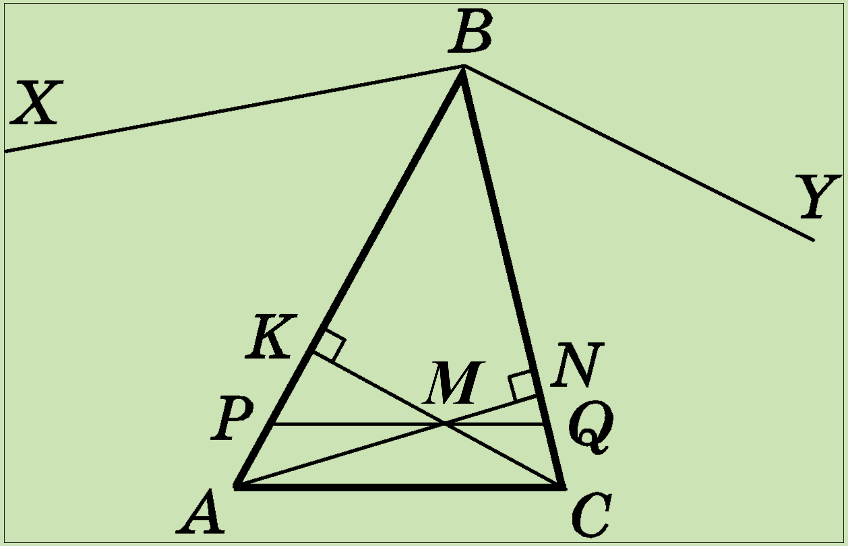
Не будем жалеть времени, или решение задачи несколькими способами

Задача 1. Высоты треугольника *ABC*, проведенные из вершин *A* и *C*, пересекаются в точке *M*. Найдите угол *AMC*, если угол *A* равен 70°, а угол *C* равен 80°.

Решение.

Способ 1

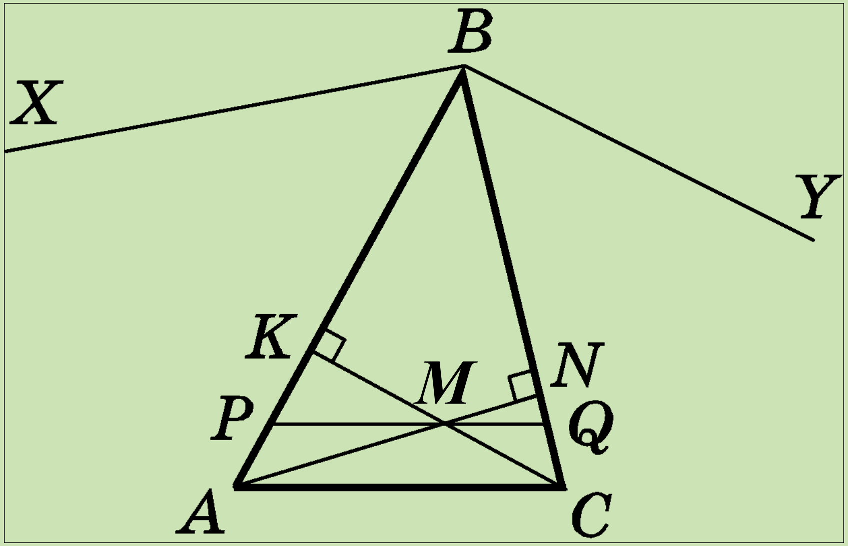


В прямоугольном треугольнике *BKC* угол *KCB* равен 60°, тогда в треугольнике *NMC* угол *NMC* равен 30°. Значит, смежный с углом *NMC* угол *AMC* имеет градусную меру 150°.

Задача 1. Высоты треугольника *ABC*, проведенные из вершин *A* и *C*, пересекаются в точке *M*. Найдите угол *AMC*, если угол *A* равен 70°, а угол *C* равен 80°.

Решение.

Способ 2



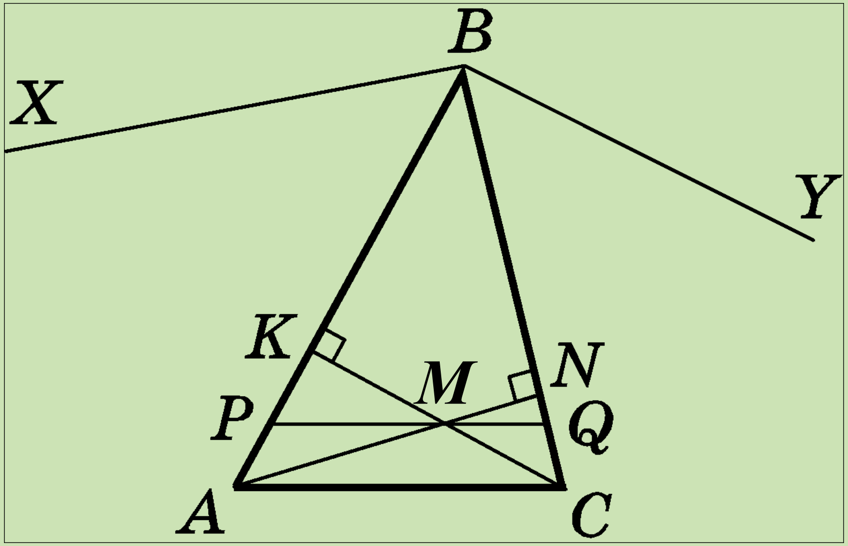
Через точку *M* проведем прямую *PQ* || *AC*. По свойству углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей, углы *KPM* и *BAC* равны 70°.

Тогда угол *KMP* равен 20° (из прямоугольного треугольника *PKM)*. Аналогично, угол *NMQ* равен 10°. Тогда углы *KMN* и *AMC* равны 180° – (20° + 10°) = 150° (по свойству вертикальных углов).

Задача 1. Высоты треугольника *ABC*, проведенные из вершин *A* и *C*, пересекаются в точке *M*. Найдите угол *AMC*, если угол *A* равен 70°, а угол *C* равен 80°.

Решение.

Способ 3

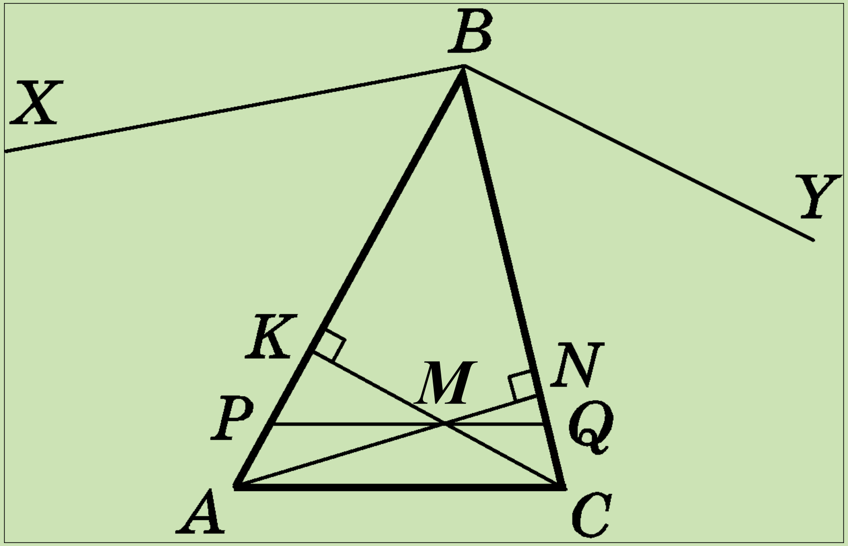


В четырехугольнике *MKBN* угол *KBM* равен 30°, а углы *BKN* и *BNM* равны 90°. Угол *KMN*, вертикальный с искомым углом *AMC*, равен 360° – 90° – 90° – 30° = 150°.

Задача 1. Высоты треугольника *ABC*, проведенные из вершин *A* и *C*, пересекаются в точке *M*. Найдите угол *AMC*, если угол *A* равен 70°, а угол C равен 80°.

Решение.

Способ 4



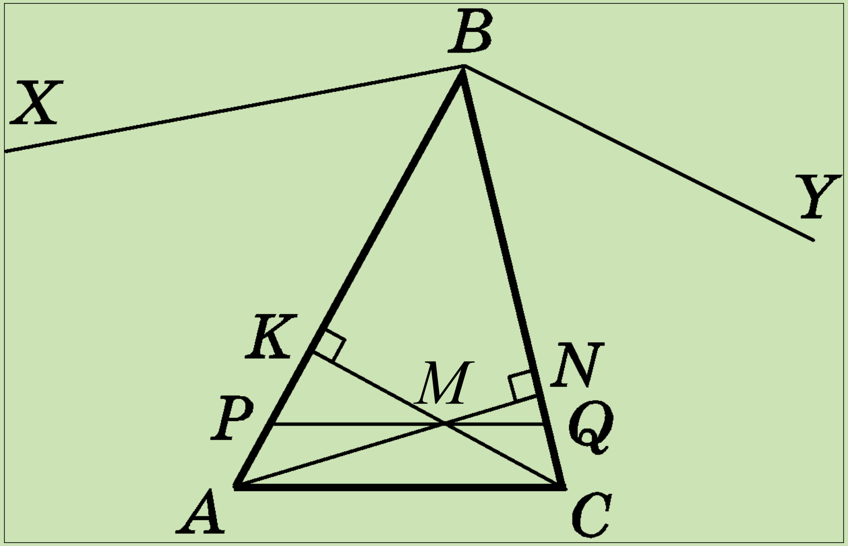
В прямоугольных треугольниках *AKC* и *ANC* угол *KCA* равен 90°– 70°= 20°, угол *NAC* равен 90°– 80°= 10°, тогда в треугольнике *AMC* угол *AMC* равен

180° – (20° + 10°) = 150°.

Задача 1. Высоты треугольника *ABC*, проведенные из вершин *A* и *C*, пересекаются в точке *M*. Найдите угол *AMC*, если угол *A* равен 70°, а угол *C* равен 80°.

Решение.

Способ 5

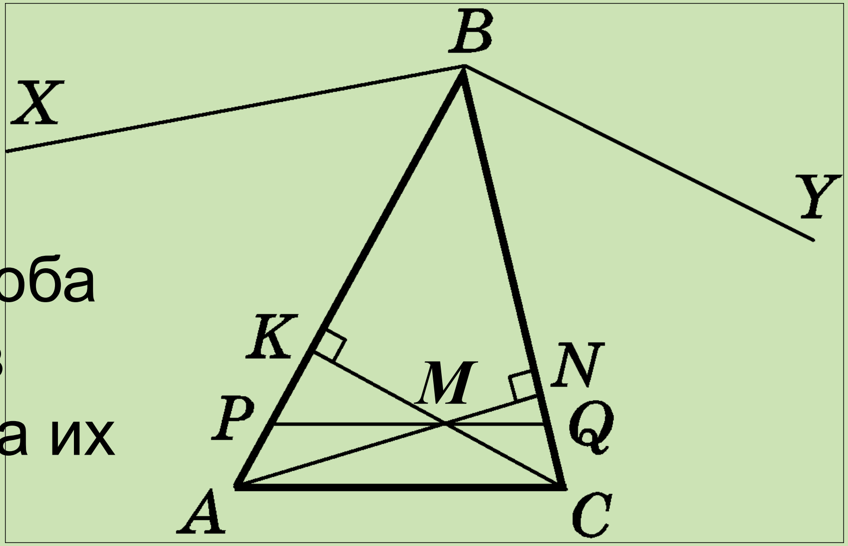


В прямоугольных треугольниках *ANB* и *CKB* углы *BAN* и *BCK* равны 60°. Тогда угол *NAC* будет равен 70° – 60°= 10°, угол *KCA* равен 80° – 60°= 20°. Тогда в треугольнике *AMC* угол *AMC* равен 180° – (20° + 10°) = 150°.

Задача 1. Высоты треугольника *ABC*, проведенные из вершин *A* и *C*, пересекаются в точке *M*. Найдите угол *AMC*, если угол *A* равен 70°, а угол *C* равен 80°.

Решение.

Способ 6



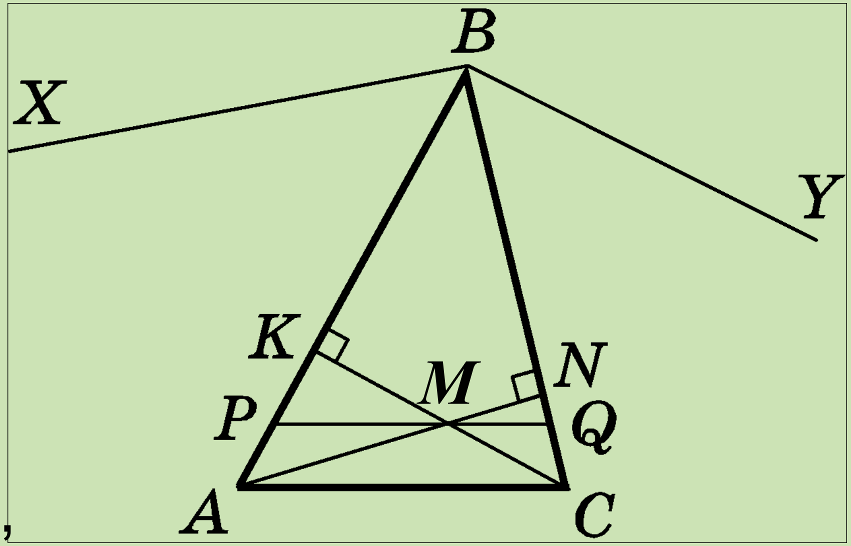
Углы со взаимно перпендикулярными сторонами равны, если они оба тупые или оба острые. Если один из этих углов острый, а другой тупой, то сумма их градусных мер равна 180°. Поэтому если угол *B* острый и равен 30°, то угол *AMC* тупой и равен 150°.

Задача 1. Высоты треугольника *ABC*, проведенные из вершин *A* и *C*, пересекаются в точке *M*. Найдите угол *AMC*, если угол *A* равен 70°, а угол *C* равен 80°.

Решение.

Способ 7

Через вершину *B* проведем лучи *BX* || *NA* и *BY* || *KC*. Величина угла между этими лучами равна величине угла *AMC*. Поскольку углы *XBC* и *YBA* прямые, а угол *B* равен 30°, то углы *XBY* и *AMC* будут равны



60° + 30° + 60° = 150°.

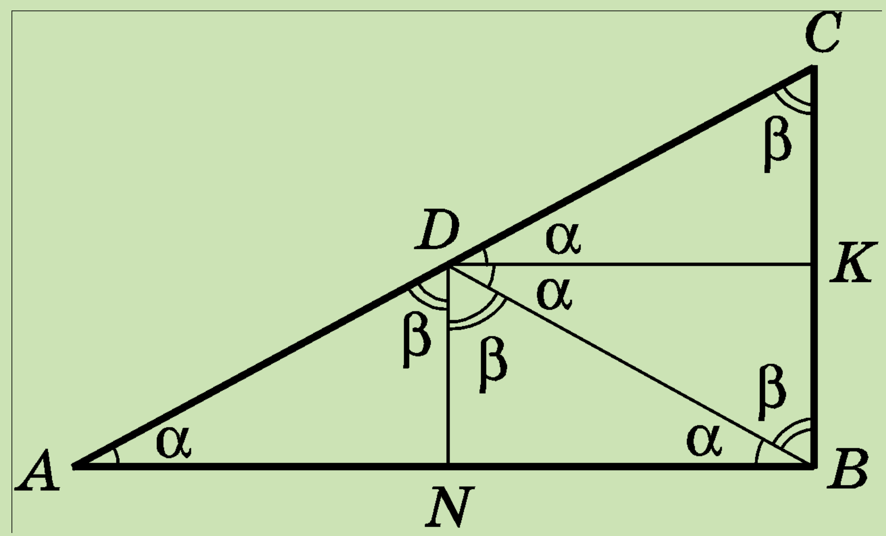
Задача 2. В треугольнике ABC медиана BD равна половине стороны AC. Найдите угол B треугольника ABC .

Решение.

Способ 1

В треугольнике ABC проведем среднюю линию DK. В равнобедренном треугольнике BDC медиана DK является одновременно и высотой, то есть DK и CB перпендикулярны.

По свойству средней линии треугольника $DK \parallel AB$, тогда и сторона AB перпендикулярна стороне CB, то есть угол B равен 90°.

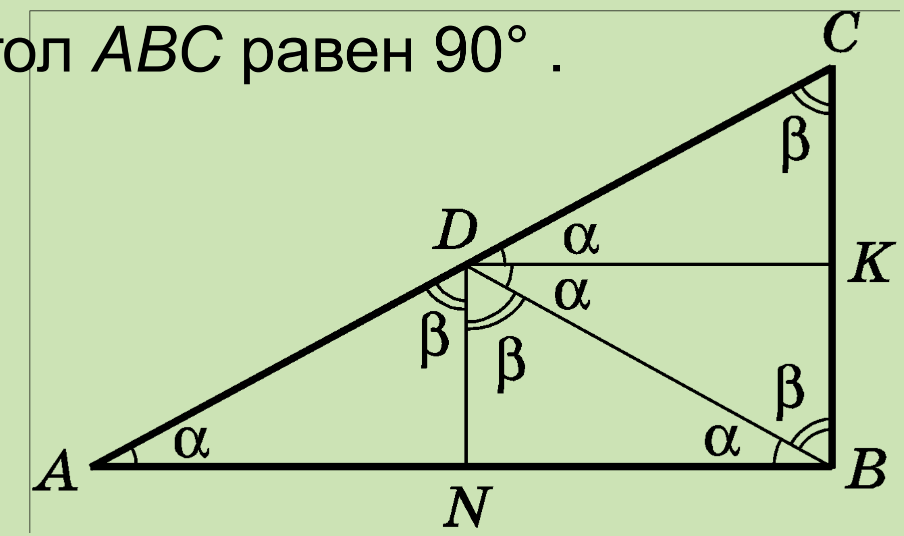


Задача 2. В треугольнике *ABC* медиана *BD* равна половине стороны *AC*. Найдите угол *B* треугольника *ABC*.

Решение.

Способ 2

Обозначим α угол *DAB*, β – угол *DCB*. По условию, *BD* = *AD* = *DC*, значит, угол *DBA* равен α,
угол *DBC* равен β. В треугольнике *ABC* $2\alpha + 2\beta = 180°$,
$\alpha + \beta = 90°$, следовательно, угол *ABC* равен $90°$.

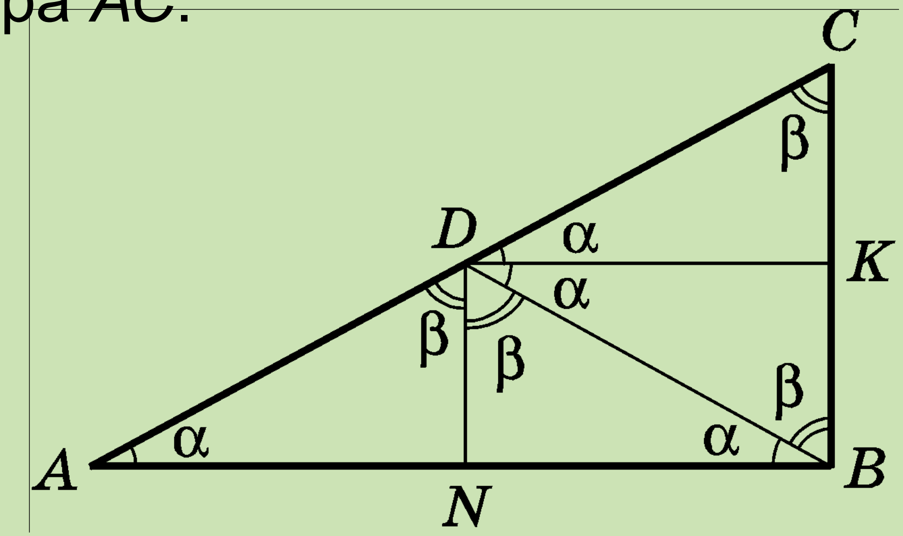


Задача 2. В треугольнике ABC медиана BD равна половине стороны AC. Найдите угол B треугольника.

Решение.

Способ 3

По условию, $DA = DB = DC$, значит, точки A, B и C принадлежат окружности с центром D. Тогда угол ABC будет равен 90° — по свойству вписанного угла, стороны которого проходят через концы диаметра AC.



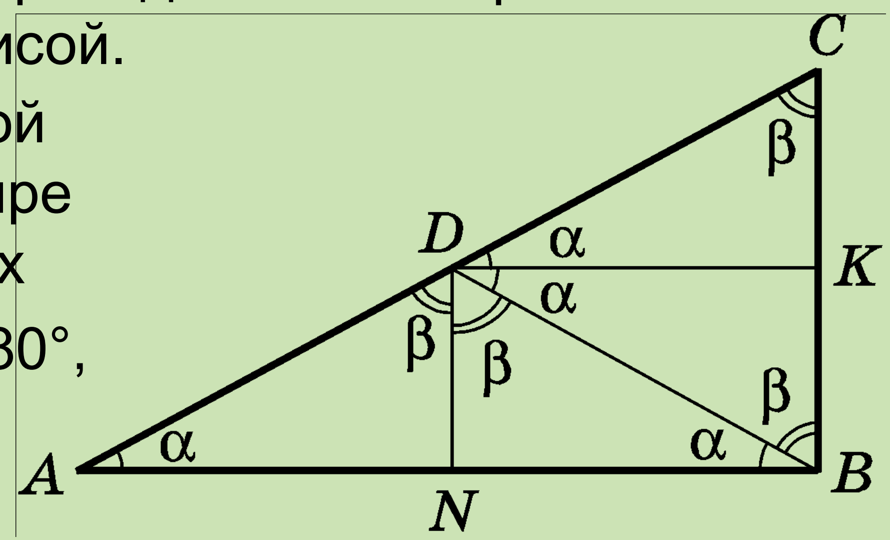
Задача 2. В треугольнике *ABC* медиана *BD* равна половине стороны *AC*. Найдите угол *B* треугольника.

Решение.

Способ 4

Пусть угол $A = \alpha$, угол $C = \beta$. Проведем *DK* и *DN* параллельно соответственно сторонам *AB* и *BC*. По теореме Фалеса, они окажутся средними линиями для треугольника *ABC*. Медиана равнобедренного треугольника, проведенная из вершины к основанию, является и биссектрисой.

При точке *D* на прямой *AC* в одной полуплоскости «скопилось» четыре попарно равных угла. Сумма всех четырех равна 180°, $2\alpha + 2\beta = 180°$, $\alpha + \beta = 90°$, следовательно, угол *ABC* равен 90°.

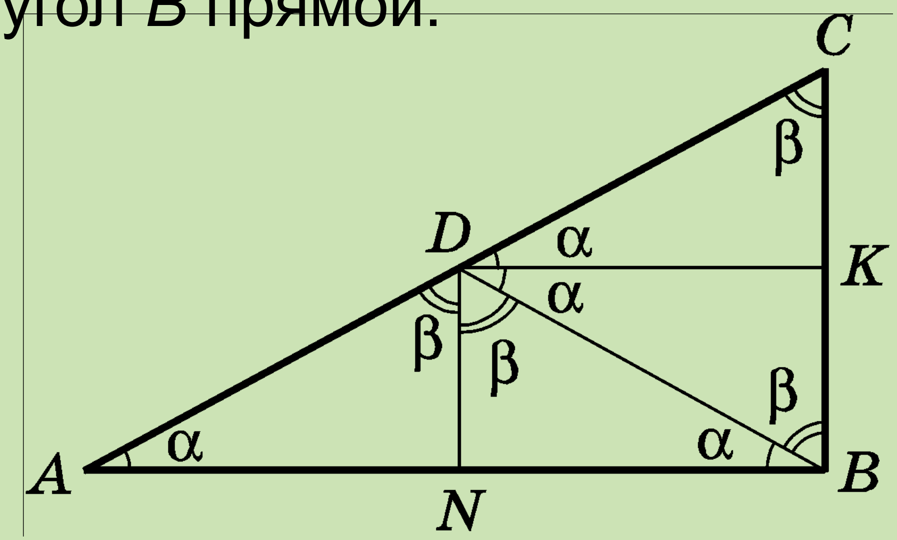


Задача 2. В треугольнике *ABC* медиана *BD* равна половине стороны *AC*. Найдите угол *B* треугольника.

Решение.

Способ 5

Продолжив *BD* за точку *D* и отложив от точки *D* отрезок *DE*, равный *BD*, получим четырехугольник *AECB*, у которого диагонали равны и в точке пересечения делятся пополам. По признаку прямоугольника, угол *B* прямой.



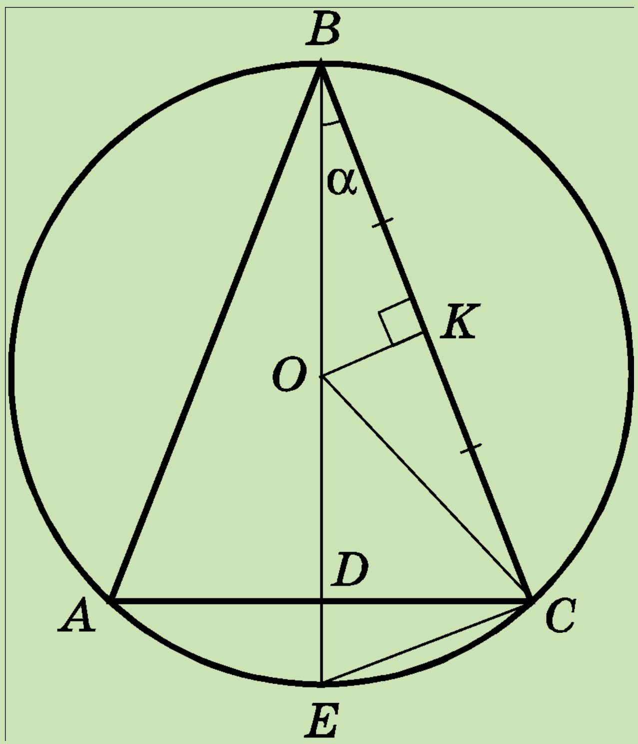
Задача 3. Найдите радиус R описанной окружности для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

Решение.

Способ 1

Проведя серединный перпендикуляр KO, получим точку O – центр описанной окружности ($BK = KC = 6{,}5$ см):
$OB = OC = R$, $OD = BD - OB = 12 - R$.
Из треугольника ODC, по теореме Пифагора, $OD^2 = OC^2 - DC^2 = R^2 - 5^2$, $R^2 - 5^2 = (12 - R)^2$. Решив это уравнение, получим:

$$R = \frac{169}{24} \text{ см.}$$



Задача 3. Найдите радиус *R* описанной окружности для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

Решение.

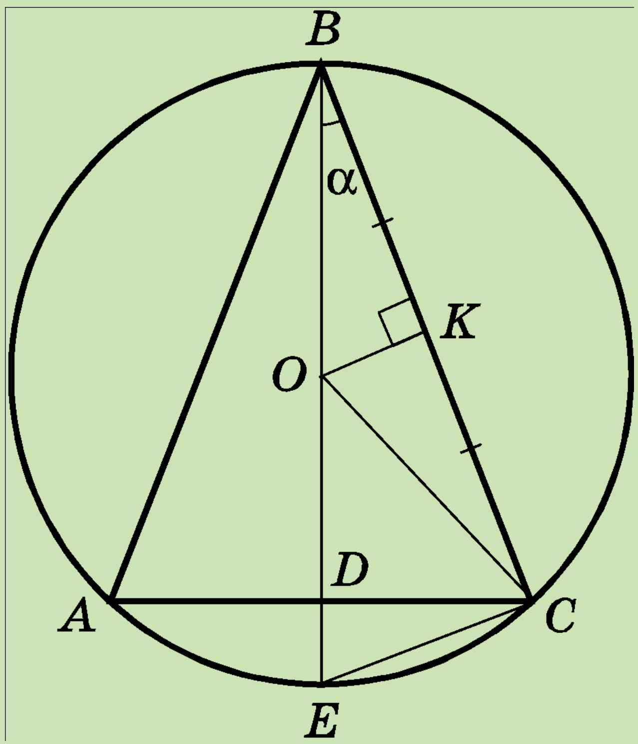
Способ 2

Пусть угол *DBC* равен α, тогда

$$\cos\alpha = \frac{BD}{BC} = \frac{12}{13}.$$

Из треугольника *OKB*

$$R = OB = \frac{BK}{\cos\alpha} = 6{,}5 : \frac{12}{13} = \frac{169}{24}$$ см.



Задача 3. Найдите радиус *R* описанной окружности для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

Решение.

Способ 3

Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру окружности, описанной около этого треугольника.

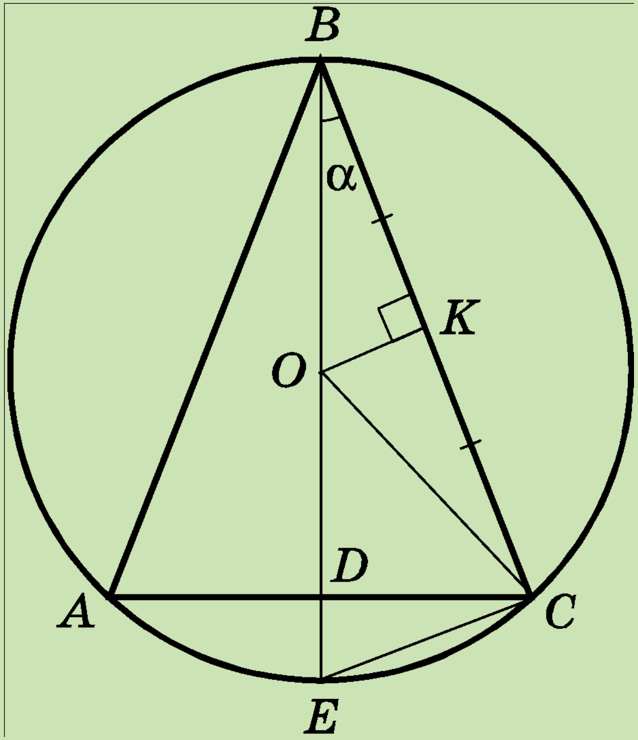
Из треугольника *DBC* имеем:

$$\sin\alpha = \frac{DC}{BC} = \frac{5}{13}, \ \cos\alpha = \frac{BD}{BC} = \frac{12}{13}.$$

Получим: $\frac{AC}{\sin 2\alpha} = 2R,$

где $\sin 2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha = \frac{120}{169},$

$$2R = 10 : \frac{120}{169}, \quad R = \frac{169}{24} \text{ см.}$$



Задача 3. Найдите радиус *R* описанной окружности для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

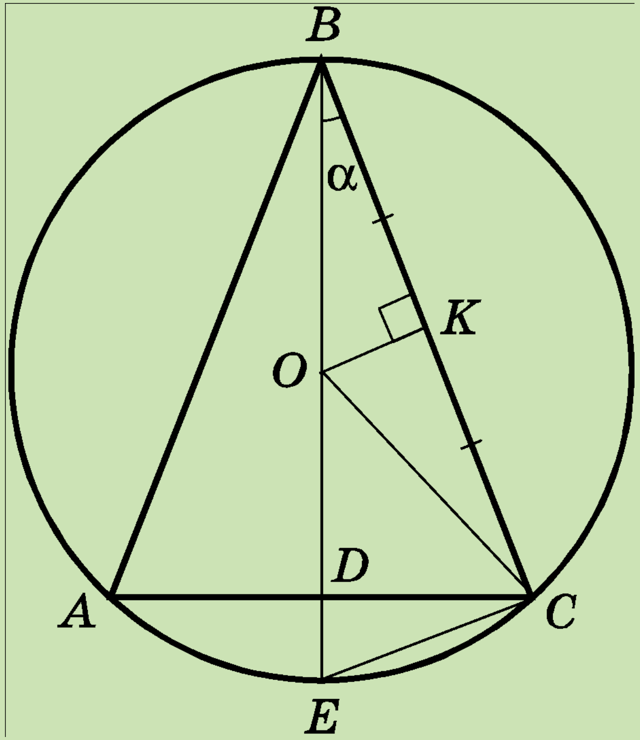
Решение.

Способ 4

Из подобия треугольников *OBK* и *CBD* имеем:

$$\frac{OB}{CB} = \frac{BK}{BD}, \quad \frac{R}{13} = \frac{6,5}{12}.$$

Отсюда $R = \dfrac{169}{24}$ см.



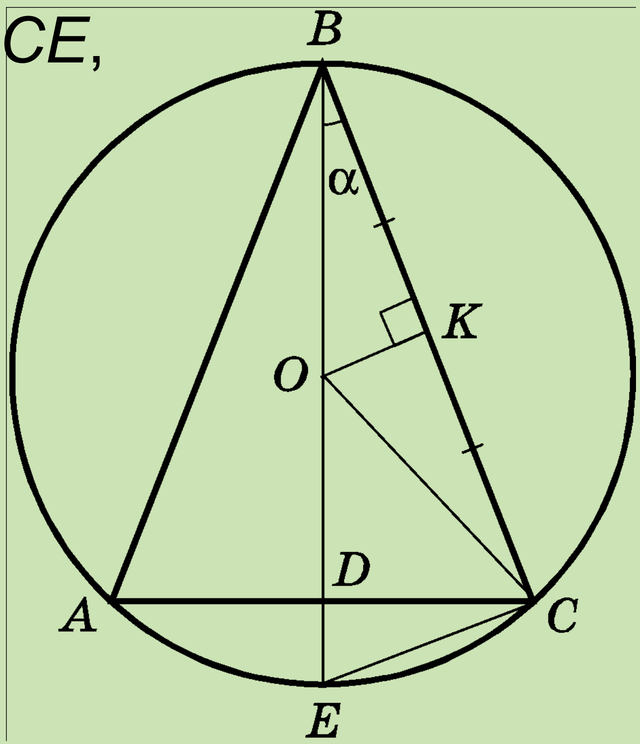
Задача 3. Найдите радиус R описанной окружности для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

Решение.

Способ 5

Продолжим BD до пересечения с описанной окружностью, получим прямоугольный треугольник BCE, откуда $BC^2 = BD \cdot BE$, $13^2 = 12 \cdot 2R$.

Отсюда радиус равен $\frac{169}{24}$ см.



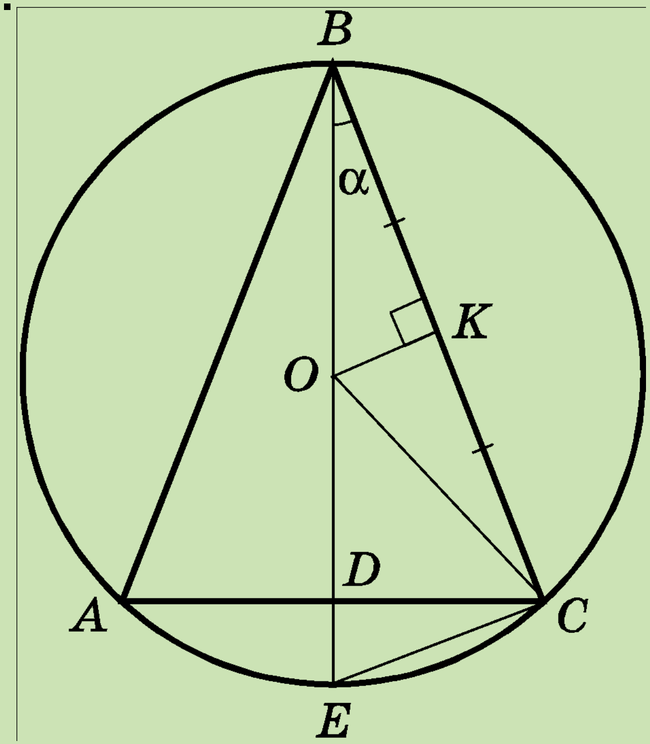
Задача 3. Найдите радиус R описанной окружности для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

Решение.

Способ 6

По свойству хорд, пересекающихся внутри круга,
$BD \cdot DE = AD \cdot DC$, $12 \cdot (2R - 12) = 5 \cdot 5$.
Решив это уравнение, получим:

$$R = \frac{169}{24} \text{ см.}$$



Задача 3. Найдите радиус *R* описанной окружности для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

Решение.

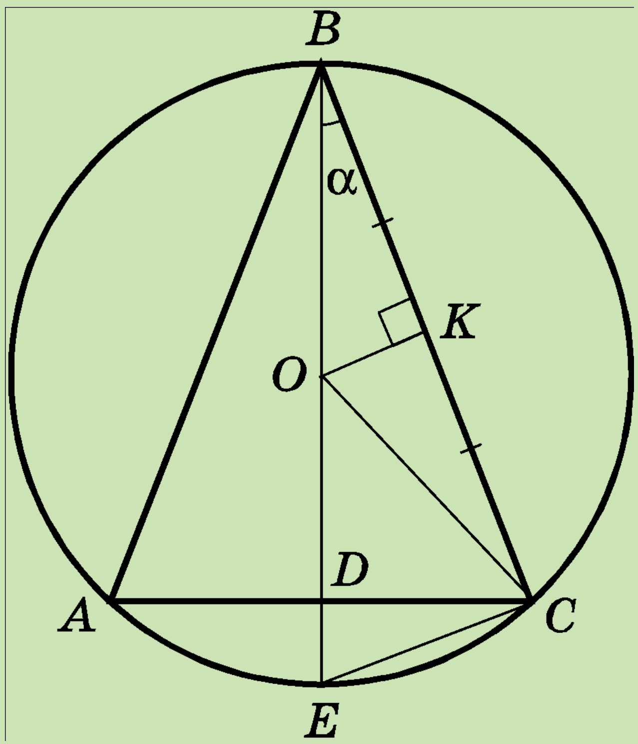
Способ 7

Внешний угол треугольника *BOC* равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

Угол *DOC* имеет величину 2α.

$$OC = DC : \sin 2\alpha = 5 : \frac{120}{169}.$$

Имеем $R = \frac{169}{24}$ см.



Задача 4. Найдите радиус r вписанной окружности для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

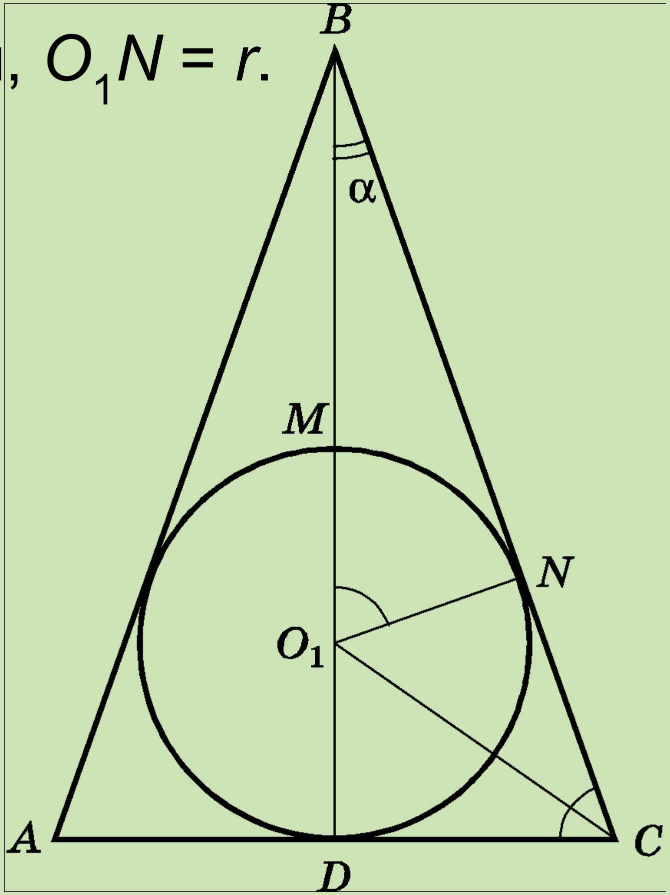
Решение.

Способ 1

Точка O_1 – центр вписанной окружности, $O_1N = r$.
В треугольнике BNO_1

$$O_1N = r = BO_1 \cdot \sin\alpha,$$

то есть $r = (12 - r) \cdot \frac{5}{13}$, $r = \frac{10}{3}$ см.



Задача 4. Найдите радиус r вписанной окружности для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

Решение.

Способ 2

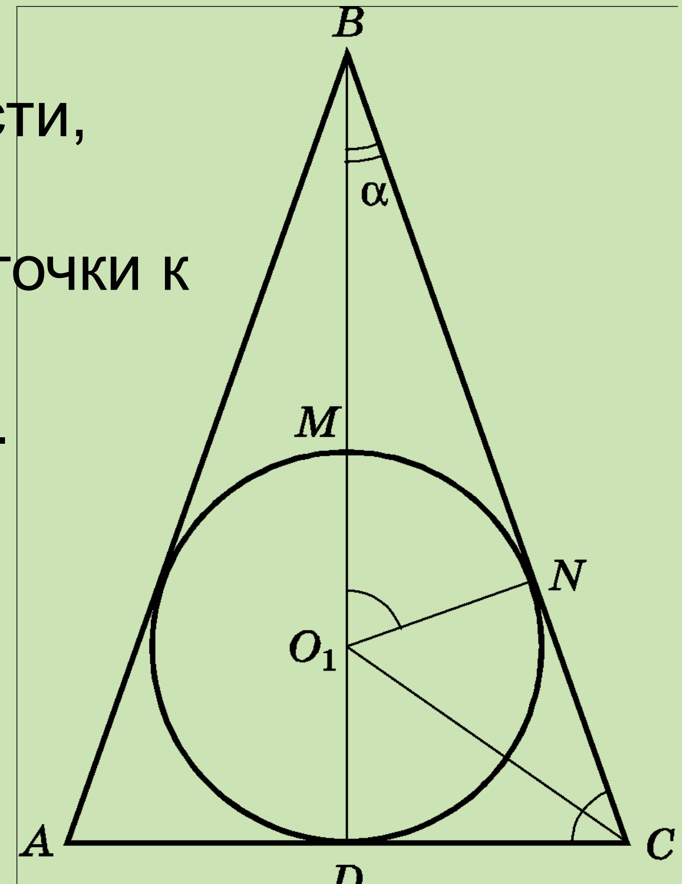
Точка O_1 – центр вписанной окружности, $O_1N = r$. $DC = CN = 5$ см, по свойству касательных, проведенных из одной точки к одной окружности.

$BN = 13 – 5 = 8$ см, $BO_1 = 12 – r$.

По теореме Пифагора для треугольника BNO_1

$$r^2 = (12 – r)^2 – 8^2,$$

откуда $r = \dfrac{10}{3}$ см.



Задача 4. Найдите радиус *r* вписанной окружности для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

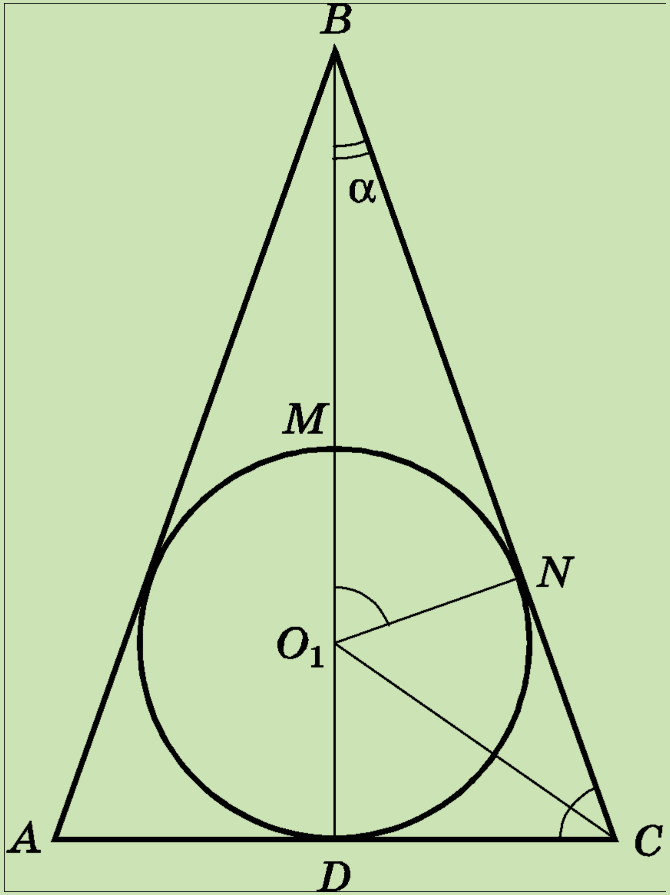
Решение.

Способ 3

$$r = \frac{2S}{a+b+c},$$

$$r = 2 \cdot \frac{60}{13+10+13},$$

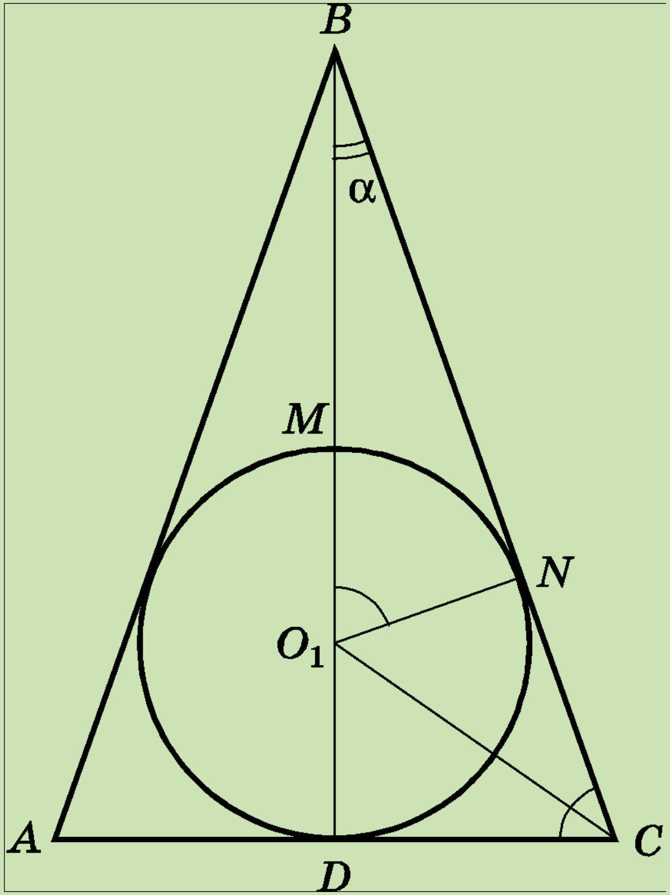
$$r = \frac{10}{3} \text{ см.}$$



Задача 4. Найдите радиус r вписанной окружности для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

Решение.

Способ 4



Из треугольника BNO_1 имеем:

$$r = O_1N = BN \cdot tg\,\alpha.$$

Из треугольника BDC $tg\,\alpha = \frac{5}{12}$,

поэтому $r = 8 \cdot \frac{5}{12} = \frac{10}{3}$ см.

Задача 4. Найдите радиус *r* вписанной окружности для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

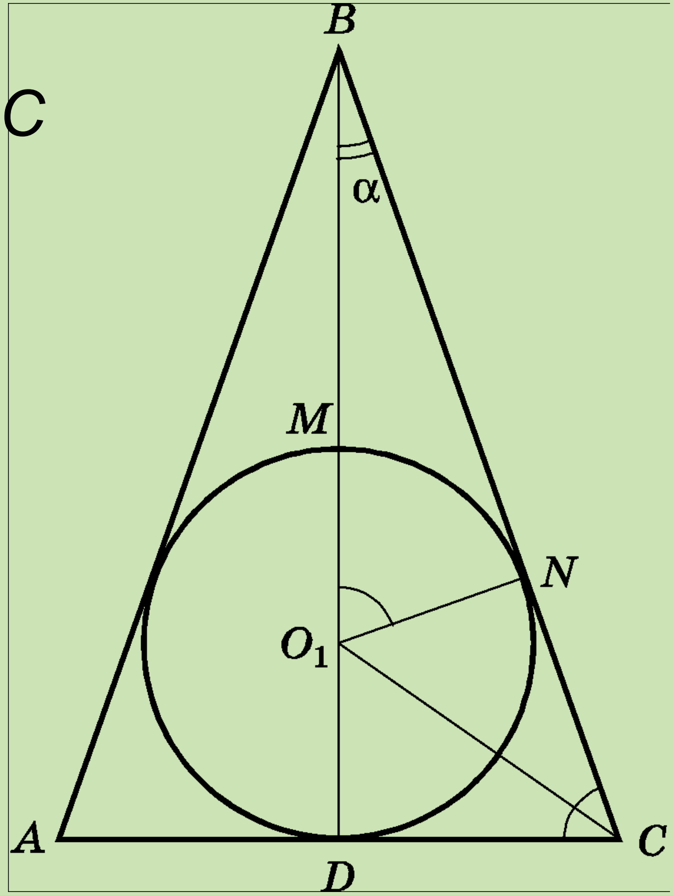
Решение.

Способ 5

Из подобия треугольников BNO_1 и BDC следует, что

$$\frac{BO_1}{BC} = \frac{BN}{BD}, \quad \frac{12 - r}{13} = \frac{8}{12},$$

$$r = \frac{10}{3} \text{ см.}$$



Задача 4. Найдите радиус *r* вписанной окружности для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

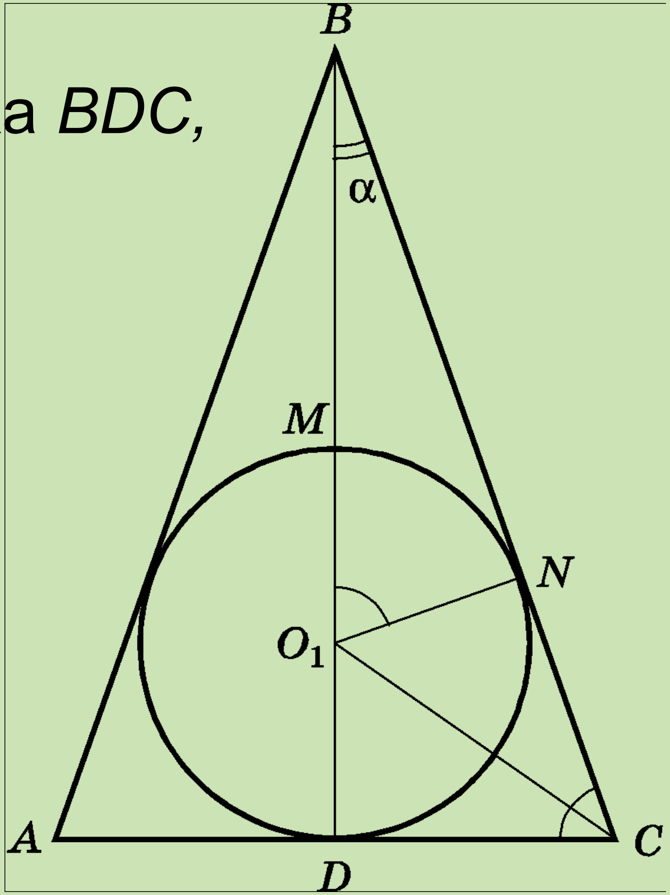
Решение.

Способ 6

По свойству биссектрисы треугольника *BDC*, имеем:

$$\frac{CD}{CB} = \frac{DO_1}{BO_1}, \quad \frac{5}{13} = \frac{r}{12-r},$$

тогда получим $r = \dfrac{10}{3}$ см.



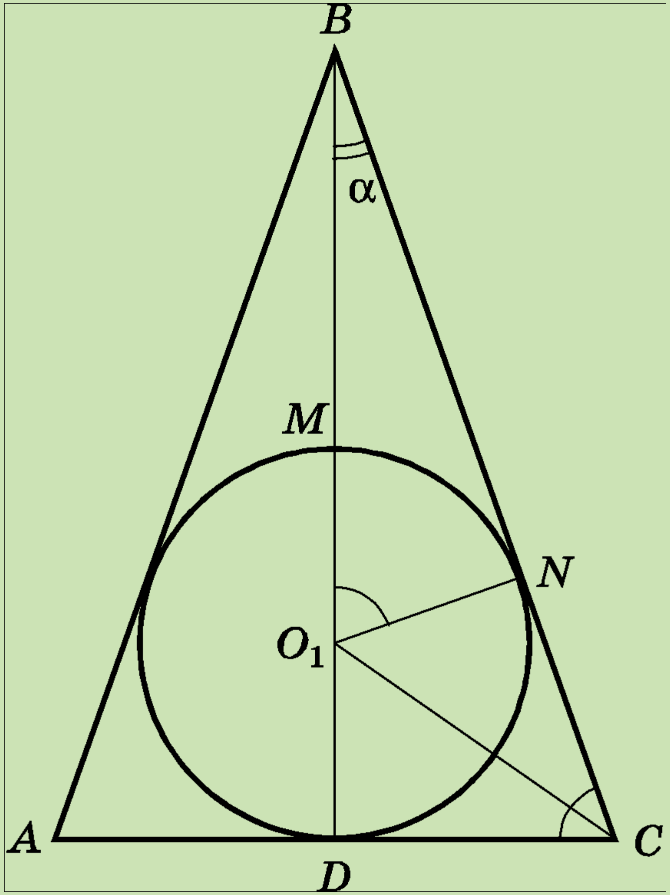
Задача 4. Найдите радиус *r* вписанной окружности для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

Решение.

Способ 7

По свойству касательной и секущей, проведенных из одной точки к одной окружности: $BN^2 = BD \cdot BM$,
то есть $8^2 = 12 \cdot (12 - 2r)$.

Откуда $r = \dfrac{10}{3}$ см.



ЗАДАЧА 5

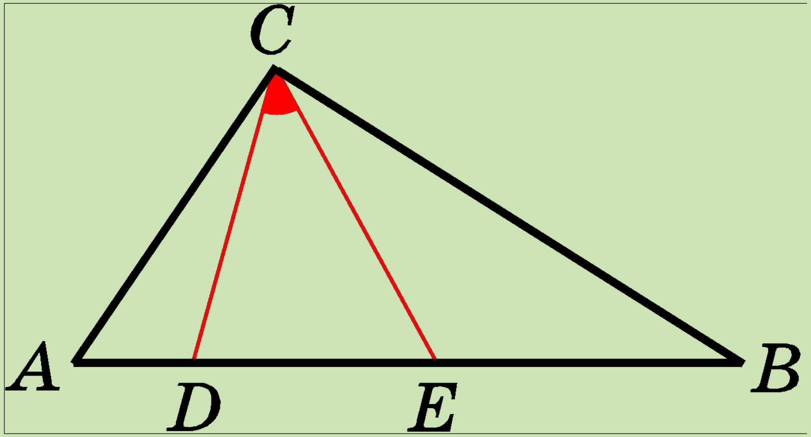
В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB взяты точки E и D так, что $AE = AC$, $BD = BC$. Доказать, что $\angle DCE = 45°$.

Способ 1.

Треугольники *ACE* и *BCD* — равнобедренные, поэтому

$$\angle CEA = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}, \angle CDE = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}.$$

Тогда $\angle DCE = 180^\circ - \left(180^\circ - \frac{\angle A}{2} - \frac{\angle B}{2}\right) = \frac{1}{2}\angle ACB = 45^\circ.$



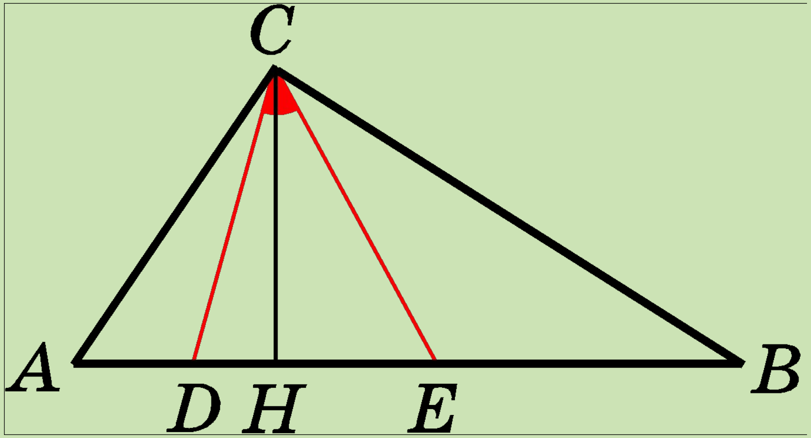
Способ 2.

Проведем высоту *CH*. Так как треугольники *ACH* и *BCH* подобны, то $\angle A = \angle HCB$. Треугольник *DBC* — равнобедренный, поэтому $\angle CDB = \angle DCB$.

Тогда $\angle A + \angle ACD = \angle HCB + \angle DCH$, $\angle ACD = \angle DCH$, а *CD* — биссектриса угла *ACH*. Аналогично, *CE* — биссектриса угла *HCB*.

Следовательно,

$$\angle DCE = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

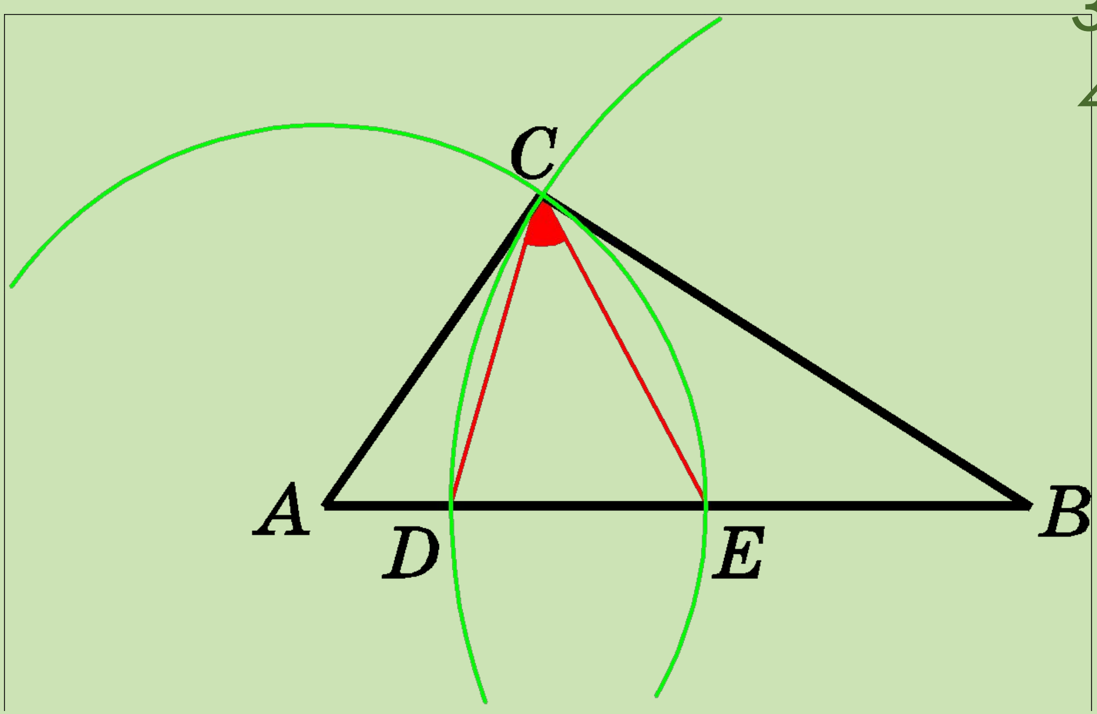


Способ 3.

Проводим окружности с центрами в точках *A* и *B*. Тогда

$$\angle ECB = \frac{\angle A}{2}, \angle ACD = \frac{\angle B}{2},$$

$$\angle ECB + \angle ACD = \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} = 45°.$$



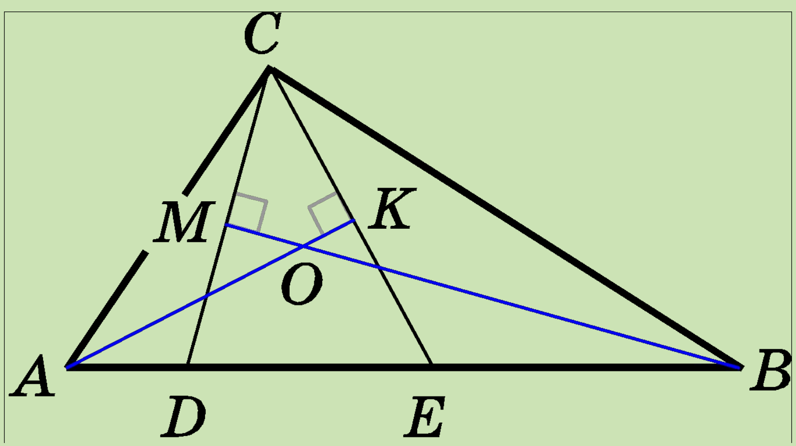
Значит,
$\angle DCE = 90° – 45° = 45°.$

Способ 4.

1. Проведем биссектрисы углов *A* и *B* в равнобедренных треугольниках *ACE* и *CBD*. *AK* и *BM* являются высотами.

2. $\angle AOB = \angle MOK = 90° + \dfrac{90°}{2} = 135°.$

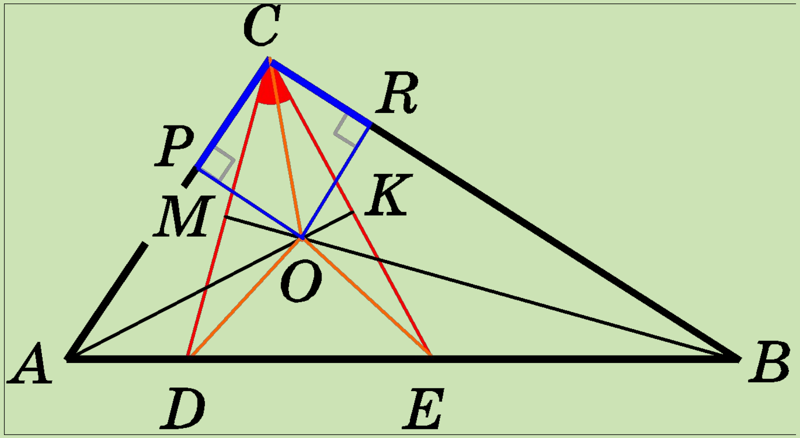
Тогда $\angle DCE = 180° - 135° = 45°$.



Способ V

1. Проведем медианы AK и BM в равнобедренных треугольниках AEC и BDC.
2. Точка O — центр описанной окружности около треугольника DCE и центр вписанной в треугольник ACB окружности.
3. Проведем радиусы OP и OR. Четырехугольник $OPCR$ — квадрат со стороной r, тогда

$$OC = OD = OE = \sqrt{2}r.$$

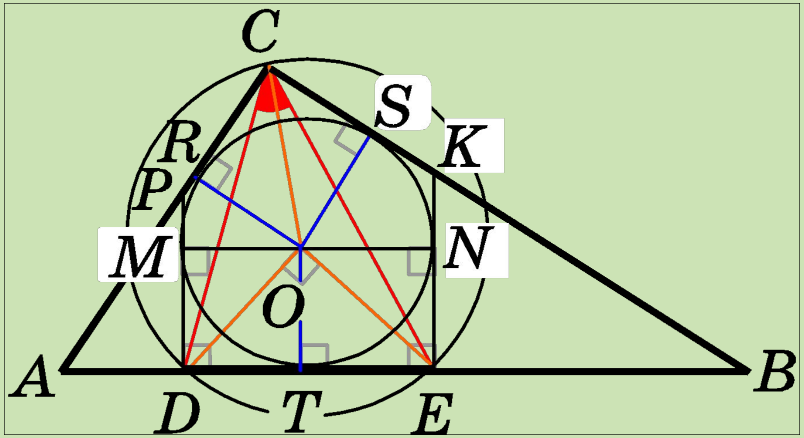


4. В треугольнике DOE $DE = 2r$, $DO^2 + OE^2 = DE^2$, след., треугольник DOE — прямоугольный и $\angle DOE = 90°$, значит, $\angle DCE = 45°$.

Способ 6

1. Впишем окружность в треугольник *ACB*.
2. *PM* и *KN* — касательные к окружности, причем $PM \perp AB$ и $KN \perp AB$, $PM \cap AB = D$ и $KN \cap AB = E$.
3. Проведем радиусы *OT* + *OR* = *OS* = *r*, тогда

$$OC = OD = OE = \sqrt{2}r.$$



4. Опишем окружность около треугольника *DCE* с центром *O* и радиусом *OC*.
5. Тогда $\angle DOE$=45°+45°= 90° =$\smile DE$,

$$\angle DCE = \frac{\smile DE}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

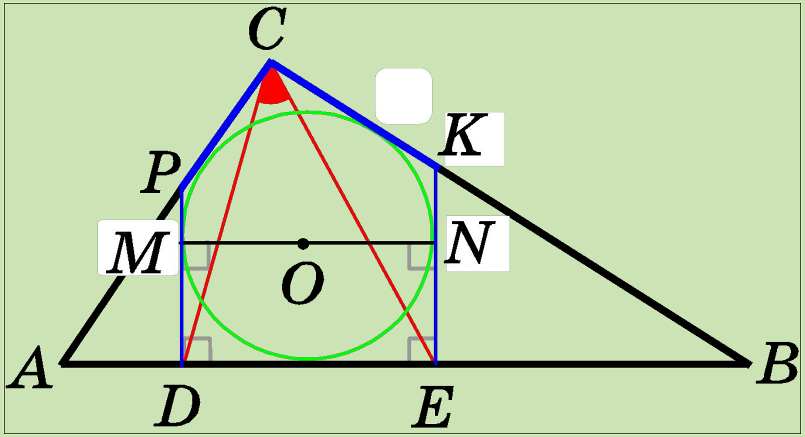
Способ 7.

1. Треугольники *CKE* и *CPD* — равнобедренные, *CK* = *KE* и *DP* = *PC*.

2. $\angle ECK = \dfrac{180^\circ - \angle CKE}{2} = \dfrac{180^\circ - (90^\circ + \angle B)}{2} = 45^\circ - \dfrac{\angle B}{2}.$

Аналагично, $\angle DCP = 45^\circ - \dfrac{\angle A}{2}$, тогда

$$\angle DCE = 90^\circ - \left(45^\circ - \frac{\angle B}{2}\right) - \left(45^\circ - \frac{\angle A}{2}\right) = \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle A}{2} = 45^\circ.$$



ЗАДАЧА 6.

В прямоугольный треугольник вписана окружность, перпендикулярно гипотенузе проведены касательные, пересекающие гипотенузу в точках D и E. Под каким углом отрезок DE виден из вершины прямого угла?