# ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

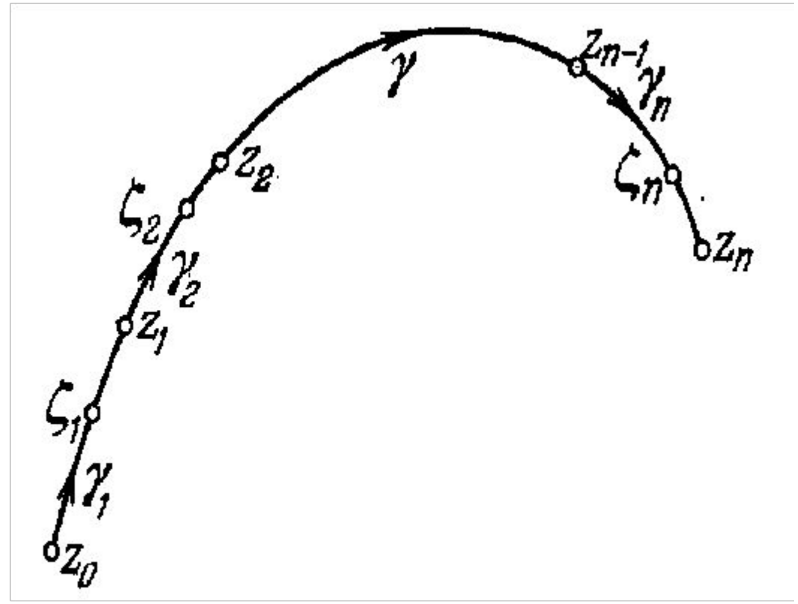
Пусть

$f(z)$ определена на кривой $\gamma$,

$l_k$ – длина дуги $\gamma_k$,

$l = \max\limits_{k=\overline{1,n}} l_k$,

$\zeta_k$ – точка на дуге $\gamma_k$.




Тогда если существует конечный предел при $l \to 0$ интегральной суммы

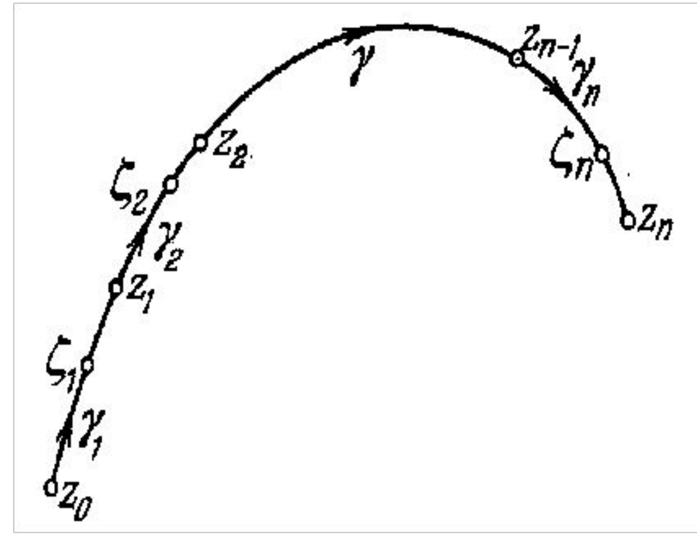
$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}),$$

не зависящий от выбора точек $z_k$, $\zeta_k$, то он называется ***интегралом*** (или ***криволинейным интегралом***) ***от функции*** $f(z)$ ***по кривой*** $\gamma$:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \lim_{l\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}).$$

**Теорема.** Существование интеграла $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz$ равносильно существованию двух криволинейных интегралов от действительных функций

$$\int\limits_{\gamma} u\,dx - v\,dy \text{ и } \int\limits_{\gamma} v\,dx + u\,dy.$$




Если интеграл существует, то его можно вычислить по формуле

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma} u\,dx - v\,dy + i\int\limits_{\gamma} v\,dx + u\,dy. \qquad (*)$$

Пусть $z = x + iy$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

Обозначим

$$z_k = x_k + iy_k, \qquad \Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ \Delta y_k = y_k - y_{k-1}.$$

$$\zeta_k = \xi_k + i\eta_k, \quad u_k = u(\xi_k, \eta_k),\ v_k = v(\xi_k, \eta_k).$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + i\sum_{k=1}^{n} (v_k \Delta x_k + u_k \Delta y_k)$$

Переходя к пределу по $l \to 0$, получаем (*)

**Теорема.** Существование КИ $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz$ равносильно существованию двух КИ2 от действительных функций

$$\int\limits_{\gamma} udx - vdy \text{ и } \int\limits_{\gamma} vdx + udy.$$

Если интеграл существует, то его можно вычислить по формуле

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma} udx - vdy + i\int\limits_{\gamma} vdx + udy. \qquad (*)$$

Замечания:

1. Для использования и запоминания формулы (*) достаточно формально перемножить $u(x,y)+i\,v(x,y)$ и $dz = dx + i\,dy$.

2. Формулу (*) можно рассматривать и как определение КИ от функции комплексного переменного, и как формулу его вычисления через КИ2 от функций двух действительных переменных.

# Свойства интегралов

**1.** Линейность: $\forall a,b\in\mathbb{C}\quad \int\limits_{\gamma}\left(af(z)+bg(z)\right)dz=a\int\limits_{\gamma}f(z)\,dz+b\int\limits_{\gamma}g(z)\,dz$

**2.** При изменении ориентации кривой интеграл меняет знак:

$$-\int\limits_{AB}f(z)\,dz=\int\limits_{BA}f(z)\,dz$$

**3.** Аддитивность: $\int\limits_{ABC}f(z)\,dz=\int\limits_{AB}f(z)\,dz+\int\limits_{BC}f(z)\,dz$.

**4.** Если $f(z)$ непрерывна на кривой $\gamma$, то

$$\left|\int\limits_{\gamma}f(z)\,dz\right|\le\int\limits_{\gamma}\left|f(z)\right|\cdot\left|dz\right|,\ \text{где } \left|dz\right|=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}\,.$$

И в частности, если $M=\max\limits_{z\in\gamma}\left|f(z)\right|$ и $l(\gamma)$ – длина $\gamma$, то

$$\left|\int\limits_{\gamma}f(z)\,dz\right|\le M\cdot l(\gamma).$$

**Интегральная теорема Коши.** Пусть $f(z)$ дифференцируема в *односвязной* области $D$. Тогда интеграл от $f(z)$ по любой замкнутой кривой $\gamma$, лежащей в области $D$ равен нулю: $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0$.

□ Утверждение теоремы следует из условий Коши-Римана и свойств КИ2.□

Замечание. Без условия односвязности теорема может не работать.

□ **Функция** $f(z) = \dfrac{1}{z}$ дифференцируема при $0 < |z| < \infty$, так как:

$$\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\,\frac{-y}{x^2 + y^2} = u(x, y) + iv(x, y),$$

$$u'_x = v'_y = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2},\ u'_y = -v'_x = \frac{-2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}.$$

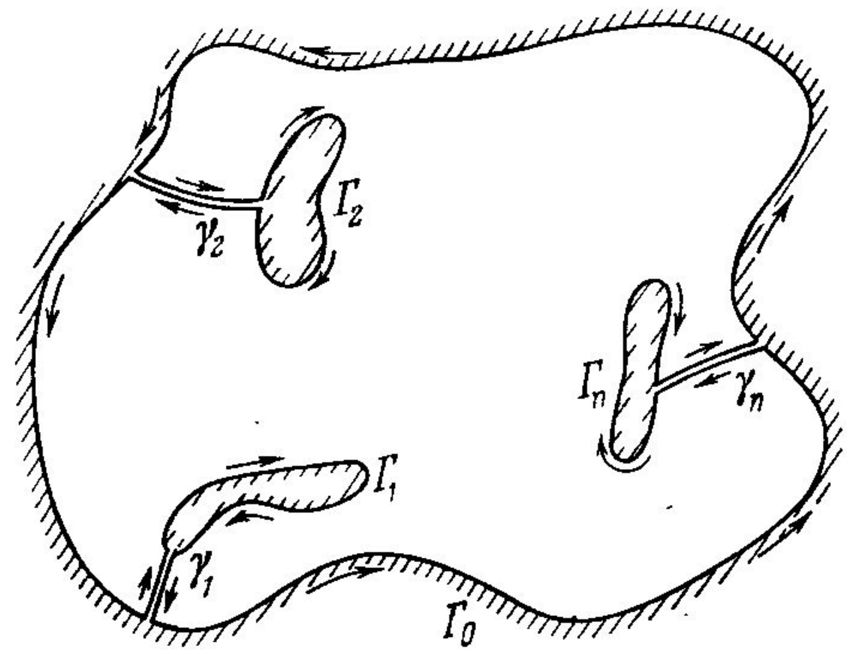
Но $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \left[z = e^{i\varphi}, dz = ie^{i\varphi}d\varphi\right] = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{e^{i\varphi}} = 2\pi i \neq 0$.□

**Следствие.** Если функция $f(z)$ дифференцируема в односвязной области $D$, то интеграл $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz$ не зависит от пути интегрирования.

**Следствие.** Пусть граница $\Gamma$ многосвязной области $D$ состоит из замкнутой кусочно-гладкой кривой $\Gamma_0$ и попарно не пересекающихся замкнутых кусочно-гладких кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$, расположенных внутри $\Gamma_0$, и пусть функция $f(z)$ дифференцируема в области $D$ и непрерывна вплоть до ее границы. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma_0} f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Gamma_k} f(z)\,dz = 0 .$$

Кривые $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$ ориентированы так, что при обходе каждой из этих кривых область $D$ остается слева.



# Интеграл с переменным верхним пределом и первообразная аналитической функции

Пусть $f(z)$ *непрерывна в области* $D$ интеграл

$$\int\limits_{\gamma} f(\xi)\,d\xi \quad (*)$$

не зависит от вида кривой, лежащей в $D$ и соединяющей две точки $z_0$ и $z$ этой области. Тогда значение интеграла (*) будет зависеть только от точки $z$, т.е. этот интеграл определяет некоторую функцию

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi,\ z \in D,$$

называемую ***интегралом с переменным верхним пределом***. При этом функция $F(z)$ является первообразной функции $f(z)$ в области $D$, т.е.

$$\forall z \in D \;\; F'(z) = f(z).$$

Пусть $D$ односвязная область. Тогда справедливы следующие утверждения.

**Теорема.** Всякая аналитическая в $D$ функция $f(z)$ имеет в $D$ первообразную $F(z)$, также аналитическую в области $D$, которая определяется формулой:

$$\forall z \in D \quad F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi + C. \qquad (*)$$

**Следствие 1.** Для аналитической в $D$ функции $f(z)$ справедлива формула Ньютона-Лейбница $\forall z_1, z_2 \in D \quad \int_{z_0}^{z_1} f(\xi)\,d\xi = F(z)\Big|_{z_0}^{z_1} = F(z_1) - F(z_0)$,

**Следствие 2.** Если $f(z)$ непрерывна в $D$, и интеграл от $f(z)$ по любой замкнутой кривой, лежащей в $D$, равен 0, то $f(z)$ имеет в области $D$ первообразную, определяемую формулой (*).

**Следствие 3.** Если функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитические в области $D$, то справедлива формула интегрирования по частям: $\int_{z_0}^{z_1} f(\xi)\,g'(\xi)\,d\xi = \Big[f(\xi)\,g(\xi)\Big]_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} f'(\xi)\,g(\xi)\,d\xi$.

Замечание. Интегралы от элементарных функций комплексного переменного, аналитических *в односвязной области*, вычисляются с помощью тех же методов и формул, что и в случае действительных функций.

# Интегралы, зависящие от параметра

Как и в действительном анализе, в комплексной области рассматриваются, кроме интегралов, содержащих параметр в пределах интегрирования (например, интеграл с переменным верхним пределом), интегралы, которые зависят от параметра, содержащегося в подынтегральной функции:

$$\int\limits_{\Gamma} f\left(z, z_0\right) dz .$$

Среди таких интегралов важное место в теории и практике комплексного интегрирования и приложениях занимает интеграл вида:

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{f\left(z\right)}{\left(z - z_0\right)^n} dz, \; n \in \square \; .$$

**Интегральная формула Коши.** Пусть $f(z)$ дифференцируема в *односвязной* области $D$ и простая замкнутая кривая $\Gamma$ лежит в $D$ и ориентирована положительно. Тогда

$$\forall z_0 \in D,\ z_0 \notin \Gamma \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{z - z_0}dz. \qquad (*)$$

Замечание 1. Формула (*) остается справедливой если $D$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\Gamma$, а функция $f(z)$ дифференцируема в $D$ и непрерывна вплоть до ее границы.

Замечание 2. Если в правой части формулы (*) $z_0 \notin \bar{D}$, то подынтегральная функция дифференцируема по $z$ всюду в $D$, поэтому объединяя интегральную теорему Коши и интегральную формулу Коши, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{z - z_0}dz = \begin{cases} f(z_0),\ z_0 \in D \\ 0,\ z_0 \notin \bar{D} \end{cases}$$

**Теорема о среднем.** Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в круге $K: |z - z_0| < R$ и непрерывна в замкнутом круге $\bar{K}$. Тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + Re^{i\varphi}\right) d\varphi.$$

**Теорема о среднем для гармонических функций.** Пусть функция $u(z) = u(x, y)$, $z = x + iy$, гармоническая в круге $K: |z - z_0| < R$ и непрерывна в замкнутом круге $\bar{K}$. Тогда

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(z_0 + Re^{i\varphi}\right) d\varphi.$$

## Способы вычисления интеграла $\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz$

**1.** Вычисление интегралов $\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz$ от непрерывной функции путем сведения к КИ2 от функций действительных переменных.

**2.** Вычисление интегралов от непрерывной функции путем сведения к определенному интегралу в случае параметрического задания пути интегрирования.

**3.** Вычисление интегралов от аналитических функций в односвязных областях.

**1.** Вычисление интегралов $\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz$ от непрерывной функции путем сведения к КИ2 от функций действительных переменных.

**Пример.** Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma} \overline{z}\,dz$ от точки $z_1 = i$ до точки $z_2 = 1$, если

1) $\Gamma$ – прямая, 2) ломанная, проходящая через точку $z = 0$

$$I = \int\limits_{\Gamma} (\overline{z} + 2z)\,dz = \int\limits_{\Gamma} (x - iy + 2x + 2iy)(dx + idy) = \int\limits_{\Gamma} (3x + iy)(dx + idy) =$$

$$= \int\limits_{\Gamma} 3x\,dx - y\,dy + i\int\limits_{\Gamma} y\,dx + 3x\,dy.$$

1) $I = \begin{bmatrix} x = x \\ y = 1 - x \\ x\text{от } 0 \text{ до } 1 \end{bmatrix} = \int\limits_0^1 (3x + x)\,dx + i\int\limits_0^1 (1 - x - 3x)\,dx = 2 - i.$

2) $I = I_1 + I_2 = 2$, так как

$I_1 = \begin{bmatrix} x = 0,\ dx = 0 \\ y = y \\ y\text{от } 1 \text{ до } 0 \end{bmatrix} = -\int\limits_1^0 y\,dy = \frac{1}{2},$ $I_2 = \begin{bmatrix} x = x \\ y = 0,\ dy = 0 \\ x\text{от } 0 \text{ до } 1 \end{bmatrix} = \int\limits_0^1 3x\,dx = \frac{3}{2}.$

**2.** Вычисление интегралов от непрерывной функции путем сведения к определенному интегралу в случае параметрического задания пути интегрирования.

Если точка кривой интегрирования $z(t)$ определяется некоторым действительным параметром $t$, изменяющимся от $a$ до $b$, то

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{a}^{b} f\big(z(t)\big)z'(t)\,dt\,.$$

Замечание. Интегрирование комплекснозначной функции действительной переменной не отличается от интегрирования действительнозначной функции; единственным отличием является наличие в первом случае множителя $i$, с которым действуют как с постоянной.

**Пример.** Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma} \overline{z}\,dz$, по окружности $|z| = 2$, соединяющий точки $z_1 = i$ и $z_1 = -1$.

На окружности $z = 2e^{i\varphi}$, поэтому $\int\limits_{\Gamma} \overline{z}\,dz = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} 2e^{-i\varphi} \cdot 2ie^{i\varphi}\,d\varphi = 2\pi i$.

**3.** Вычисление интегралов от аналитических функций в односвязных областях.

Первообразные аналитических функций в односвязных областях отыскиваются, как и в случае действительного анализа: используются свойства интегралов, таблица интегралов, правила интегрирования (замена переменной и интегрирование по частям).

Между криволинейным интегралом от аналитической функции и ее первообразной в односвязной области имеет место формула, аналогичная формуле Ньютона-Лейбница из действительного анализа.

**Примеры:**

**1.** $\int\limits_0^i \left(12z^5 - 9z^2\right)dz = \left(2z^6 - 3z^3\right)\Big|_0^i = -2 + 3i$ .

**2.** $\int\limits_0^i \cos^2 z\, dz = \int\limits_0^i \frac{1-\sin(2z)}{2}dz = \frac{i}{2} + \frac{1}{2}\cos(2z)\Big|_0^i = \frac{\operatorname{ch}2 - 1}{2} + \frac{i}{2}$.

**3.** $\int\limits_0^i z\cos z\, dz = \int\limits_0^i z\, d\sin z = z\sin z\Big|_0^i - \int\limits_0^i \sin z\, dz = i\sin i + \cos z\Big|_0^i = -\operatorname{sh}1 + \operatorname{ch}1 - 1$.

В случае многосвязной области проводятся разрезы так, чтобы можно было получить однозначную функцию.

При интегрировании однозначных ветвей многозначных функций ветвь выделяется заданием значения функции в некоторой точке кривой интегрирования. Если кривая замкнутая, то начальной точкой пути интегрирования считается та точка, в которой задано значение подынтегральной функции. Значение интеграла может зависеть от выбора этой точки.

**Пример *.** Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}}$ по верхней дуге окружности $|z| = 1$ при условии:

а) $\sqrt{1} = 1$; б) $\sqrt{1} = -1$.

▯ Задание значений функции $\sqrt{z}$ в точке контура интегрирования позволяет выделить однозначные ветви выражения $\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\exp\left(\frac{i\arg z}{2} + i\pi k\right), k = 0;1..$ (*)

Разрез можно провести, например, по мнимой отрицательной полуоси. Так как при $z = 1$ имеем $\sqrt{1} = e^{i\pi k}$, $k = 0;1.$, то в первом случае выделяется ветвь с $k = 0$, во втором — с $k = 1$. Подынтегральная функция на контуре интегрирования непрерывна.

Кривую интегрирования задает уравнение $z = e^{it},\ 0 \le t \le \pi.$ (**)

а) Ветвь определяется при $k = 0$, поэтому из (*) и (**), получим

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int\limits_0^{\pi} \frac{ie^{it}}{e^{i\frac{t}{2}}} dt = i\int\limits_0^{\pi} e^{i\frac{t}{2}} dt = 2ie^{i\frac{t}{2}}\Big|_0^{\pi} = 2(i-1).$$

б) Ветвь определяется при $k = 1$, поэтому из (*) и (**), получим

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int\limits_0^{\pi} \frac{ie^{it}}{-e^{i\frac{t}{2}}} dt = \ldots = -2(i-1) = 2(1-i).$$ ▯