

Приложение производной к исследованию функции

План

I. Исследование функции на монотонность:

1. Определение монотонности
2. Необходимый и достаточный признаки возрастания, убывания функции
3. Экстремумы функции
4. Алгоритм исследования функции на экстремумы и промежутки монотонности

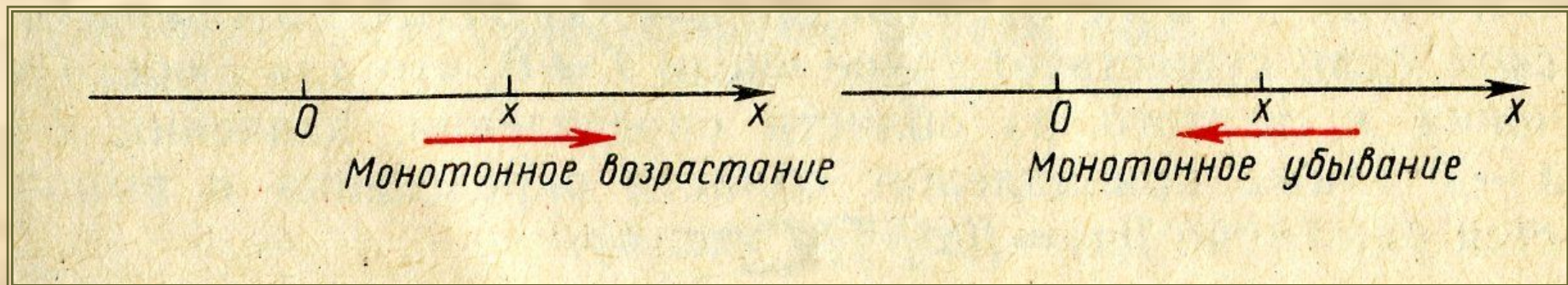
II. Исследования функции на выпуклость, вогнутость:

1. Определение выпуклости функции вверх и вниз
2. Достаточное условие выпуклости функции на интервале
3. Точка перегиба
4. Достаточный признак существования точки перегиба

III. Асимптоты

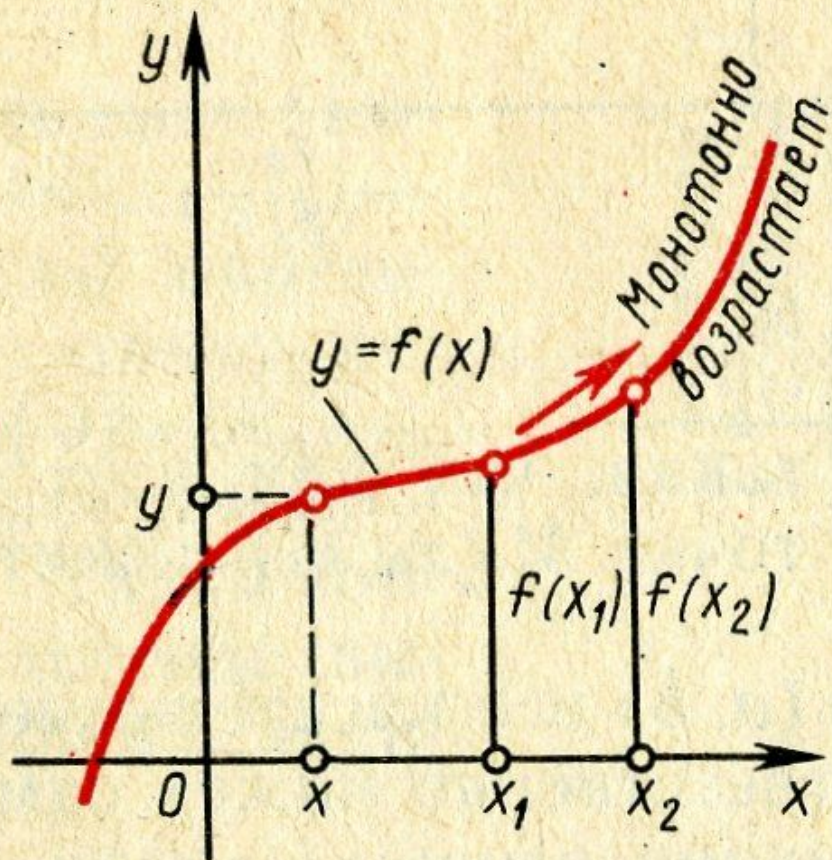
1. Монотонность

Переменную величину называют **монотонной**, если она изменяется только в одном направлении, т.е. либо только возрастает, либо только убывает. Очевидно, что движение точки x в сторону положительного направления оси абсцисс является монотонно возрастающим, а в противоположную сторону - монотонно убывающим

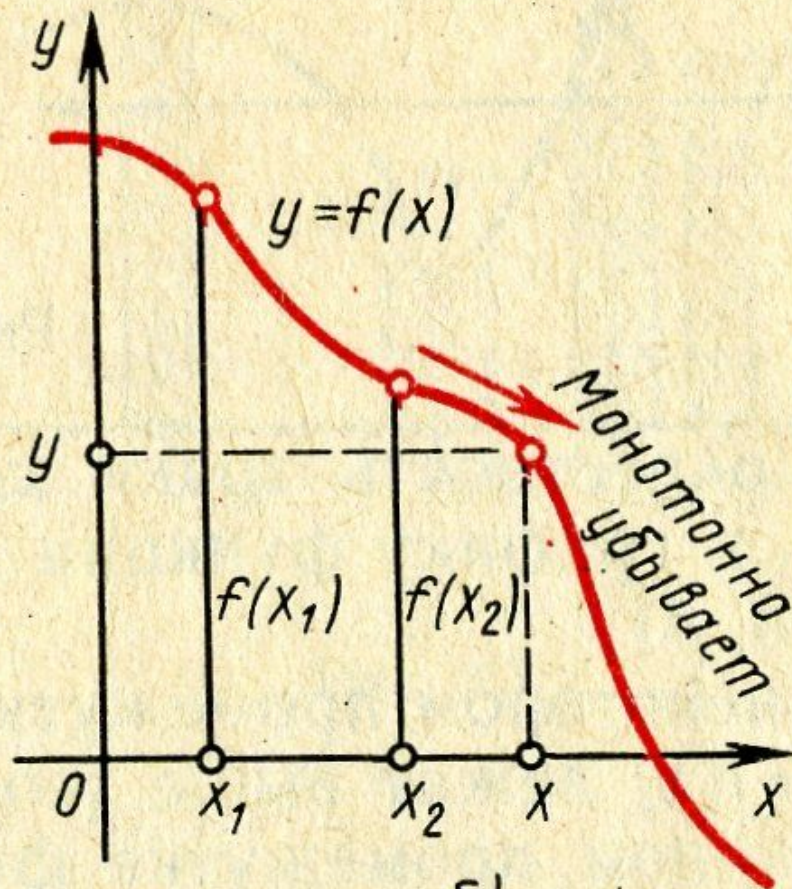


Приведем теперь строгое определение монотонности:

Функция $y = f(x)$ называется **монотонно возрастающей** на интервале (a, b) , если для любых x_1 и x_2 , принадлежащих этому интервалу, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Функция $y = f(x)$ называется **монотонно убывающей** на интервале (a, b) , если для любых x_1 и x_2 , принадлежащих этому интервалу, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. Естественно, что интервал (a, b) предполагается взятым из области определения функции.



а)



б)

2. Необходимый и достаточный признаки возрастания, убывания функции

Th: Если дифференцируемая функция возрастает (убывает) на некотором интервале, то ее производная неотрицательная (неположительная) на этом интервале.

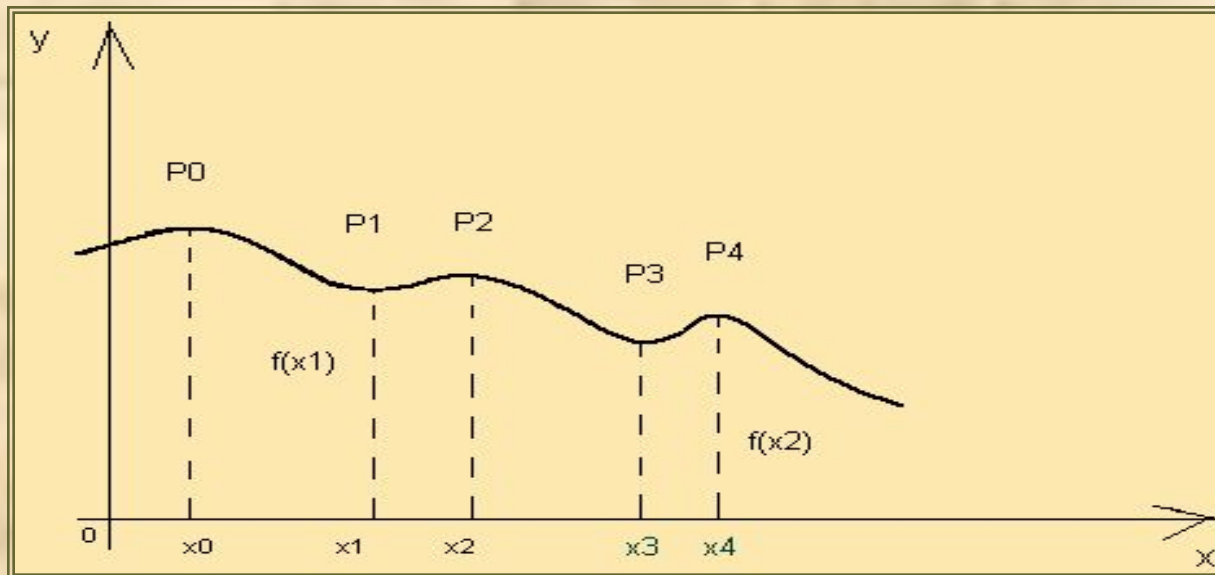
Th: Если производная функции на некотором интервале положительна (отрицательна), то функция возрастает (убывает) на этом интервале.

3. DEF: Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке $x=x_0$ строгий максимум (минимум), если $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$) для всех x , достаточно близких к x_0 ; x_0 — точка максимума (минимума).

Максимум и минимум функции называется экстремумами функции, а точка x_0 — точка экстремума

По определению максимума и минимума функции имеют локальный характер: зная функцию сравниваются только в точках, достаточно близких к точкам экстремума.

Отдельные минимумы м.б. больше максимумов функции.



Необходимое и достаточное условия существования экстремума

Th: Если функция $y=f(x)$ имеет экстремум в некоторой точке, то ее производная в этой точке равна нулю или не существует.

Th: Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку x_0 , и дифференцируемая во всех точках этого интервала, кроме б.м., самой точки x_0 .

Если при переходе аргумента слева направо через точку x_0 производная $f'(x_0)$ меняет знак с плюса на минус, то функция в этой точке имеет **максимум**; если знак меняется с минуса на плюс, то функция имеет **минимум**.

4. Алгоритм исследования функции на экстремумы и промежутки монотонности

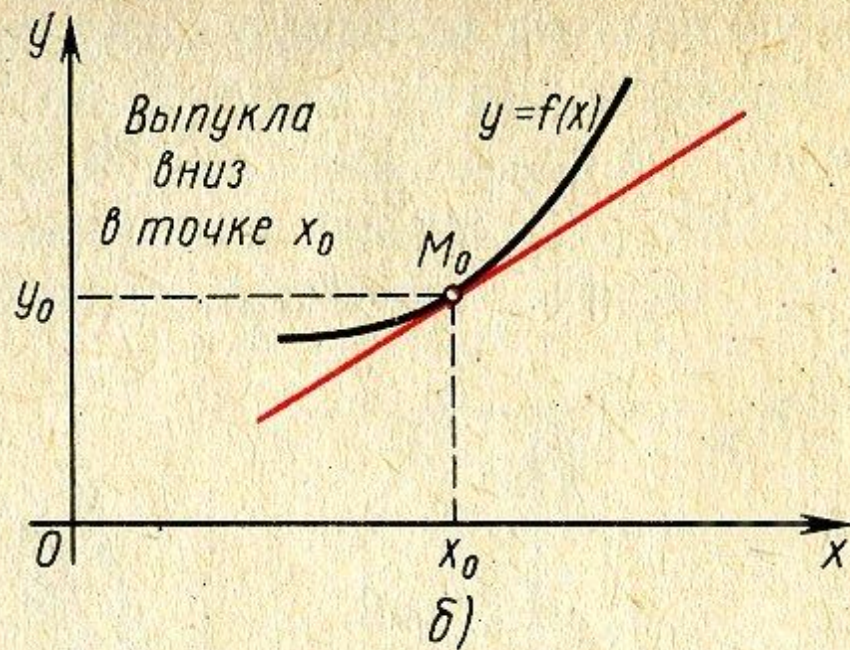
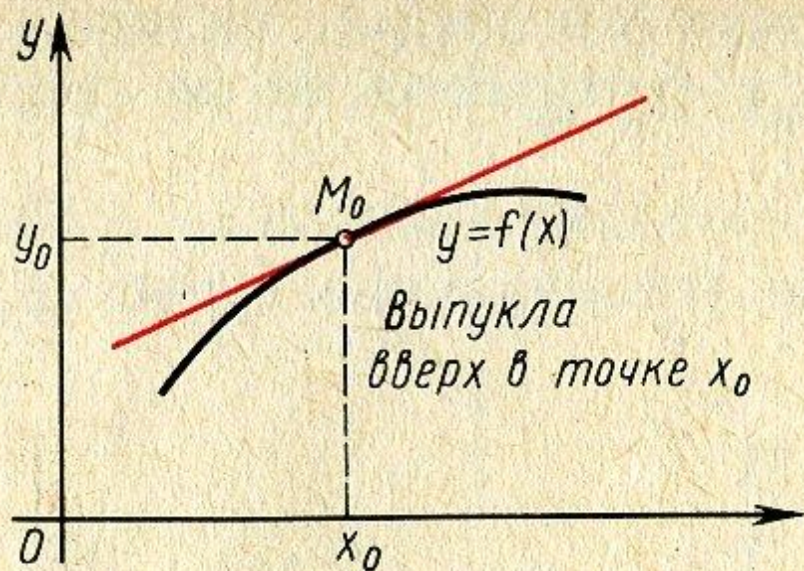
1. Находим производную $f'(x)$
2. Находим точки, в которых $f'(x)=0$ или $f'(x)$ не существует
3. Разбиваем этими точками область определения $f(x)$ на промежутки
4. Методом проб определяем знак $f'(x)$ в этих промежутках и находим интервалы монотонности
5. Применяем достаточное условие экстремума.

II. Исследование функции на выпуклость, вогнутость

1. Выпуклость вверх и вниз

Говорят, что функция $y = f(x)$ **выпукла вверх** в точке x_0 , если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех ее точек x касательная к графику функции в точке $M_0(x_0; y_0)$ лежит выше графика.

Говорят, что функция $y = f(x)$ **выпукла вниз** в точке x_0 , если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех ее точек x касательная к графику функции в точке $M_0(x_0; y_0)$ лежит ниже графика.

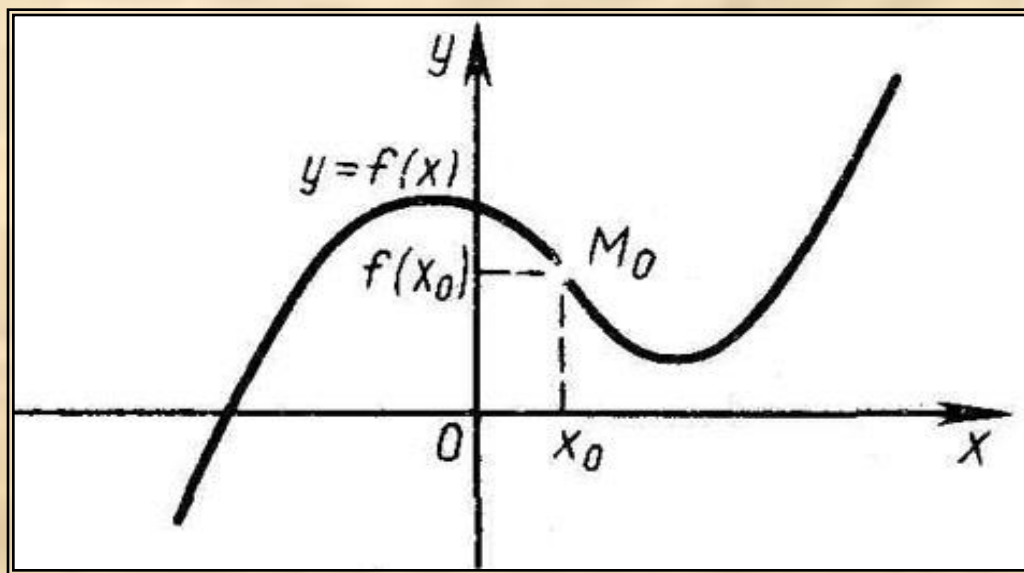


2. Достаточное условие выпуклости функции на интервале.

Если вторая производная $f''(x)$ существует на интервале (a, b) и не меняет знак на этом интервале, то:

- 1) при $f''(x) > 0$ (знак $+$) функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале (a, b) ;
- 2) при $f''(x) < 0$ (знак $-$) функция $f(x)$ выпукла вверх на интервале (a, b) .

3. **Определение:** Точка $M_0(x_0; f(x_0))$ графика функции $y = f(x)$ называется **точкой перегиба** этого графика, если существует такая окрестность точки x_0 , в пределах которой график функции $y = f(x)$ слева и справа от M_0 имеет разные направления выпуклости.



4. Достаточный признак существования точки перегиба

Точки, в которых вторая производная обращается в нуль или не существует, называется критическими точками **2-го рода**. В этих точках перегиб может быть, а может и не быть.

Если для функции $y=f(x)$ вторая производная ее $f''(x)$ в некоторой точке x_0 обращается в нуль и при переходе через точку меняет свой знак на обратный, то точка $M(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба функции.

III. Асимптоты

Определение 1: Если расстояние δ от точки M кривой $y = f(x)$ до некоторой определенной прямой при $x \rightarrow x_0$ и неограниченном удалении точки M от начала координат стремится к нулю, то эта прямая называется **асимптотой** кривой.

Различают вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты. Если в определении асимптоты x_0 — конечное число, то соответствующую асимптоту называют **вертикальной**.

Определение: Прямая $x = a$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

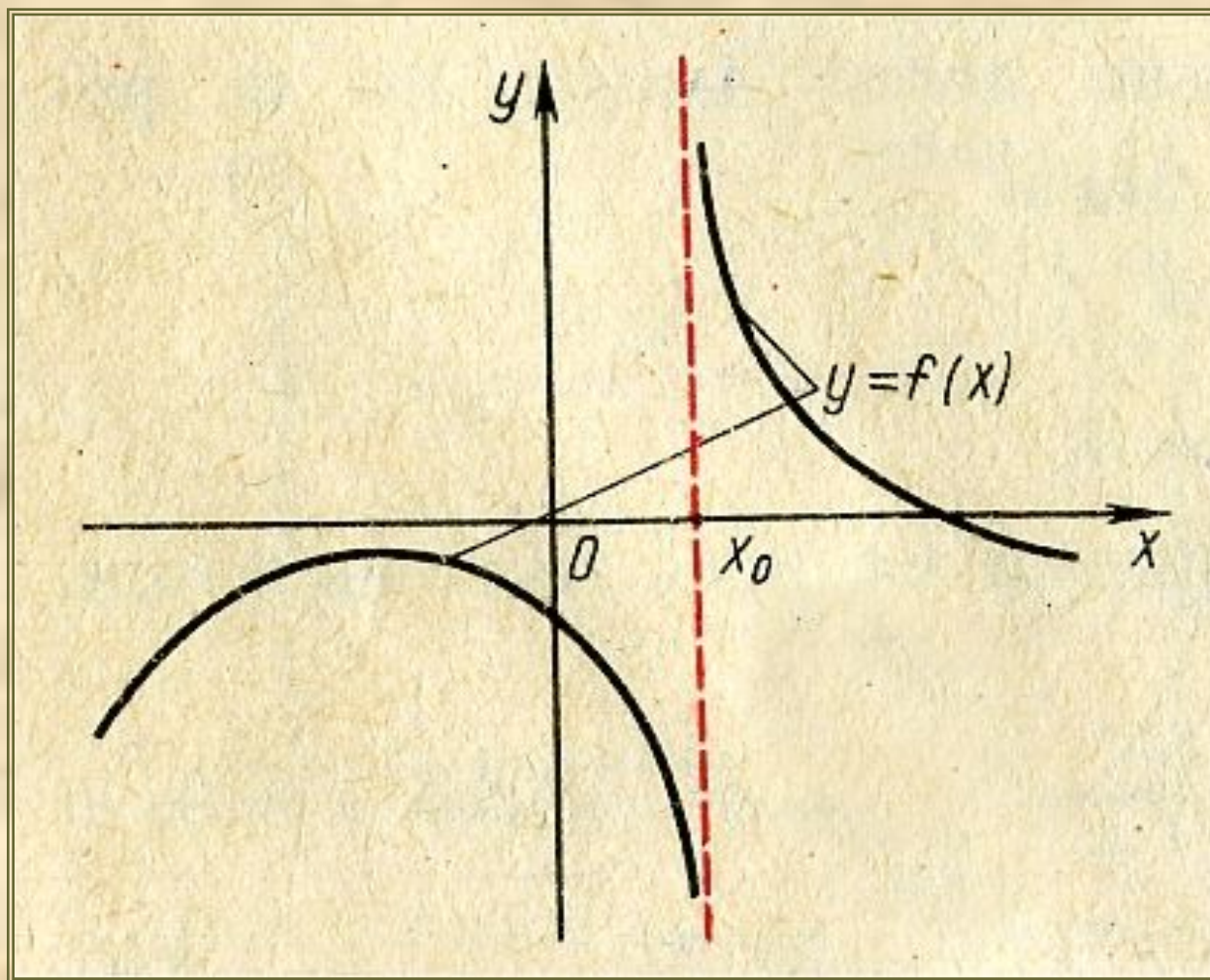


График с вертикальной асимптотой

Если в определении асимптоты x_0 есть $+\infty$ или $-\infty$, то соответствующая асимптота является либо горизонтальной, либо наклонной.

Говорят, что прямая $y = b$ служит горизонтальной асимптотой для графика функции $y = f(x)$, если

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

Если же равен числу b только один из этих пределов, то прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой соответствующей части графика функции $y = f(x)$, т.е. при $x = +\infty$ или при $x = -\infty$.

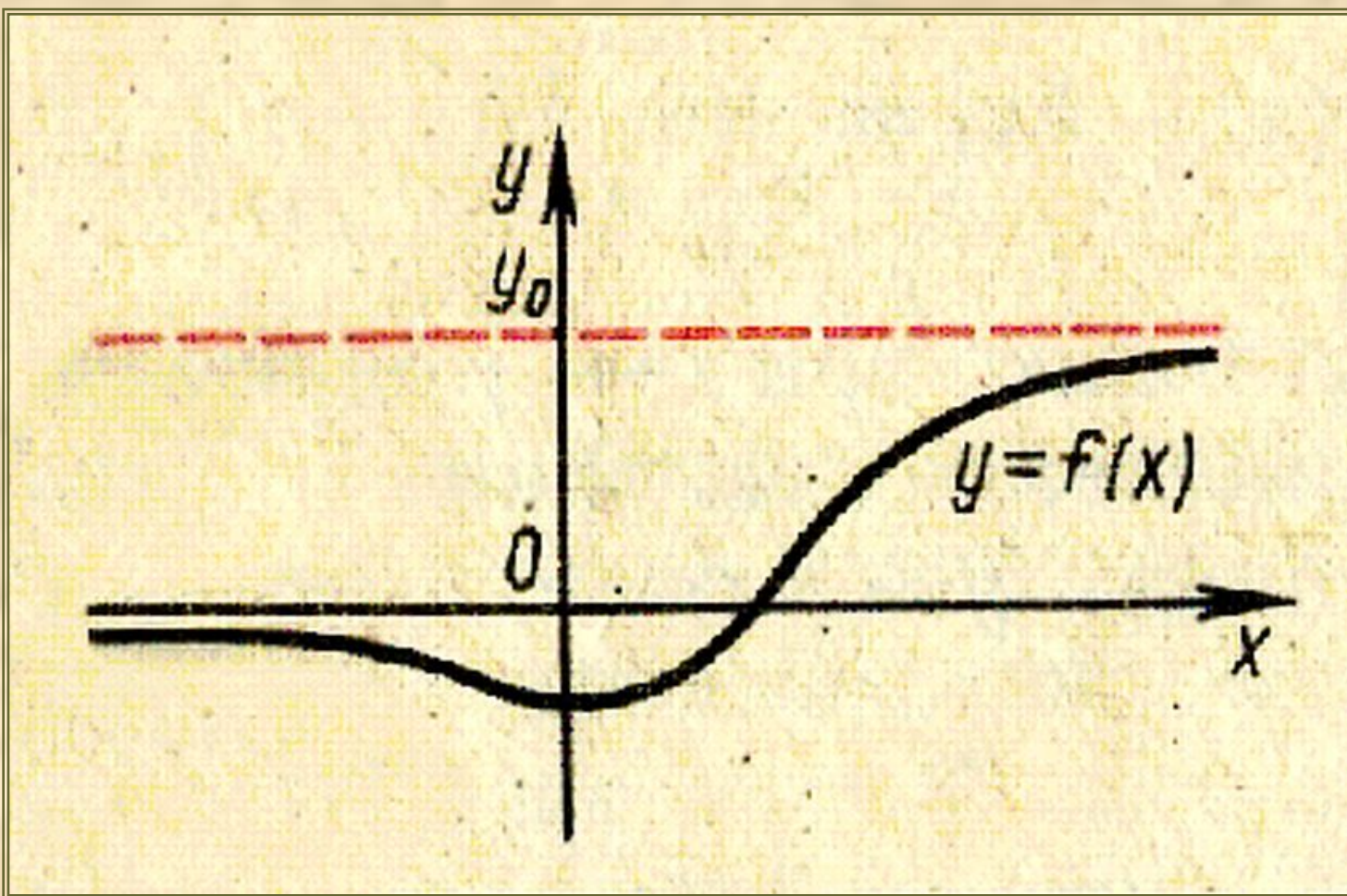


График с горизонтальной асимптотой

Определение: Прямая $Y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ (соответственно при $x \rightarrow -\infty$), если $f(x)$ представима в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0$ (соответственно $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha(x) = 0$)

Замечание: Если $k = 0$, то наклонная асимптота превращается в горизонтальную.

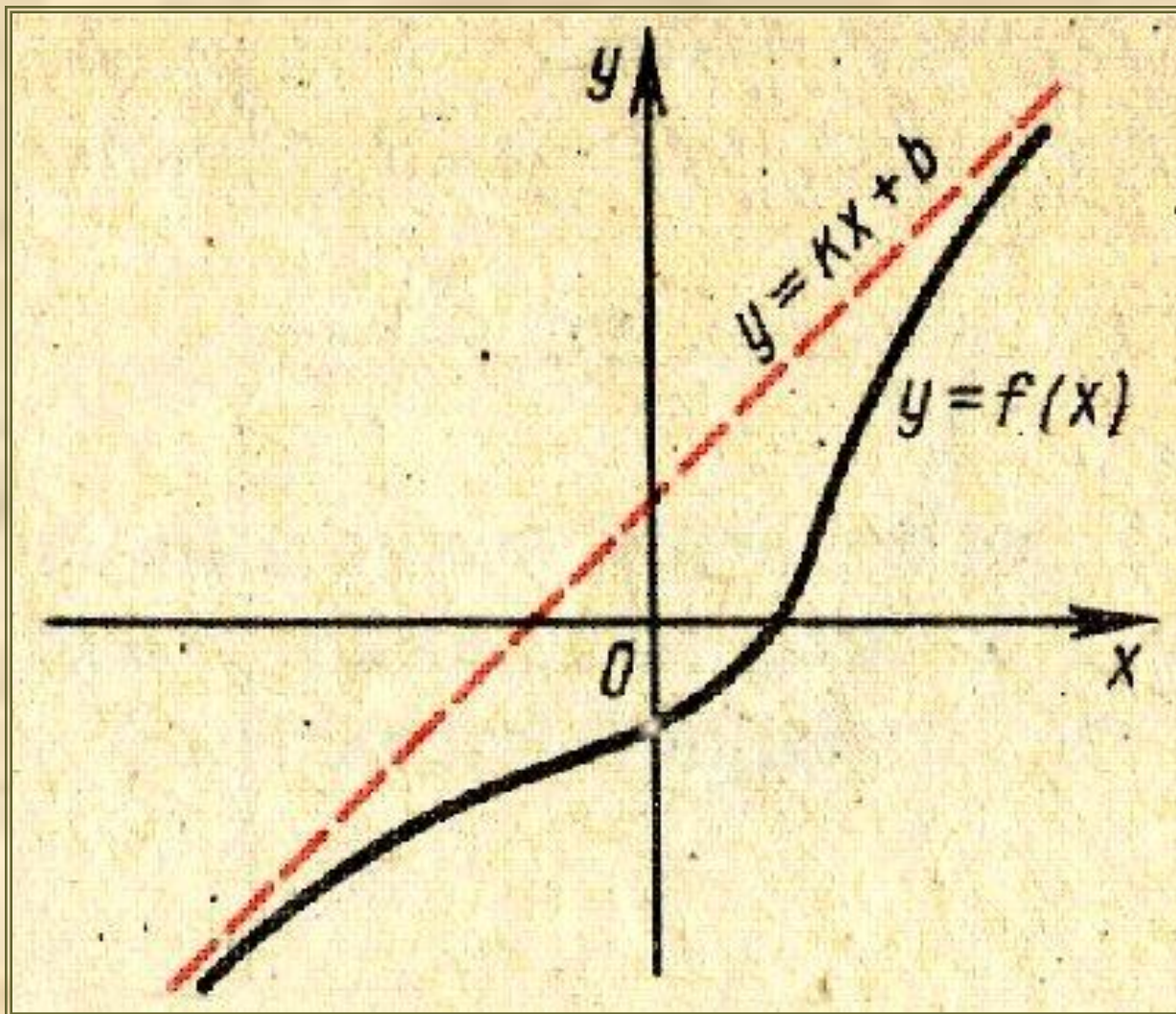


График с наклонной асимптотой

Пример: $y = \frac{|x|(x-1)}{x+1}$

- Вертикальная асимптота: $x=-1$
- Наклонная асимптота на $-\infty$:
 $y=-x+2$
- Наклонная асимптота на $+\infty$:
 $y=x-2$

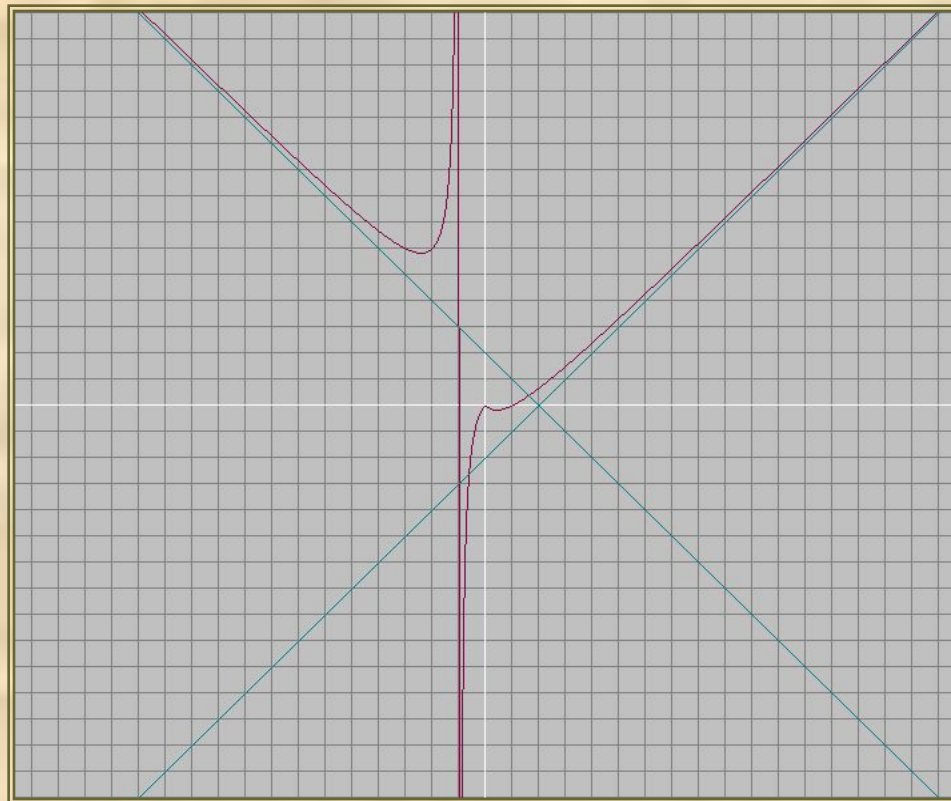


Схема исследования функции.

1. Область определения $D(y)$, область значения $E(y)$ функции.
2. Четность, нечетность функции.
3. Периодичность.
4. Точки пересечения с осями координат.
5. Монотонность. Экстремумы функции.
6. Точки перегиба. Выпуклость функции.
7. Асимптоты.
8. График.