство – значит найти множество его решений.

С точки зрения математической логики:

Неравенством с одной переменной называется ***одноместный предикат***

$$f(x) > g(x),$$

$$(f(x) < g(x),\ f(x) \geq g(x),\ f(x) \leq g(x)),\ \ x \in X.$$

Решить неравенство – значит, найти ***множество истинности данного предиката***, то есть найти множество значений переменной *x*, при подстановке которых предикат обращается в истинное высказывание.

Равносильные неравенства

Пусть даны два неравенства:

$$f_1(x) > g_1(x), \qquad (1)$$

$$f_2(x) > g_2(x). \qquad (2)$$

Если множество решений неравенства (1) является подмножеством множества решений неравенства (2), то есть $T_1 \subset T_2$,

то неравенство (2) называют **следствием неравенства (1)**.

Другими словами,

если каждое решение неравенства (1) удовлетворяет неравенству (2), то неравенство (2) называется следствием неравенства (1).

Пример: $x > 4$ и $x > 2$.

$]4; +\infty[\subset]2; +\infty[$.

Поэтому $x > 4 \Rightarrow x > 2$.

Два неравенства **равносильны** в том и только в том случае, когда каждое из них является следствием другого.

Другими словами, два неравенства называются **равносильными**, если их множества решений равны.

<u>Пример</u>: $x^2 - 4 < 0$ и $x^2 < 4$.

$T_1 = T_2 =]-2; 2[$.

Поэтому $x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 4$.

Теоремы о равносильности неравенств

Теорема 1. Если к обеим частям неравенства

$$f(x) > g(x),\ x \in X \qquad (1)$$

прибавить выражение t(x), *имеющее значения при всех* $x \in X$, то получится новое неравенство

$$f(x) + t(x) > g(x) + t(x),\ x \in X, \qquad (2)$$

равносильное данному.

$$f(x) > g(x),\ x \in X \qquad (1)$$
$$f(x) + t(x) > g(x) + t(x),\ x \in X, \qquad (2)$$

Доказательство

1) Пусть x = a – решение неравенства (1), то есть $f(a) > g(a)$ – истинное числовое неравенство $\Rightarrow$

$f(a) + t(a) > g(a) + t(a)$ - истинно, то есть x = a – решение неравенства (2).

Таким образом, (1) $\Rightarrow$ (2) .

$$f(x) > g(x),\ x \in X \qquad (1)$$
$$f(x) + t(x) > g(x) + t(x),\ x \in X, \qquad (2)$$

2) Пусть x = a – решение неравенства (2), то есть

$f(a) + t(a) > g(a) + t(a)$ – истинное числовое неравенство $\Rightarrow$

Прибавим к обеим частям этого числового неравенства число - $t(a)$, получим $f(a) > g(a)$,

то есть x = a – решение неравенства (1).

Таким образом, (2) $\Rightarrow$ (1).

Итак, уравнения (1) и (2) являются следствиями друг друга, а, значит, они равносильны.

Аналогично доказывается равносильность неравенств со знаками $<, \leq, \geq$.

Следствия

1. Если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же число, то получим неравенство, равносильное данному.

2. Если какое-либо слагаемое (числовое выражение или выражение с переменной) перенести из одной части неравенства в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

<u>Пример:</u> $26 \le 2x^2 + 48 \Leftrightarrow -2x^2 \le 48 - 26.$

Теорема 2. Если выражение t(x) *определено* при всех значениях $x \in X$ и *положительно* на X, то неравенства

$$f(x) > g(x) \text{ и } f(x) \cdot t(x) > g(x) \cdot t(x)$$

равносильны на множестве X.

Доказательство

Проводится аналогично доказательству теоремы 1 *(выполнить самостоятельно)*.

Следствие. Если обе части неравенства умножить (или разделить) на одно и то же *положительное* число, то получится неравенство, равносильное данному.

Пример: $4x < 32 \Leftrightarrow x < 8$.

Теорема 3. Если выражение t(x) *определено* при всех значениях $x \in X$ и *отрицательно* на X, то неравенства

$$f(x) > g(x) \text{ и } f(x) \cdot t(x) < g(x) \cdot t(x)$$

равносильны на множестве X.

<u>Доказательство</u>

Проводится аналогично доказательству теоремы 1 *(выполнить самостоятельно)*.

Следствие. Если обе части неравенства умножить (или разделить) на одно и то же *отрицательное* число и *знак неравенства заменить* на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному.

<u>Пример:</u> $-4x < 32 \Leftrightarrow x > -8.$

Теорема 4. Неравенства $0 < f(x) < g(x)$ и $0 < \dfrac{1}{g(x)} < \dfrac{1}{f(x)}$ равносильны друг другу.

Линейные неравенства с одной переменной

Неравенство вида

$$\boldsymbol{ax > b}$$

$$(ax < b,\ ax \geq b,\ ax \leq b)$$

называется **линейным неравенством с одной переменной.**

$$ax > b$$

- Если $a > 0$, то $x > \dfrac{b}{a}$. $T = \left]\dfrac{b}{a}; +\infty\right[$.

- Если $a < 0$, то $x < \dfrac{b}{a}$. $T = \left]-\infty; \dfrac{b}{a}\right[$.

- Если $a = 0$, то $0 \cdot x > b$. Тогда

а) при $b \geq 0$ неравенство *не имеет решений*

(то есть $T = \varnothing$),

б) при $b < 0$ неравенство верно *для любого* $\boldsymbol{x}$

(то есть $T = \mathbf{R}$).

Примеры:

1) $2(x - 3) + 5(1 - x) \geq 3(2x - 5)$

$$2x - 6 + 5 - 5x \geq 6x - 15$$

$$-3x - 1 \geq 6x - 15$$

$$-3x - 6x \geq -15 + 1$$

$$-9x \geq -14$$

$$x \leq \frac{14}{9}$$

Ответ: $]-\infty; \frac{14}{9}]$.

2) $\dfrac{6-5x}{3} < \dfrac{3x-2}{4} - \dfrac{2x-5}{6}$

$(6 - 5x) \cdot 4 < (3x - 2) \cdot 3 - (2x - 5) \cdot 2$

$24 - 20x < 9x - 6 - 4x + 10$

$24 - 20x < 5x + 4$

$-25x < -20$

$x > 0{,}8$

Ответ: $T =]\,0{,}8; +\infty[$.

3) $(2x - 3)^2 - 8x < (5 - 2x)^2$

$4x^2 - 12x + 9 - 8x < 25 - 20x + 4x^2$

$4x^2 - 20x + 20x - 4x^2 < 25 - 9$

$0 \cdot x < 16$

Ответ: $T =]-\infty; +\infty[$ или $T = \mathbf{R}$.

4) $(x + 2)^3 - 3x^3 < 2(1 - x)^3 + 18x$

$$(a \pm b)^3 =$$
$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 3x^3 < 2 - 6x + 6x^2 - 2x^3 + 18x$$

$$-2x^3 + 6x^2 + 12x + 2x^3 - 6x^2 - 12x < 2 - 8$$

$$0 \cdot x < -6$$

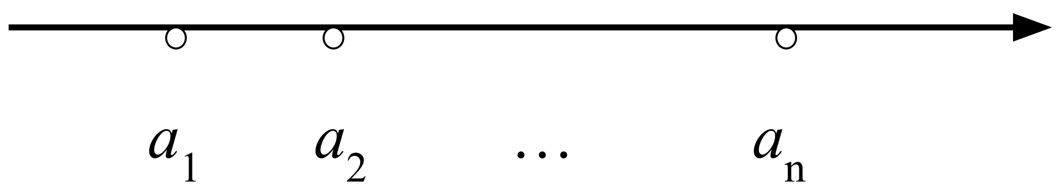
Ответ: $T = \varnothing$.

Метод интервалов

Рассмотрим неравенство

$$(x - a_1)(x - a_2)\cdot \ldots \cdot(x - a_n) > 0,$$

где $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$

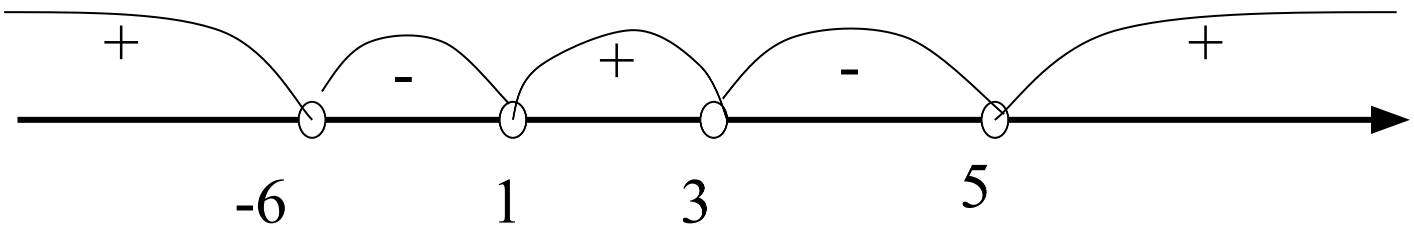


Эти точки разбивают числовую ось на промежутки $]-\infty; a_1[$, $]a_1; a_2[,\ldots,]a_n; +\infty[$.

На каждом из этих промежутков выражение $(x - a_1)(x - a_2)\cdot\ldots\cdot(x - a_n)$ имеет постоянный знак и меняет знак, когда меняет знак один из множителей, то есть в точках $a_1, a_2,\ldots a_n$.

Определяя знак выражения на каждом из промежутков, мы отбираем те из них, на которых это выражение положительно. Их объединение и является множеством решений неравенства.

Пример: $(x + 6)(x – 1)(x – 3)(x – 5) < 0$



Ответ:]- 6; 1[∪]3; 5 [

$$\frac{(x-a_1)^{n_1}\cdot(x-a_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_k)^{n_k}}{(x-b_1)^{m_1}\cdot(x-b_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(x-b_p)^{m_p}} \vee 0 \qquad (*)$$

Решение

1) *Отмечают на числовой прямой все* ***нули*** *и* ***точки разрыва функции f(x)****, содержащейся в левой части неравенства* (*).

Нули функции – значения переменной, при которых функция f(x) = 0.

Точки разрыва функции - значения переменной, при которых функция *f(x) не определена*.

2) ***Определяют знак функции f(x)*** *на каждом из промежутков.*

Замечания: а) Если c – наибольшее из чисел a_i, b_j, то в промежутке $]c; +\infty[$ функция $f(x) > 0$.

б) Если a_i (b_j) – такая точка, что показатель степени n_i выражения $(x - a_i)^{n_i}$ есть число нечетное, то справа и слева от a_i (b_j) функция *f(x) имеет противоположные знаки*, a_i (b_j) – простая точка.

в) Если a_i (b_j) – такая точка, что показатель степени n_i выражения $(x - a_i)^{n_i}$ есть число четное, то справа и слева от a_i (b_j) функция *f(x) имеет одинаковые знаки*, a_i (b_j) – двойная точка.

3) *Выбирают промежутки числовой оси в соответствии со знаком неравенства (*).* Объединение отобранных промежутков представляет собой решение неравенства (*).

Примеры: 1) $$\frac{x^2-3x-18}{13x-x^2-42}\geq 0.$$

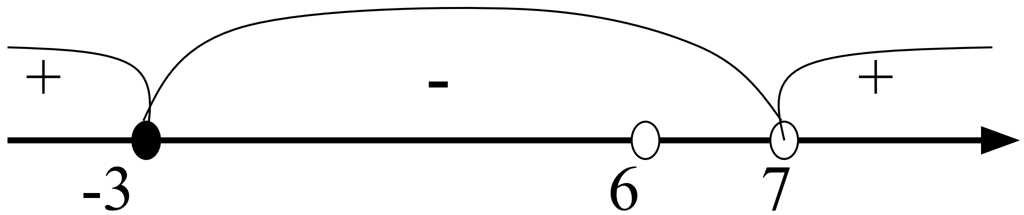
$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$\frac{x^2-3x-18}{x^2-13x+42}\leq 0$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

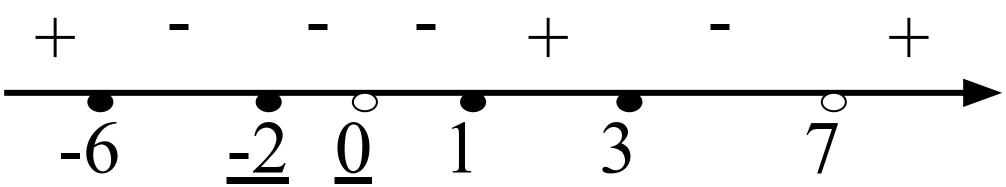
$$\frac{(x-6)(x+3)}{(x-6)(x-7)}\leq 0$$

Если x ≠ 6, то $\dfrac{x+3}{x-7} \leq 0$



Ответ: $[3;\ 6[\ \cup\ ]6;\ 7[$.

2) $$\frac{(x-1)(x+2)^4(x-3)^5(x+6)}{x^2(x-7)^3}\le 0$$



Ответ: [-6; 0[$\cup$]0; 1] $\cup$ [3; 7[.

Графическое решение неравенств

Графическое решение неравенств с одной переменной

$f(x) > g(x)$ $\quad$ $(f(x) < g(x))$

1) построить графики функций $y = f(x)$ и

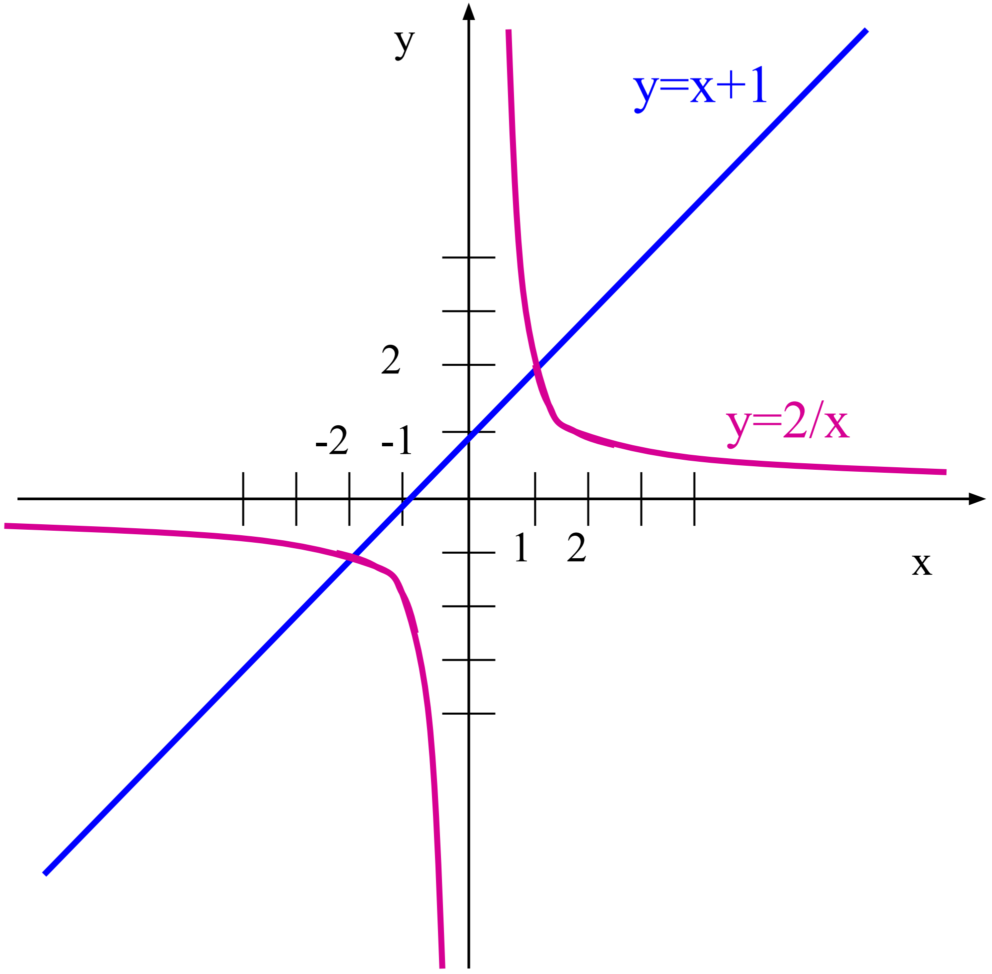
$y = g(x)$,

2) выбрать те промежутки оси Ox, на которых график функции $y = f(x)$ расположен *выше* *(ниже)* графика функции $y = g(x)$.

Пример: $x + 1 < \dfrac{2}{x}$

$$y = x + 1, \; y = \frac{2}{x}$$

Ответ:]−∞; -2[∪]0; 1[.



Квадратное неравенство

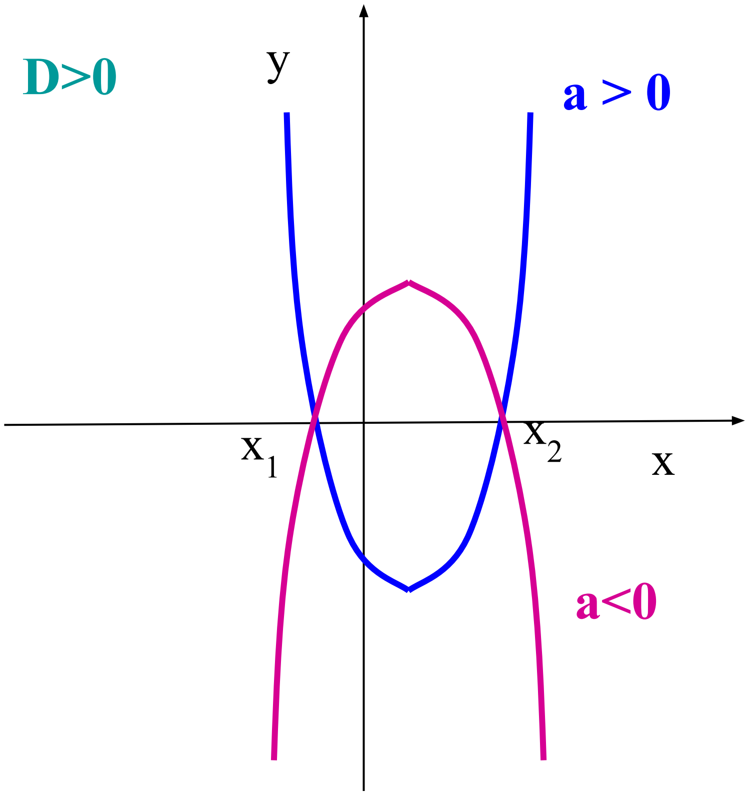
Неравенство вида

$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$(ax^2 + bx + c < 0)$$

называется **квадратным**

(или **неравенством второй степени**).



1) $\mathbf{D = b^2 - 4ac > 0}$

а) $\boldsymbol{a > 0}$

$ax^2 + bx + c > 0$

при $x < x_1$ или $x > x_2$;

$ax^2 + bx + c < 0$

при $x_1 < x < x_2$.

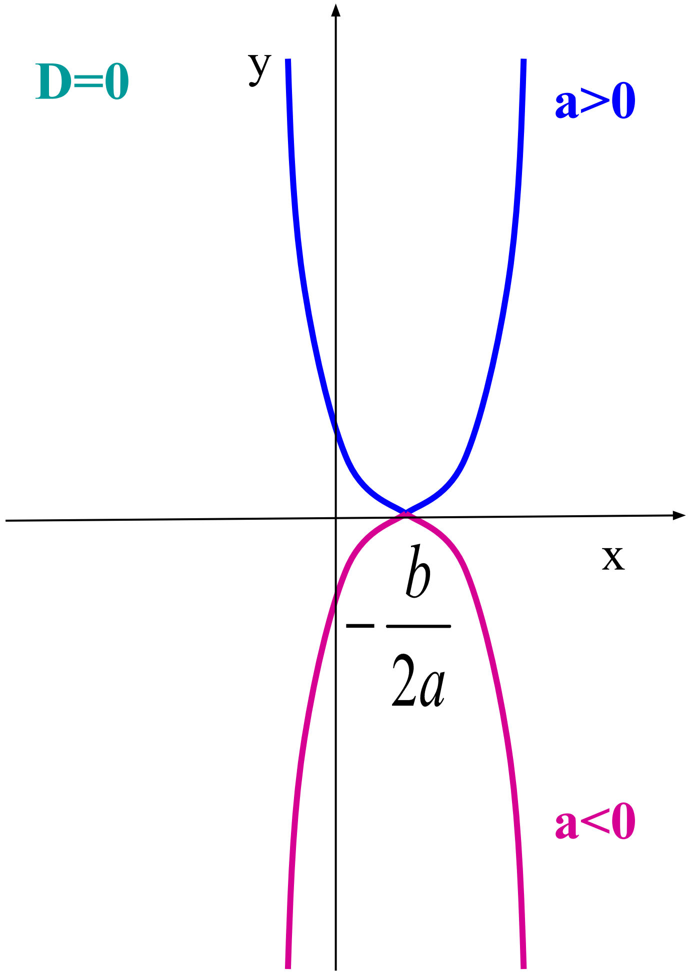
б) $\boldsymbol{a < 0}$

$ax^2 + bx + c > 0$

при $x_1 < x < x_2$;

$ax^2 + bx + c < 0$

при $x < x_1$ или $x > x_2$



2) $D = b^2 - 4ac = 0$

а) $a > 0$

$ax^2 + bx + c > 0$

для любого $x \neq -\frac{b}{2a}$,

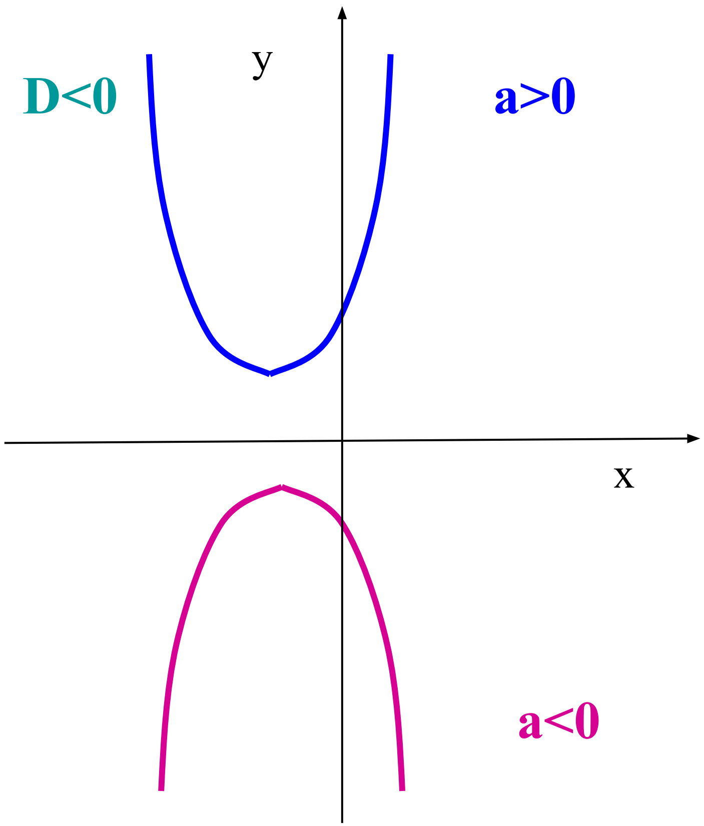
$ax^2 + bx + c < 0$ при $x \in \varnothing$.

б) $a < 0$

$ax^2 + bx + c > 0$ при $x \in \varnothing$,

$ax^2 + bx + c < 0$

для любого $x \neq -\frac{b}{2a}$.



3) $D = b^2 - 4ac < 0$.

а) $a > 0$

$ax^2 + bx + c > 0$

для любого $x \in \mathbf{R}$,

$ax^2 + bx + c < 0$ при $x \in \varnothing$.

б) $a < 0$

$ax^2 + bx + c > 0$ при $x \in \varnothing$,

$ax^2 + bx + c < 0$

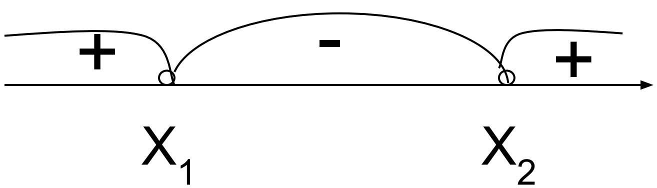
для любого $x \in \mathbf{R}$.

Квадратное неравенство можно решить и *методом интервалов*:

1) разложить на множители квадратный трехчлен:

$$ax^2 + bx + c > 0 \;\Leftrightarrow\; a(x - x_1)(x - x_2) > 0$$

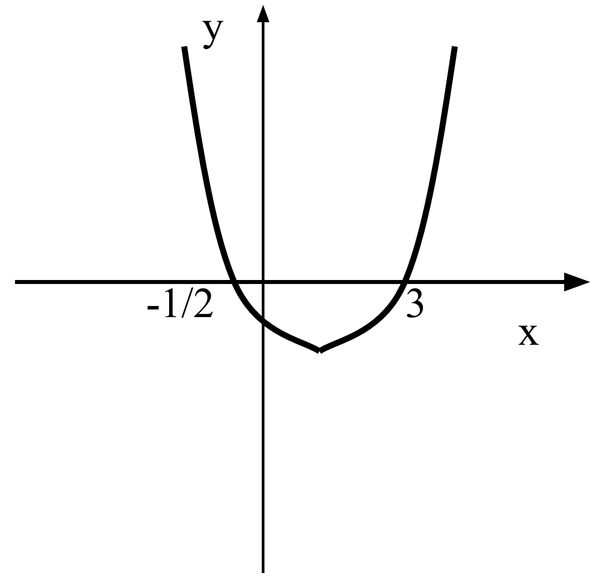
2)



3) Определить знак квадратного трехчлена на каждом из промежутков и выбрать промежутки со знаком *«плюс»*.

Пример: $2x^2 - 5x - 3 > 0$

1 способ

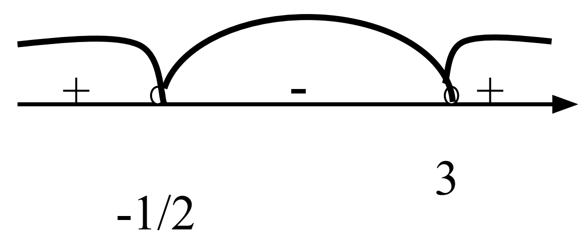


$x_1 = -1/2, \ \ x_2 = 3$

Ответ: $]-\infty; -1/2[\ \cup \ ]3; +\infty[$.

2 способ

$$2(x + \frac{1}{2})(x - 3) > 0.$$



Ответ: $]-\infty; -1/2[\ \cup \ ]3; +\infty[$.

Неравенства с двумя переменными

Пусть f(x,y) и g(x,y) – два выражения с двумя переменными.

Неравенство **$f(x, y) > g(x, y)$** **($f(x, y) < g(x, y)$)**

называется **неравенством с двумя переменными**.

Неравенство с двумя переменными может быть задано в виде **$f(x, y) > 0$**

Решением неравенства с двумя переменными называется упорядоченная пара чисел, которая обращает это неравенство в верное числовое неравенство.

Решить неравенство – значит найти множество всех его решений.

Пример: $x - 3y < 10$.

(8; 0), (5; 2) - решения данного неравенства.

Выбрав значение одной переменной можно найти соответствующее ему значение другой переменной.

С логической точки зрения:

Неравенством с двумя переменными называется *двухместный предикат* f(x, y) > g(x, y) (или f(x, y) > 0)

Множество решений неравенства с двумя переменными – это *множество истинности* данного *предиката.*

Неравенства с двумя переменными называются **равносильными**, если они имеют одинаковые множества решений.

Для неравенств с двумя переменными справедливы теоремы о равносильных неравенствах (см. тему «Неравенства с одной переменной»).

Рассмотрим неравенство с двумя переменными

$$f(x, y) > g(x, y) \qquad (\text{или } f(x,y) > 0).$$

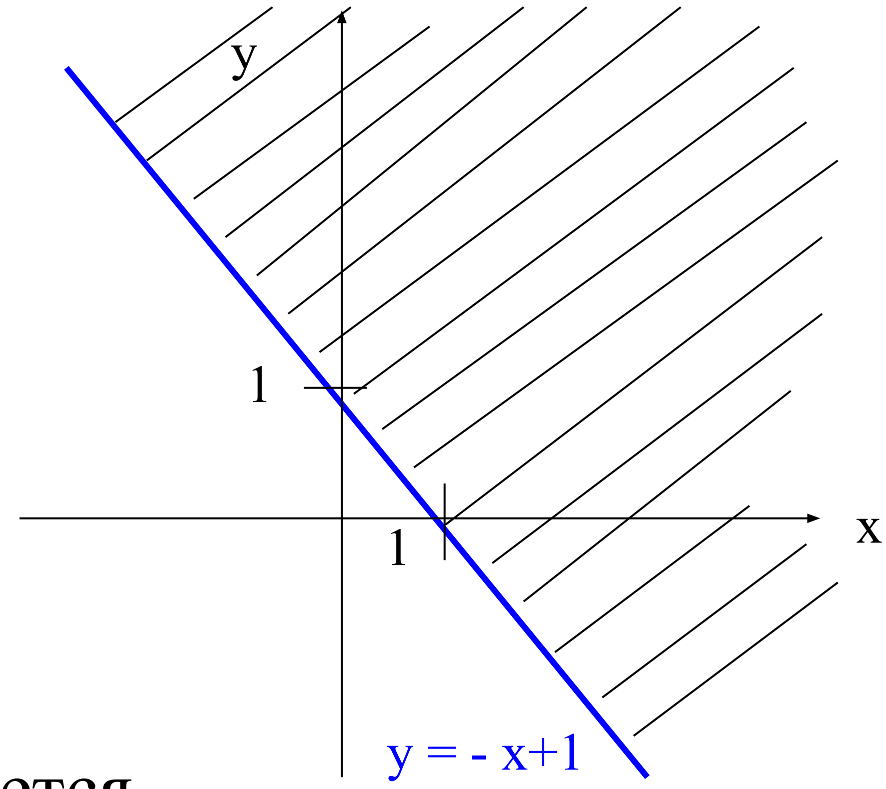
Графиком неравенства с двумя переменными называется множество всех точек координатной плоскости, координаты которых служат решениями данного неравенства.

<u>Примеры</u>:

1) Изобразить на координатной плоскости множество решений неравенства
$x + y – 1 > 0$.

$y > – x + 1$

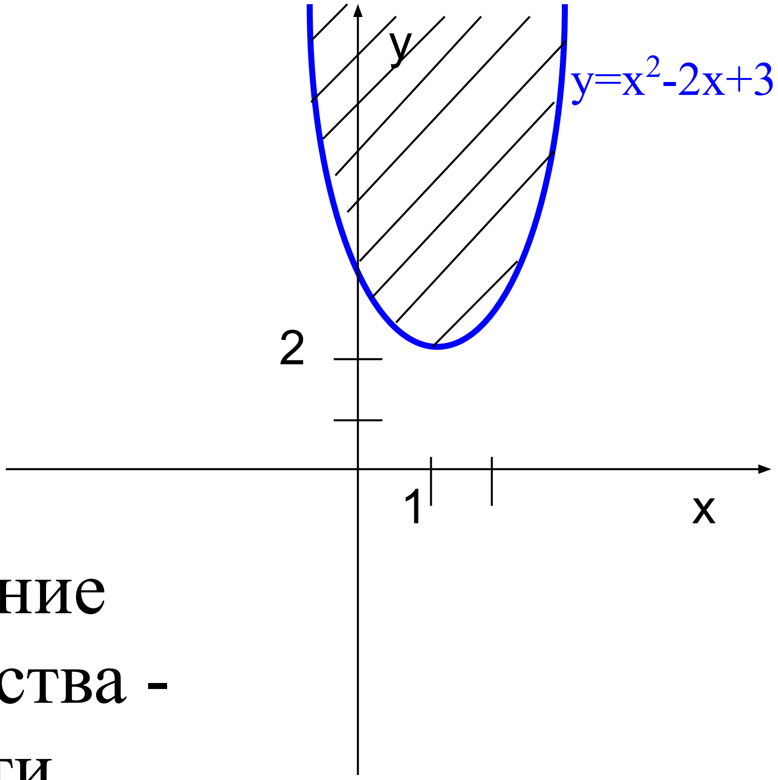
$y = – x + 1$



Графиком неравенства является множество точек плоскости, лежащих *выше* прямой $y = - x + 1$

2) Изобразить на координатной плоскости множество решений неравенства $x(x-2) \le y-3$.

$$y \ge x^2 - 2x + 3$$



Геометрическое изображение решений данного неравенства - множество точек плоскости, *лежащих на параболе* $y=x^2-2x+3$ и *выше* нее.

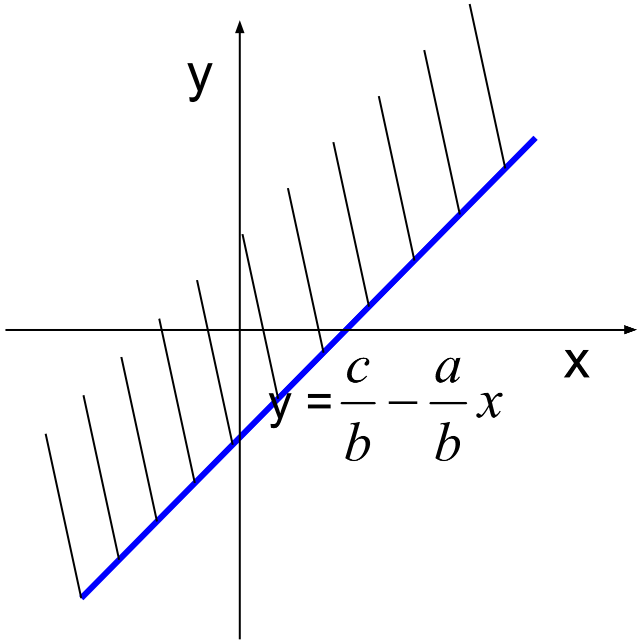
Линейное неравенство с двумя переменными

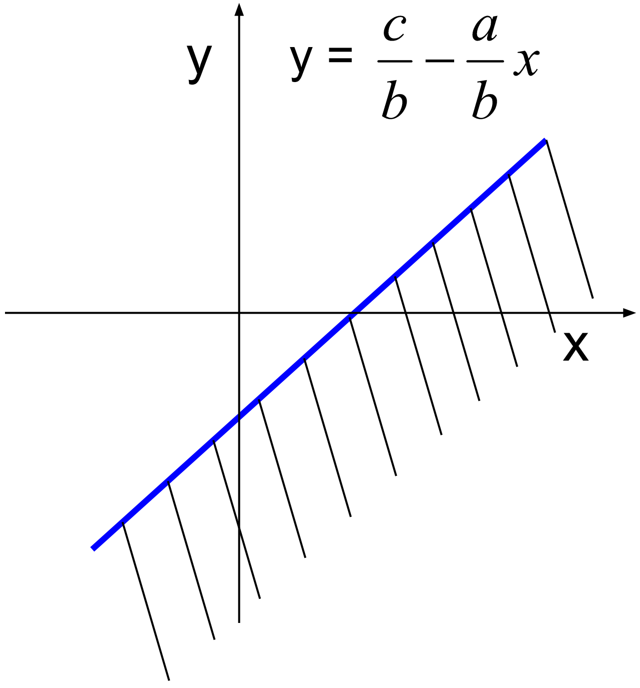
Неравенство вида $ax + by > c$ $(ax + by < c)$ называется **линейным неравенством с двумя переменными.**

Множество решений линейного неравенства с двумя переменными изображается в виде множества точек полуплоскости.

а) Если $a \neq 0$, $b \neq 0$, то

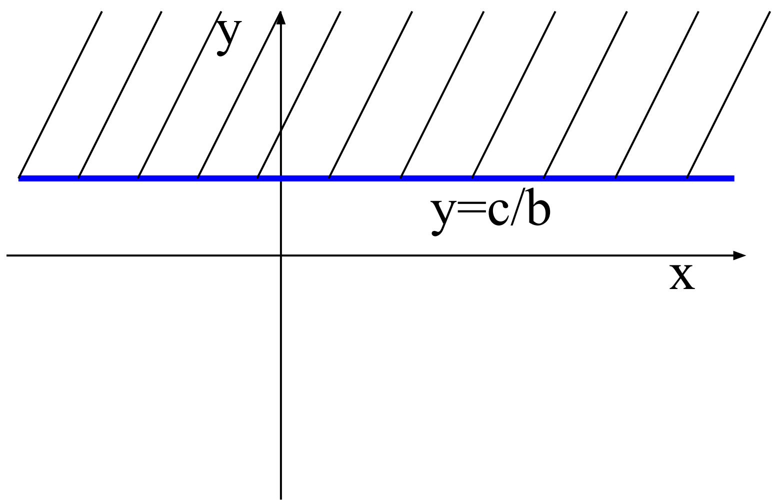
при $b > 0 \Rightarrow$ у $> \dfrac{c}{b} - \dfrac{a}{b}x$



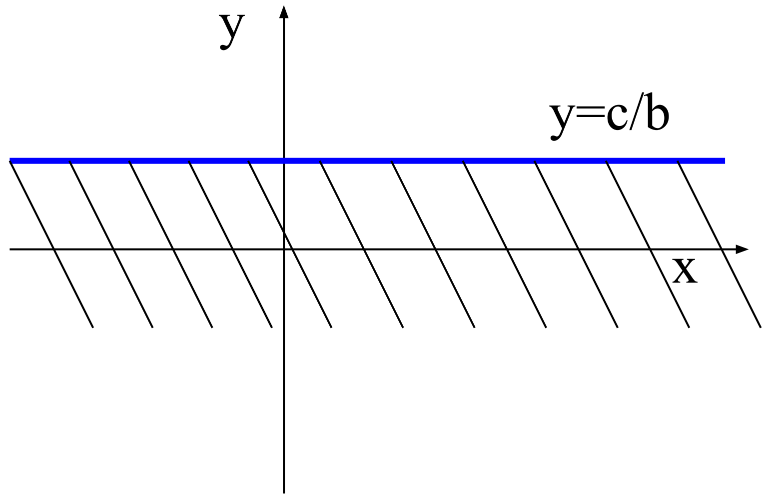


при $b < 0 \Rightarrow$ у $< \dfrac{c}{b} - \dfrac{a}{b}x$

б) Если $a = 0 \Rightarrow by > c \Rightarrow$

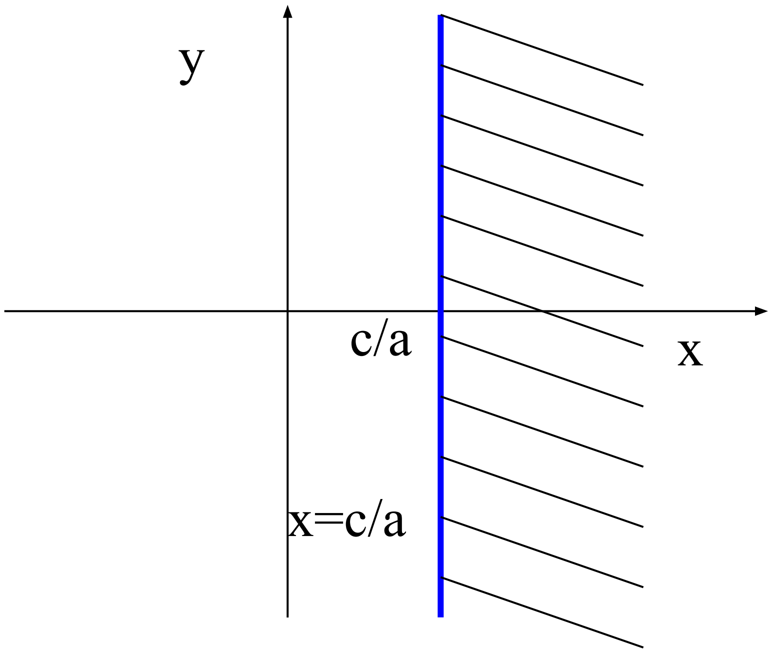


$b > 0 \Rightarrow y > c / b,$

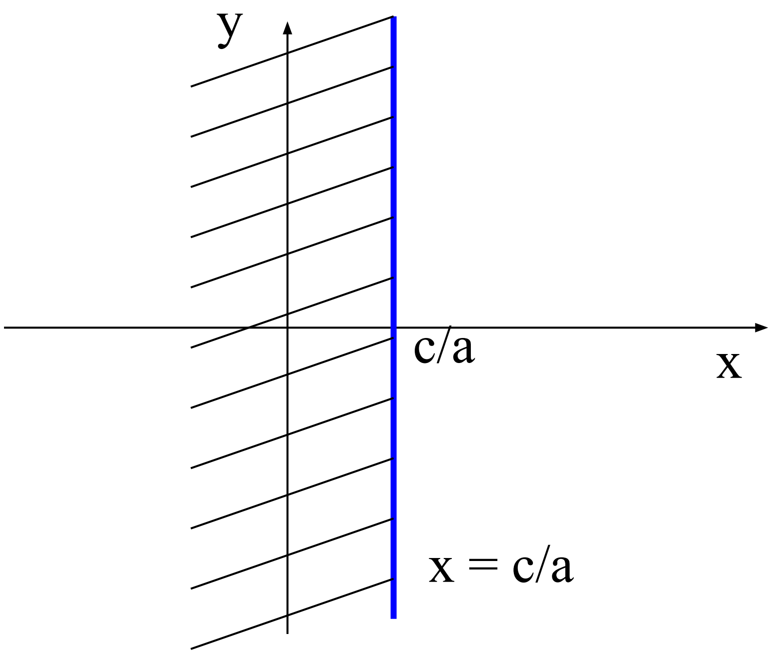


$b < 0 \Rightarrow y < c / b.$

в) Если $b = 0 \Rightarrow a\text{x} > c \Rightarrow$



$a > 0 \Rightarrow \text{x} > c\ /\ a,$



$a < 0 \Rightarrow \text{x} < c\ /\ a.$

Спасибо за внимание!