Лекція-2.1.
Тема:
«Зв'язаність графів. Шляхи, цикли ізоморфізм»

Зміст

Вступ

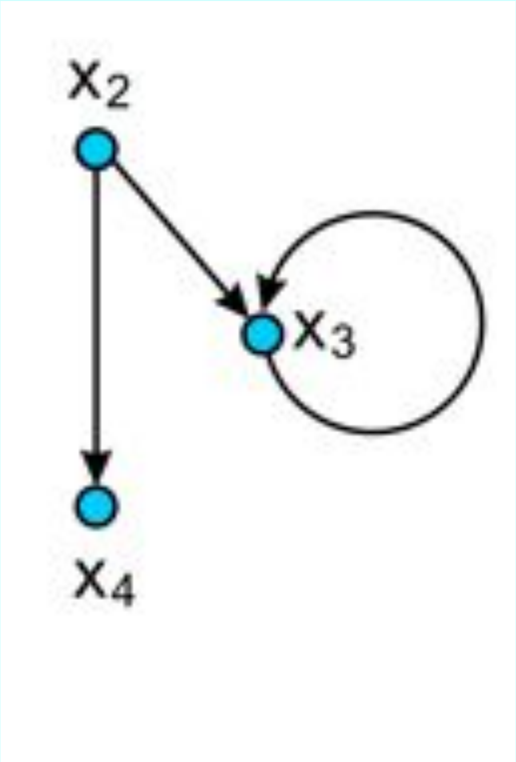
Теорія графів — одна з істотних частин математичного апарату інформатики та кібернетики. У термінах теорії графів можна сформулювати багато задач, пов'язаних із дискретними об'єктами. Такі задачі виникають у проектуванні інтегральних схем і схем управління, у дослідженні автоматів, в економіці й статистиці, теорії розкладів і дискретній оптимізації.

Шлях

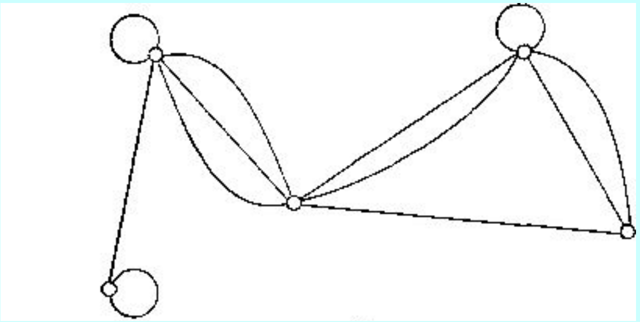
Шляхом довжиною r [52] із вершини u в вершину v в неорієнтованому графі називають послідовність ребер $e_1 = \{x_0, x_1\}$, $e_2 = \{x_1, x_2\}$, ..., $e_r = \{x_{r-1}, x_r\}$ де $x_r = v$, r — натуральне число. Отже, шлях довжиною r має r ребер, причому ребро враховують стільки разів, скільки воно міститься в шляху. Вершини v та е називають *крайніми*, а решту вершин шляху — *внутрішніми*.

Цикл

Циклом у неорієнтованому графі називають шлях, який з’єднує вершину саму собою, тобто $u = V$.



Теорема



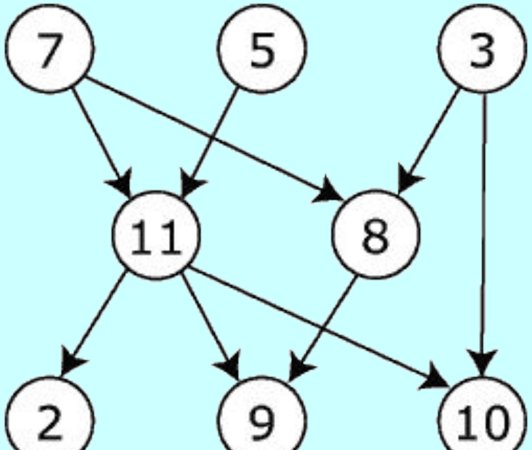
Між кожною парою різних вершин зв'язного неорієнтованого графа існує простий шлях.

Для орієнтованого графа вводять поняття *орієнтованого шляху* (або просто *шляху)* з вершини *u* у вершину *v*. Це скінченна послідовність дуг $e_1 = \{x_0, x_1\}$,

$e_2 = \{x_1, x_2\}$, ..., $e_r=\{x_r-_1 x_r\}$ де $x_0=u$, $x_г$-*u*.

Орієнтований граф

Орієнтованим графом називають пару *(V, E)*, де *V* — скінченна непорожня множина вершин, а £ множина впорядкованих гар елементів множини *V*.



Зв'язаність графів

Орієнтований граф називають *сильно зв'язним*, якщо для будь-яких його різних вершин *и* та *V* існують орієнтовані шляхи від *и* до *V* та від *її* до *и*. Позначають так: A=B

Орієнтований граф називають *слабко зв'язним*, якшо існує шлях між будь-якими двома різними вершинами у відповідному йому неорієнтованому графі (тобто без урахування напрямку дуг).

Ізоморфізм графів

У теорії графів і її застосуваннях істотно, що існують об’єкти (вершини графа) і зв’язки між ними (ребра). Тому доцільно не розрізняти графи, котрі можна одержати один з одного зміною позначень вершин. Сформулюємо ці міркування у вигляді наступного означення.

- Нехай $G_1 = (V_1, E_1)$ і $G_2=(V_2, E_2)$ прості графи, а φ: $V_x \rightarrow V_2$ — бієкція. Якщо для будь-яких вершин u та v графа G_1 їх образи φ(u) та φ(v) суміжні в G_2 тоді й лише тоді, коли u та v суміжні в G_1 то цю бієкцію називають *ізоморфізмом* графа G_1 на граф G_2, а графи G_1 G_2 — *ізоморфними.*
- *Отже,*

V $u, v \equiv v_1$ $(\{u, v\} \equiv E_1$ тоді й лише тоді, коли {φ(u), φ(v)} ≡ $E_2)$

Ізоморфні графи

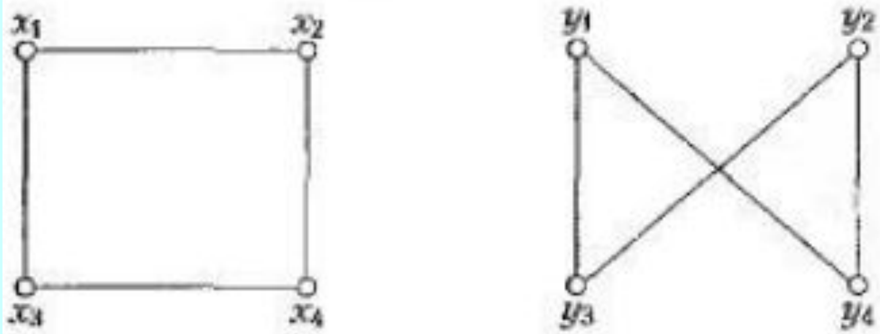


Рис. 3.24

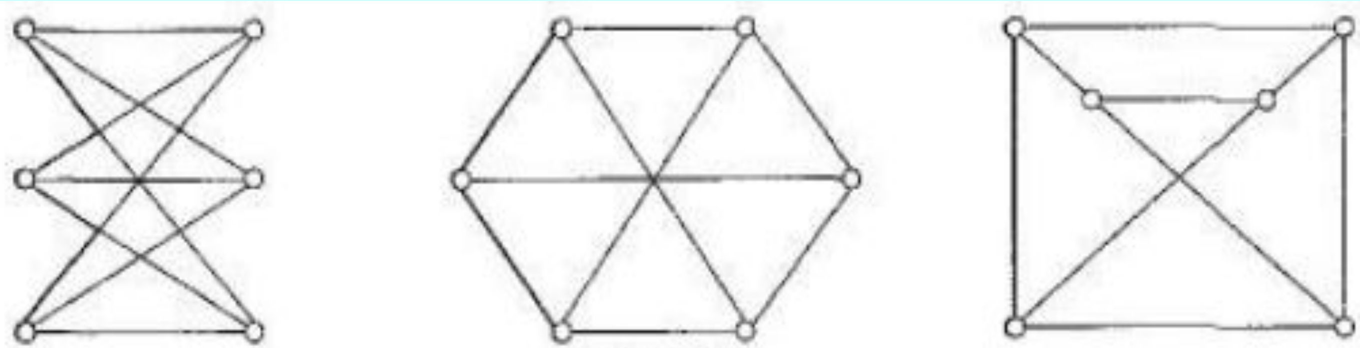


Рис. 3.25

Теорема

Прості графи ізоморфні тоді й лише тоді, коли їх матриці суміжності можна отримати одну з одної однаковими перестановками рядків і стовпців.

Виявити ізоморфізм дуже складно. Теоретично алгоритм перевірки пари простих графів на ізоморфізм існує, але він не зручний.

Проблема визначення

Часто неважко довести, що два прості графи не ізоморфні, якщо порушується ачастивість, інваріантна щодо ізоморфізму, наприклад:

- кількість вершин;
- кількість ребер;
- кількість вершин конкретного степеня (вершині

$v \equiv \mathrm{V}_{1,}$ $deg(v) = d,$ має відпо відати вершина

$u = \varphi(v) \equiv V_{2},$ $deg(u) = d.$

Є й інші інваріанти, але порушення інваріантності — це лише достатня умовг неізоморфності графів.

Висновки

- Отже, не існує набору інваріантів для виявлення ізоморфізму.
- Для сильної зв’язності орієнтованого графа має існувати послідовність дуг з урахуванням орієнтації від будь-якої вершини графа до будь-якої іншої.
- Шлях, буквально, - це послідовність ребер
- Між кожною парою різних вершин зв’язного неорієнтованого графа існує простий шлях.

Список літератури

- 1. Нікольський Ю. В. Дискретна математика/ Ю. В. Нікольський, В. В. Пасічник, Ю. М. Щербина. – Київ: Видавнича група BHV, 2007. – 367 с.