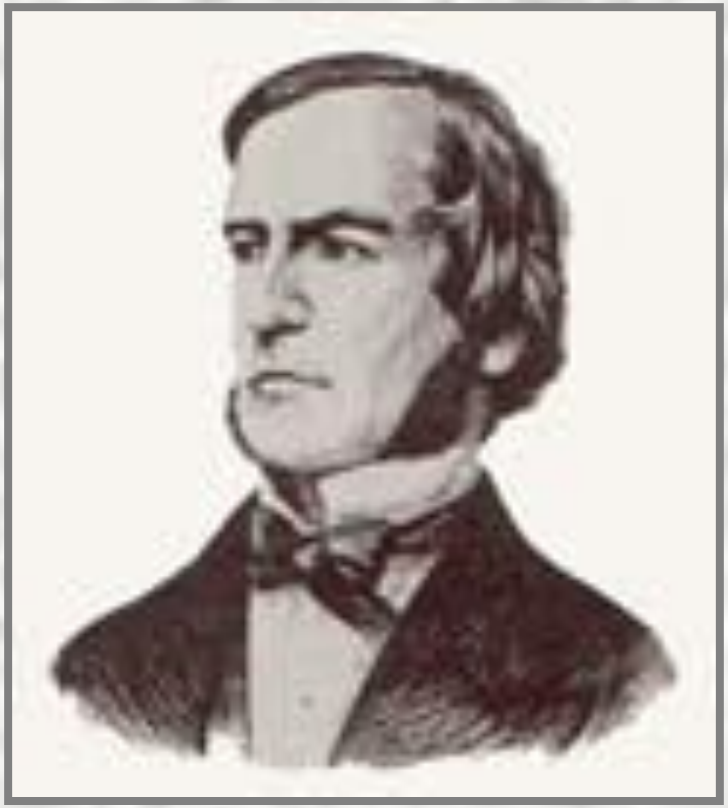
Основы логики

*

Логика – это наука о формах и способах мышления



Джордж Буль
(1815-1864)
основоположник математической логики

Содержание

1. Формы мышления

Основные формы мышления:

1. **Понятие**
2. **Высказывание (суждение)**
3. **Утверждение, рассуждение**
4. **Умозаключение**
5. **Логич выражение**

1.1. Понятие

Понятие – это форма мышления, отражающая основные, наиболее существенные свойства объекта , отличающие его от других предметов (цветы, тетрадь)   (Имеет содержание и объем.)

Понятие

Содержание

Объем

Совокупность существенных признаков объекта

Совокупность предметов, на которую распространяется понятие

содержание

1.2. Высказывание

Суждение – это форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается о свойствах реальных предметов и отношениях между ними.

Высказывание – суждение в математической логике

Высказывание может принимать только ***2 значения***: истина ~ ложь, да ~ нет, 1 ~ 0, вкл ~ выкл.

Высказывание является повествовательным предложением.

Высказывание

Истинное

Ложное

Связь понятий правильно отражает свойства и отношения реальных вещей

Высказывание не соответствует реальной действительности

Какие из предложений являются высказыванием?

Число 6 четное
Все роботы машины
Кошки дружат с собаками
Все моряки умеют плавать
$X^3 > 3$
Все ананасы вкусные
Гречневая каша самая вкусная
Овсяная каша очень полезная
Весна самое приятное время года
Можно самим сделать золото
Можно сделать вечный двигатель
Тигр ласковое животное
Мой кот забияка

посмотри на доску
кто отсутствует
вырази 1час в минутах
посмотри направо
чему равен путь от Земли до М
надо хорошо подготовиться к эк

содержание

Определи истинность высказываний

1. **Париж - столица Франции.**
2. **Некоторые медведи живут на севере.**
3. **2 + 2 = 7**
4. **Некоторые дети – ученики.**
5. **«А» - последняя буква алфавита.**
6. Лед – это твердое состояние воды =1
7. **Париж – столица Китая = 0**
8. **Все рыбы умеют плавать = 1**
9. **Буква а – согласная = 0**
10. **Белый медведь – бурый = 1**
11. **Человек произошел** от обезьяны+от свиньи+стрекозы+человека

содержание

Простые и сложные высказывания

Лог высказывание

Простое | **Составное**

Обоснование истинности или ложности простых высказываний решается вне алгебры логики, устанавливается законами наук (сумма углов Δ-ка).
Истинность сложных высказываний устанавливает алгебра логики.

<u>*Пр*</u>: Если наступает зима, то природа засыпает.

содержание

1.3. Утверждение

Утверждение – суждение, которое требуется доказать или опровергнуть

Рассуждение – цепочка высказываний или утверждений, определенным образом связанных друг с другом

содержание

1.4. Умозаключение

Умозаключение – это форма мышления, с помощью которой из одного или нескольких суждений (посылок) может быть получено новое суждение (заключение).

Посылки – только истинные суждения.

Пр: Литий – металл (=истина), литий – простое вещество (=истина); значит металл – это простое вещество.

Самая короткая дорога опасная; самая длинная дорога безопасная; значит длинная дорога самая короткая.

содержание

1.5. Логическое выражение

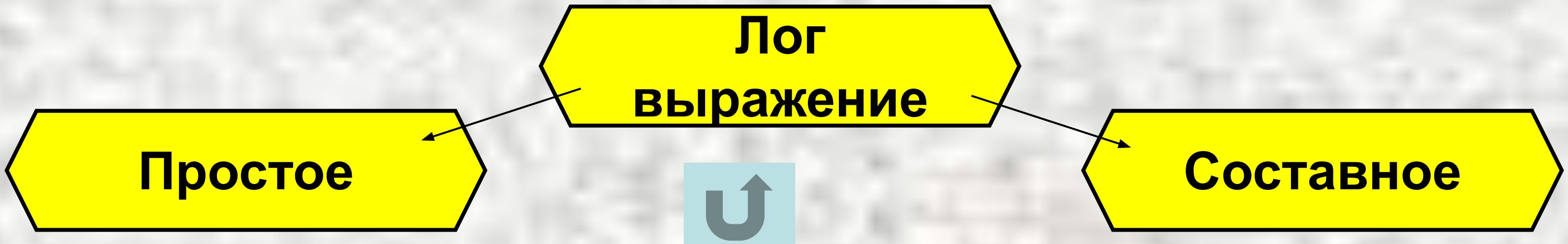
утверждение, состоящее из постоянных и обязательно переменных величин (объектов).

В зависимости от значений этих переменных логическое выражение может принимать одно из двух возможных значений: ИСТИНА (логическая 1) или ЛОЖЬ (логический 0)

Сложное логическое выражение

состоит из одного или нескольких простых (или сложных) логических выражений, связанных с помощью логических операций.

***Пр*: Если x ≠ 0, то операция деления имеет значение**



содержание

2. Алгебра высказываний

Алгебра высказываний служит для определения истинности или ложности составных высказываний (смысловое содержание простых высказываний не учитывается).

Логическая переменная – логич высказывание, обозначенное прописными буквами латинского алфавита, которые м принимать лишь 2 значения: истина(1) и ложь(0)

Например: A = у кошки 4 ноги; B = на яблонях растут бананы; C = не существует лжи во спасение. A=1, B=0, C=1.

Высказывания могут быть простыми и сложными.

Опр.: Высказывание явл простым, если никакая его часть сама по себе не является высказыванием.

Простое высказывание состоит из 3х элементов: субъекта, квантора и связки. *Пр*.: ПК состоит из МП, ОП, УВВ. $X^3 > 3$

Все 3 элемента простого высказывания – это математические или повествовательные величины, связанные сравнением. Результат их сравнения – логическая константа 1 ~ 0 и появление логического высказывания.

Опр.: сложные высказывания (выражения) состоят из простых (или сложных) высказываний, объединенных логическими операциями.

Основные логические операции: И, ИЛИ, НЕ (если то, тогда и только тогда, не смотря на, только, если то и не).

Пр: А=Петров - врач, В=Петров - шахматист.

Составные высказывания -

С=А*В=Петров - врач и шахматист

С=А+В=Петров - врач, хорошо играющий в шахматы.

С=А$\Rightarrow$В=Если Петров врач, то он играет в шахматы.

содержание

Логические операции

Логические операции задаются таблицами истинности и иллюстрируются диаграммами Эйлера-Венна.

2.1. Логическое умножение (конъюнкция)

Объединение двух (или нескольких) высказываний в одно с помощью союза «**и**».
Составное высказывание истинно только тогда, когда истинны оба простых высказывания.

Соответствует союзу И В алгебре множеств это пересечение

Обозначение *, & , ^, И, and **F = A * B**

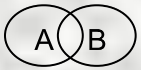


Таблица истинности

A	B	A&B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Пр.: ● А = высота шкафа меньше высоты двери, В = ширина шкафа меньше ширины двери, С = шкаф можно внести в дверь если А=В=1 ~шкаф нельзя внести в дверь если ~А~В=0

● Число 6 делится на 2 и на 3 = 1, на 5 и на 3 = 0

● Ложка дегтя портит бочку меда = 1 раз солгавший – лжец.

2.2. Логическое сложение (дизъюнкция)

Объединение двух (или нескольких) высказываний в одно с помощью союза «**или**».
Составное высказывание истинно только тогда, когда истинно хотя бы одно из двух простых высказывания.

Соответствует союзу ИЛИ В алгебре множеств это объединение

Обозначение +, V, ИЛИ, or **F = A + B**

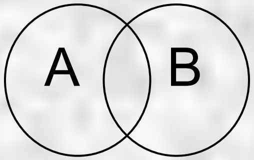


Таблица истинности

A	B	AvB
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Пр.: ●C=A∨B = в дверь видно более 2х сторон шкафа, если ~A~B~AиB=1
●Если проводник из меди или железа, то он проводит ток .
●Ложь рядом с вами не может сделать вас лжецом.

2.3. Логическое отрицание (инверсия)

Присоединение частицы «не» к высказыванию.
Инверсия делает истинное высказывание ложным и, наоборот.

Соответствует союзу НЕ

Обозначение $\bar{A}$, ¬A, НЕ, not A

F = ¬ A

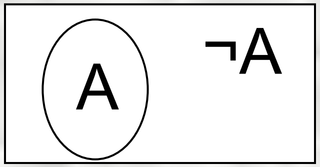


Таблица истинности

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

П*р*: C = ¬A = высота шкафа больше высоты двери
A=завтра будет снег →
C=завтра не будет снега.

2.4. Логическое следование (импликация)

Импликация образуется соединением двух высказываний в одно с помощью оборота речи «если…, то…».
Импликация ложна только тогда, когда из истинного первого высказывания (предпосылки) следует ложный вывод (второе высказывание).

Соответствует обороту Если…, то… (из А следует В)

Обозначение →, ⇨ В языках программирования if … then …

F = A → B

Пр.: С= (А) если идет дождь, то (В) на небе тучи.
С= если выглянет солнце, то светло.

● Импликация несимметрична, те А⇨В≠В⇨А , - если на небе тучи, то необязательно идет дождь

● Все пожилые люди пенсионеры, но не все пенсионеры пожилые люди

Таблица истинности

A	B	A→B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

2.5. Логическое равенство (эквивалентность)

Эквивалентность образуется соединением двух высказываний в одно с помощью оборота речи «… тогда и только тогда, когда …».

Составное высказывание, образованное с помощью логической операции эквивалентности истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания имеют одинаковое значение истинности - одновременно либо ложны, либо истинны.

Соответствует обороту **тогда и только тогда, когда …**

Обозначение **≡, ⇔, ~** $F = A \equiv B$

Таблица истинности

A	B	A~B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Пр: 3 больше 2 (**A**), а тигры полосатые (**B**).

содержание Логические операции

2.5. Логическое сложение по модулю 2 (исключающее ИЛИ)

Исключающее ИЛИ образуется соединением двух высказываний в одно с помощью оборота речи «… или один, или другой, но не оба вместе …».
Составное высказывание, образованное с помощью логической операции исключающее ИЛИ истинно тогда и только тогда, когда истинно только одно высказывание.

Соответствует обороту **или один, или др, но не оба вместе**

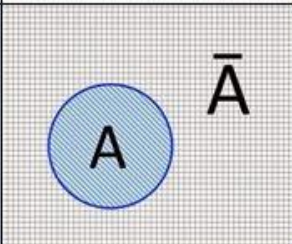
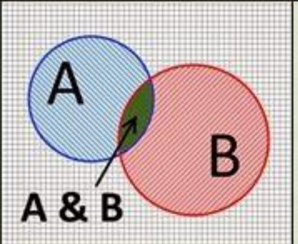
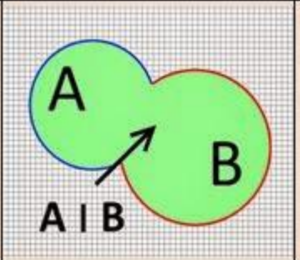
Обозначение **□, XOR,** **F = A□B**

Таблица истинности

A	B	A□B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

содержание Логические операции

Заполнить самостоятеьлно по ходу урока

<table>
<tr><th>№</th><th>Наименование операции</th><th>Обозначение</th><th>Диаграмма</th><th>Таблица истинности</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Инверсия
(логическое отрицание)</td><td>¬A
Ā
not A
НЕ A</td><td>
</td><td><table><tr><th>A</th><th>Ā</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Конъюнкция
(логическое умножение)</td><td>A ∧ B
A & B
A and B
A И B</td><td>
</td><td><table><tr><th>A</th><th>B</th><th>A ∧ B</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Дизъюнкция
(логическое сложение)</td><td>A ∨ B
A | B
A or B
A ИЛИ B</td><td>
</td><td><table><tr><th>A</th><th>B</th><th>A ∨ B</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Импликация
(логическое следование)</td><td>A ⇒ B
A → B</td><td></td><td><table><tr><th>A</th><th>B</th><th>A → B</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>5.</td><td>Эквиваленция
(логическая равнозначность)</td><td>A ≡ B
A ⇔ B
A ↔ B</td><td></td><td><table><tr><th>A</th><th>B</th><th>A ↔ B</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td></tr>
</table>

Основные операции алгебры логики в табл

x	y	x	y	$x \vee y$	$x \& y$	$x \oplus y$	$x \equiv y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$	$x \to y$	$y \to x$
0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1

3. Логические выражения

Логическое выражение – формула, в которую входят логические переменные и знаки логических операций.

Пример: $F = (A \vee B) \& (\overline{A} \vee \overline{B})$

Порядок (приоритет) выполнения логич операций в сложном логич выражении:

1. **инверсия**
2. **конъюнкция**
3. **дизъюнкция**
4. **импликация**
5. **эквивалентность**

Для изменения указанного порядка выполнения операций используются **скобки**

содержание

Найдите значения логических выражений

F = (0 v 0) v (1 v 1)	
F = (1 v 1) v (1 v 0)	
F = (0 & 0) & (1 & 0)	
F = ¬1 &(1 v 1) v (¬0 & 1)	
F = (¬1 v 1) & (1 &¬1) &(¬1 V 0)	

4. Таблицы истинности

Для логического выражения можно построить ***таблицу истинности***, которая определяет его истинность или ложность при всех возможных комбинациях исходных значений простых высказываний.

содержание

Построение таблицы истинности

1. Подсчитать кол-во переменных в выражении =n.
2. Число строк в таблице = 2^n + заголовок.
3. Кол-во столбцов = n + кол-во операций.
4. Ввести названия столбцов: сначала переменные, затем операции в соответствии с приоритетом.
5. Ввести наборы значений переменных.
6. Вычислить значения операций для всех наборов переменных.

Алгоритм заполнения *значений* *переменных*:

1. Разделить колонку 1ой переменной пополам, 1я часть = 0, 2я = 1.
2. Разделить колонку 2ой переменной на 4 ч и заполнить их 0,1,0,1
3. Продолжать деление последующих колонок соответственно на 8, 16, 32 … части и заполнять части последовательно 0, 1, 0, 1, …

Построение таблицы истинности

1. Определить кол-во строк в таблице по формуле 2^n, где n – кол-во логич переменных + 1 строка заголовка.
2. Определить кол-во столбцов таблицы: кол-во логич переменных + кол-во логич операций.
3. Построить таблицу истинности, обозначить столбцы, внести все наборы исходных данных логич переменных (по 0,5 столбика, снова по 0,5)
4. Заполнить таблицу истинности, выполняя базовые логические операции в необходимой последовательности.

<u>ПРИМЕР</u>: составить таблицу истинности для сложного логического выражения

$$F = (A \vee B) \,\&\, (\overline{A} \vee \overline{B})$$

1. **Кол-во строк таблицы 2^2 +1 = 5, тк в формуле две переменные А и В – два простых высказывания.**
2. **Кол-во столбцов: 2 переменные + 5 лог операций =7**

A	B	$A \vee B$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$	$(A \vee B) \,\&\, (\overline{A} \vee \overline{B})$
0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0

содержание

ПРИМЕР: составить таблицу истинности для сложного логического выражения

D = неA & (B+C)

1. Кол-во строк = 2^3 +2 = 10 (n=3, т.к. на входе три элеманта А, В, С) – три простых высказывания.
2. Кол-во столбцов: 3 переменные + 3 лог операции =6

A	B	C	E = не A	F = B+C	D = E&F
1	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	о	1	0	1	0
1	о	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0

содержание

<u>Самостоятельно</u>: составить таблицу истинности для сложного логич выражения

D = ((A v(B&(¬B)))->B)≡A

A	B	¬B	B&(¬B)	A v(B&(¬B))	(A v(B&(¬B)))->B	((A v(B&(¬B)))->B)≡A
1	o	1	o	1	1	1
1	1	o	o	1	1	1
o	o	1	o	o	1	o
o	1	o	o	o	1	o

содержание

Задание. **Составить таблицы истинности для сложных логич выражений**

$A\wedge(B\vee\neg B\wedge\neg C)$

а+(в+¬в⇨¬с)

а(в¬в⇨¬с)

а+(в+¬в)а+(в⇨с)

$x+z+(\neg y+x\neg yz)=x+z+\neg y$

Задание:

Дан фрагмент таблицы истинности логического выражения F от трех аргументов: X, Y, Z :

X	Y	Z	F
1	0	0	1
0	0	0	1
1	1	1	0

Какое выражение соответствует F?

1) ¬X & ¬Y & ¬Z   2)   X & Y & Z

3) X v Y v Z   4)   ¬X v ¬Y v ¬Z

Решение:

1. Нужно для каждого набора переменных X, Y и Z вычислить по таблице истинности все 4 значения функций, заданных в ответах, и сравнить результаты с соответствующими значениями F для этих данных в исходной таблице.

2. Если для какой-нибудь комбинации X, Y и Z результат не совпадает с соответствующим значением F, оставшиеся строчки можно не рассматривать, тк для правильного ответа все три значения F в исходной таблице должны совпасть со значениями вычисляемой функции F.

3. Правильный ответ – 4.

содержание

Равносильные логические выражения

Равносильные логические выражения - у которых последние столбцы таблиц истинности совпадают.
Обозначают “=“. A*B = B*A
Докажите равносильность выражений: $\overline{A}\&\overline{B}$ *и* $\overline{A\vee B}$

Таблица истинности для $\overline{A\vee B}$

A	B	AvB	$\overline{A\vee B}$
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

Таблица истинности для $\overline{A}\&\overline{B}$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}\&\overline{B}$
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

содержание

Докажи равносильность выражений:

A+B+C=B+C+A

ABC=BCA

A⇔B=¬A⇔¬B

(A+B)C=AC+BC

AB+C=(A+C)(B+C)

¬(A+B)=¬A¬B

¬(AB)=¬A+¬B

AB+¬AB=B

(A+B)(¬A+B)=B

¬A(A+B)=¬AB

A+¬AB=A+B

Тождественные логические выражения

Выражение называется тождественно ложным (истинным), если оно принимает значение 0 (1) на всех наборах, входящих в него простых высказываний.

$A \Rightarrow A = 1$

$A \wedge \neg A = 0$

$A \vee \neg A = 1$

$\neg(x \vee y) \wedge (x \wedge \neg y) = 0$

$\neg xy \vee \neg(x \vee y) \vee x = 1$

5. Домашнее задание

1. Даны высказывания:

A = «p делится на 5»

B = «p – нечетное число»

Найти множество значений *p* на диапазоне (0,15], при которых результат

а) дизъюнкции,

б) конъюнкции

будет:

1) истинным;
2) ложным.

2. Составьте и запишите истинные сложные высказывания из простых с использованием логических операций:

1) Неверно, что $10>Y>5$ и $Z<0$.
2) Любое из чисел X, Y,Z положительно.

3. Составьте таблицу истинности для логического выражения:

$F = (X \& \neg Y) \vee Z$

содержание

Доп дом задание

●какое тождество записано неверно x+¬x=1, x+x+x+x+x+x+x=1, xxxxxxx=1

●дай название лог выражению по таблице истинности
ав¬в+а¬а+вс¬с (=о, тождественно ложно)
ав¬с+авс+¬(а+в) (=1, тождественно истинно)

¬(¬аа)+в(ав+в) ав⇔(¬а+в) ¬((¬а+¬в)(¬в+с))+ ¬а+с (1)

ав(с+¬е+d) (¬в) а(в(¬а+¬в)) ¬((а→в) ⇔(¬в→¬а)) (0)

((¬а+¬в) →в)(¬а+в) (простое)

●дай название двум лог выражениям по таблицам истинности
(а+в)(¬в+а)(¬с+в) = а(¬с+в)

(а+в+с)а+в+с = ¬ав¬с (равносильные)

●докажи равносильность лог выражений
(а⇨в)(а+¬в) и (а⇔в)ав+¬а¬в

●выбрать высказывание, имеющее ту же таблицу истинности, что и не(не а и не (в и с)):

1) а и в или с и а 2) (а+в)(а+с) 3) а(в+с) 4) а+(¬в+¬с)

Проверь себя

- **Задание 1**
- **Задание 2**
- **Задание 3**
- **Задание 4**
- **Задание 5**

содержание

Задание 1

Расставь соответствующие номера

1. **Логика**
2. **Высказывание**
3. **Алгебра логики**
4. **Логическая константа**
5. **Дизъюнкция**
6. **Инверсия**
7. **Конъюнкция**
8. **Импликация**
9. **Эквивалентность**

A → B

Логическое сложение

Наука о формах и способах мышления

Логическое отрицание

ИСТИНА и ЛОЖЬ

A ↔ B

&

Наука об операциях над высказываниями

Повествовательное предложение, в котором что-либо утверждается или отрицается

содержание

Задание 2

Даны высказывания:

A = { 2 · 2 = 4 }

B = { 2 + 2 = 5 }

Определите истинность высказываний:

1. A
2. ¬B
3. A & B
4. B
5. ¬A
6. A v B

содержание

Задание 3

Заполните таблицу истинности для выражения:

X v Y & ¬Z

X	Y	Z	¬Z	Y&¬Z	**XvY&¬Z**
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

содержание

Задание 4

Заполните пустые ячейки таблицы истинности

A	B	¬B	AvB	¬(AvB)	¬B& ¬(AvB)
		1	0		
0		0		0	0
1		1		0	
1		0	1		0

содержание

Задание 5

Укажите логическое выражение, соответствующее высказыванию: «В субботу я поеду на дачу и, если будет жарко, то я пойду купаться».

A = «Я поеду на дачу»
B = «Будет жарко»
C = «Я пойду купаться»

1. $F = A \vee (B \rightarrow C)$
2. $F = (A \vee B) \rightarrow C$
3. $F = (A \,\&\, B) \rightarrow C$
4. $F = A \,\&\, (B \rightarrow C)$

содержание

Построить таблицу истинности по вариантам

1. $f(x1,x2,x3,)=x1x2 \vee (x1 \overline{\vee} x2)x3 \overline{\vee} x2x3$
2. $f(x,y,z) = \overline{(y \vee xz)} \ \overline{\vee} \ xy$
3. $f(a,b,c,d)=\overline{(ab \vee c)ab} \vee c\overline{d} \vee abc$
4. $y=\overline{bc \vee a(bc \vee \bar{b}c)}$
5. $f(x1,x2,x3,)=x1x2 \vee (\overline{x1} \vee \overline{x2})x3 \vee x4x3$
6. $f(x,y,z) = \overline{(x\bar{y} \vee xy\bar{z})}xy$
7. $f(a,b,c,d)=\overline{(ab \vee c)ab} \vee \bar{c}d$
8. $y=(ab)c \vee \overline{(}bc \vee a)$
9. $f(x1,x2,x3,)=x1x2 \vee (x1 \overline{\vee} x2)x3 \overline{\vee} x2x3$
10. $f(x,y,z) = \overline{(xy \vee xz)x} \vee z.$

Построить таблицу истинности по вариантам

11. $f(a,b,c,d)=\overline{(ab \lor c)}ab \lor \overline{a}bc$

12. $y=\overline{bc \lor a(bc \lor ac)}$

13. $f(x1,x2,x3,)=x1x2 \lor (\overline{x1}x2) \lor \overline{x3}$

14. $f(x,y,z) = \overline{(x\overline{y} \lor \overline{xz})} \lor xz$

15. $f(a,b,c)=\overline{(ab \lor c)ab} \lor c$

16. $y=(\overline{ab})c \lor (bc \lor a)$

17. $f(x1,x2,x3)=x1x2 \lor (x1x2)\overline{x3} \lor \overline{x2}x3$

18. $f(x,y,z) = \overline{(y \lor x\overline{yz})} \lor xy$

19. $f(a,b,c,d)=\overline{(ab \lor c)ab} \lor \overline{a}bc$

20. $y=\overline{bc \lor a(\overline{b}c \lor ac)}$

21. $f(x1,x2,x3,)=x1x2 \lor (\overline{x1}x2)x3 \lor \overline{x1}$

Построить таблицу истинности по вариантам

22. $f(x,y,z) = \overline{(\bar{x}y \vee xy\bar{z})xy}$

23. $f(a,b,c)=\overline{(ab \vee c)ab} \vee c$

24. $y=(a \vee b)c \,\overline{\vee}\, (bc \vee a)$