Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»
Кафедра прикладной математики

И.Г. Руцкова

Первообразная и неопределенный интеграл

Электронный курс лекций «Математический анализ»,
часть 10

Оренбург 2017

Первообразная: определение

Обозначим символом X один из интервалов вида (a, b), $(-\infty, a)$, $(b,+\infty)$, $(-\infty, +\infty)$; $a, b \in R$.

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале X.

Определение 1. Функция F(x) называется *первообразной* для функции $f(x)$ на X, если

1) $F(x)$ дифференцируема на X, т.е. $F(x) \in D(X)$;

2) $F'(x) = f(x), \forall x \in X$.

$F_1(x) = \frac{x^2}{2}$, $F_2(x) = \frac{x^2}{2} + 5$, $F_3(x) = \frac{x^2+1}{2}$ являются первообразными для функции $f(x) = x$ на $(-\infty, +\infty)$.

$F(x) = \ln x$ является *первообразной* для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на $(0,+\infty)$.

Первообразная: простейшие свойства

Теорема 1. Если $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на X, то $\forall\ C\in R$ функция $\Phi(x)=F(x)+C$ - первообразная для $f(x)$ на X.

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l} F(x)\in D(X) \\ C\in D(X) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \Phi(x)=F(x)+C\in D(X);$$

$$\Phi'(x)=(F(x)+C)'=F'(x)+C'=f(x).$$

Теорема 2. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ являются первообразными для $f(x)$ на X, то $\exists C\in R:\quad F_1(x)-F_2(x)=C,\ \forall x\in X$.

;

Доказательство. $\boxed{\Phi(x)=F_1(x)-F_2(x)}$

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x)\in D(X) \\ F_2(x)\in D(X) \end{array}\right\} \Rightarrow \Phi(x)\in D(X)$$

$$\Phi'(x)=(F_1(x)-F_2(x))'=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0,\ \forall x\in X$$

$$\exists C\in R:\Phi(x)=C,\forall x\in X \quad \Rightarrow \quad F_1(x)-F_2(x)=C,\quad \forall x\in X$$

Вывод:
если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на X, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ может быть представлена в виде $\Phi(x)=F(x)+C$, где $C\in R$.

Неопределённый интеграл: определение

Определение 3. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на X называется *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ на интервале X.

Обозначение: $\int f(x)dx = \left\{\begin{matrix} \text{Множество всех} \\ \text{первообразных} \\ \text{для } f(x) \text{ на } X \end{matrix}\right\}$

Здесь $\int$ - *знак интеграла, f(x)* называется *подынтегральной функцией*, а $f(x)dx$ *подынтегральным выражением.*

Замечание. Символ $\int f(x)dx$ употребляется также для обозначения *любой первообразной* для функции на интервале X. В этом случае, если $F(x)$ одна из первообразных для $f(x)$ на X, то справедлива формула:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,\ C \in R. \tag{1}$$

Неопределённый интеграл: свойства

Теорема 3 (Свойства неопределённого интеграла)

1) *а)* $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \quad \forall x \in X;$

б) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx, \quad \forall x \in X.$

2) *Если* $F(x) \in D(X)$, *то* $\int dF(x) = F(x) + C, \quad C \in R.$

3) $\forall \; k \in R \; (k \neq 0), \quad \int kf(x)dx = k\int f(x)dx + C, \quad C \in R.$

4) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx + C, \quad C \in R.$

Доказательство.

1) а) Следует из определения 1.

б) Следует из правила вычисления дифференциала функции и определения 1

2) Следует из правила нахождения дифференциала функции и определений 1 и 3.

$$F(x) \in D(X) \Rightarrow dF(x) = F'(x)dx, \; \forall x \in X.$$

Неопределённый интеграл: свойства

Теорема 3 (Свойства неопределённого интеграла)

1) *а)* $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \quad \forall x \in X;$

б) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx, \quad \forall x \in X.$

2) *Если* $F(x) \in D(X)$, *то* $\int dF(x) = F(x) + C, \quad C \in R.$

3) $\forall \; k \in R \; (k \neq 0), \quad \int kf(x)dx = k\int f(x)dx + C, \quad C \in R.$

4) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx + C, \quad C \in R.$

Доказательство.

3) $\left(k\int f(x)dx\right)' = k\left(\int f(x)dx\right)' = k \cdot f(x),$

т.е. любая из функций $k\int f(x)dx$ является первообразной для функции $k \cdot f(x)$, следовательно, формула справедлива.

4) $\left(\int f(x)dx + \int g(x)dx\right)' = \left(\int f(x)dx\right)' + \left(\int g(x)dx\right)' = f(x) + g(x),$

т.е. сумма любых двух функций из множеств $\left\{\int f(x)dx\right\}$ и $\left\{\int g(x)dx\right\}$ является первообразной для функции $f(x) + g(x)$, следовательно, формула справедлива

Неопределённый интеграл: свойства

Следствие 1.

$$\int \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int f_i(x)dx + C, \quad C \in R; \forall \alpha_i \in R, \quad i = \overline{1,n} \text{ и } \alpha_i \neq 0.$$

Доказательство. Доказательство данного утверждения можно провести двумя способами: либо применяя методику доказательства свойств 3) - 4); либо методом математической индукции.

Замечание. Следует иметь в виду, что всякое равенство, в обеих частях которого стоят неопределённые интегралы, *есть равенство между множествами*.

Определение 4. Операцию нахождения первообразной для функции *f(x)* или неопределённого интеграла от функции называют *интегрированием* функции *f(x)*.

Замечание. Если первообразная некоторой функции является элементарной функцией, то говорят, что интеграл выражается через элементарные функции, то есть вычисляется (берется).

Таблица неопределённых интегралов

Теорема 4 (Таблица неопределенных интегралов)

1. $\int dx = x + C, \quad \forall x \in R.$

2. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \forall \alpha \in R$ и $\alpha \neq -1$, если $x > 0$.

3. $\int \dfrac{1}{x} dx = ln|x| + C, \ \forall X \subset R: \ 0 \notin X.$

4. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C, \ \forall x \in R.$

5. $\int \cos x \, dx = \sin x + C, \ \forall x \in R$

6. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C, \ \forall X: \left\{x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z\right\} \notin X.$

7. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C, \ \forall X: \{x = \pi k, k \in Z\} \notin X.$

8. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{ln\, a} + C; \ \int e^x dx = e^x + C; \ \forall x \in R, \ a > 0, a \neq 1.$

Таблица неопределённых интегралов

$$9.1\quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C_1, \\ -\arccos x + C_2; \end{cases} \quad \forall X:\ X \subset (-1,1).$$

$$9.2\quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin \dfrac{x}{a} + C_1, \\ -\arccos \dfrac{x}{a} + C_2; \end{cases} \quad \forall X:\ X \subset (-1,1),\ a>0.$$

$$10.1\quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C_1, \\ -\operatorname{arcctg} x + C_2; \end{cases} \quad \forall x \in R.$$

$$10.2\quad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C_1, \\ -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg} \dfrac{x}{a} + C_2; \end{cases} \quad \forall x \in R, \quad a>0.$$

Таблица неопределённых интегралов

11.1 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln|x+\sqrt{x^2+1}|+C;\ \forall\ x \in R,$

11.2 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x+\sqrt{x^2+a}|+C;\ \forall\ x \in R,\ a>0.$

11.3 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C,\quad \forall\ X: X \subset (-\infty,-1) \cup (1,+\infty).$

11.4 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a}} = \ln|x+\sqrt{x^2-a}|+C,\quad \forall\ X: X \subset (-\infty,-\sqrt{a}) \cup (\sqrt{a},+\infty).$

12.1 $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C,\quad \forall X: X \subset R|\{-1,1\}.$

12.2 $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C,\quad \forall X: X \subset R \setminus \{-a,a\}$

13. $\int sh x\, dx = ch x + C,\quad \forall\ x \in R.$

14. $\int ch x dx = sh x + C,\quad \forall\ x \in R.$

15. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = th x + C,\quad \forall\ X \subset R.$

16. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cth x + C,\quad \forall\ X \subset R:\ 0 \notin X.$

Доказательство формул 11.1 и 12.1

$$\left(ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\right)'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$\left(\frac{1}{2}ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1\cdot(1-x)-(-1)\cdot(1+x)}{(1-x)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1+x)(1-x)}=\frac{1}{1-x^2}.$$

Методы интегрирования: метод разложения

Теорема 5

Если $\int f_i(x)dx = F_i(x) + C,\ C \in R,\ i = 1,2,\dots,n$ *на* X,

то $\int \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_i(x) + C,\quad C \in R,\ \ \alpha_i \in R\ (\alpha_i \neq 0),\ i = 1,2,\dots,n$ *на* X.

Доказательство.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot F_i(x)\right)' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot F_i'(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x),$$ так как

$(F_i(x))' = f_i(x),\quad i = 1,2,\dots,n.$

Замечание. Теорема 5 лежит в основе метода ***«интегрирование разложением»***, главная идея которого состоит в том, что *подынтегральную функцию представляют в виде линейной комбинации функций, первообразные (неопределенные интегралы) которых уже известны (т.е. можно воспользоваться таблицей интегралов) или легко определяются.*

Пример 1. Найти $\int\left(x^2+\sin x+3\cdot\frac{1}{x}\right)dx$.

<u>Решение.</u>

$$\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C, C\in R, X\subset R;$$

$$\int \sin x dx=-\cos x+C, C\in R, X\subset R;$$

$$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C, C\in R, X\subset R\setminus\{0\}.$$

$$\int\left(x^2+\sin x+3\cdot\frac{1}{x}\right)dx=\frac{x^3}{3}-\cos x+3\ln|x|+C,\quad X\subset R\setminus\{0\}, C\in R.$$

Методы интегрирования: метод подведения под знак дифференциала

Теорема 6. Пусть функции $f(u)$ и $\varphi(x)$ определены на интервалах U и X соответственно; $\varphi : X \to U$ и $\varphi(x) \in D(X)$. Тогда, если $f(u)$ имеет первообразную $F(u)$ на U, т.е.

$$\int f(u)du = F(u) + C,\ C \in R,$$

то функция $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ имеет первообразную $F(\varphi(x))$ на X, т.е.

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C,\ \ C \in R.$$

Доказательство.

$$\left(F(\varphi(x))\right)' = \left|u = \varphi(x)\right| = F'(u) \cdot u' = f(u) \cdot u' = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

Замечание. Символически, при выполнении соответствующих свойств функций, утверждение теоремы может быть записано так:

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = \left| \begin{matrix} u = \varphi(x) \\ \int f(u)du = F(u) + C \end{matrix} \right| = F(\varphi(x)) + C,\ \ C \in R.$$

Пример 2. Найти $\int (\ln x)^4 \cdot \frac{1}{x} dx$.

Решение.

$$\int (\ln x)^4 \cdot \frac{1}{x} dx = \int (\ln x)^4 d(\ln x) = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ \int u^4 du = \frac{u^5}{5} + C \end{array} \right| = \frac{(\ln x)^5}{5} + C, C \in R; \quad \forall X \subset R_+.$$

Замечание. Рассмотренный пример иллюстрирует главную идею метода: *нужно увидеть в составе подынтегрального выражения функцию и её производную и, если это возможно, ввести производную под знак дифференциала, затем найти в таблице интегралов подходящую формулу, рассматривая функцию (производную которой вводили под знак дифференциала) как новую (промежуточную) переменную.*

Свойства дифференциала

Теорема 8 (Свойства дифференциала функции). Если $f(x) \in D(X)$, то

1) $\forall\, b \in R \quad d(f(x)) = d(f(x) + b), \quad \forall\, x \in X$.

2) $\forall\, a \in R: \, a \neq 0 \quad df(x) = \dfrac{1}{a} d\,(a \cdot f(x)), \quad \forall x \in X$.

3) $\forall\, a, b \in R: a \neq 0 \quad df(x) = \dfrac{1}{a} d(a \cdot f(x) + b), \quad \forall x \in X$.

Следствие 1. $\forall a, b \in R: a \neq 0$ *и* $\forall x \in R$

1) $dx = d(x + b)$;

2) $dx = \dfrac{1}{a} d(a \cdot x)$;

3) $dx = \dfrac{1}{a} d(a \cdot x + b)$.

Методы интегрирования: метод подведения под знак дифференциала

Пример 3. **Найти** $\int (x+5)^{16}dx$.

$$\int (x+5)^{16}dx = \int (x+5)^{16}d(x+5) = \frac{(x+5)^{17}}{17} + C, C \in R; \quad \forall X: X \subset R.$$

Пример 4. Найти $\int \frac{e^x}{e^x - 1}dx$.

$$\int \frac{e^x}{e^x - 1}dx = \int \frac{d(e^x)}{e^x - 1} = \int \frac{d(e^x - 1)}{e^x - 1} = ln\left|e^x - 1\right| + C, C \in R; \quad \forall X: X \subset (R \setminus \{0\}).$$

Пример 5. **Найти** $\int cos\,3xdx$.

$$\int cos\,3xdx = \int cos\,3x \cdot \frac{1}{3}d(3x) = \frac{1}{3}sin3x + C, \; C \in R; \forall \; X: X \subset R.$$

Пример 7. **Найти** $\int \sqrt{8-7x}\,dx$.

$$\int \sqrt{8-7x}\,dx = \int (8-7x)^{1/2}\left(-\frac{1}{7}\right)d(8-7x) = -\frac{1}{7} \cdot \frac{(8-7x)^{3/2}}{3/2} + C, C \in R,$$

Методы интегрирования: метод замены переменной

Теорема 8. Если $f(x)$ определена на X, $\varphi(t)$ определена на T, причём,

1) $\varphi : T \to X$;

2) $\varphi(t)$ строго монотонна на T;

3) $\varphi(t) \in D(T)$ и $\varphi'(t) \neq 0, \ \forall t \in T$;

4) $\exists \ \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(t) + C$, $C \in R$ на множестве T;

тогда, $\exists \int f(x) dx = F(\varphi^{-1}(x)) + C$, $C \in R$ на множестве X.

Доказательство.

$$\left(F\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)' = \left| t = \varphi^{-1}(x) \right| = F'(t) \cdot \left(\varphi^{-1}(x)\right)',$$

$$F'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t), \qquad \left(\varphi^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{\varphi'(t)}, \ x \in X,$$

$$\left(F\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x).$$

Что означает, что $F\left(\varphi^{-1}(x)\right)$ является первообразной для $f(x)$ на X.

Пример 9. Найти $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx.$

Решение.

$$\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx = \left| \begin{array}{l} t=\sqrt[6]{1+x} \\ x=t^6-1=\varphi(t) \\ dx=6t^5dt \\ t\in(0,+\infty) \end{array} \right| = \int \frac{\left(t^6-1\right)^2+t^3}{t^2}\cdot 6t^5dt =$$

$$= \int 6t^3\cdot\left(t^{12}-2t^6+1+t^3\right)dt = 6\int(t^{15}-2t^9+t^3+t^6)dt =$$

$$= \frac{6t^{16}}{16}-\frac{12t^{10}}{10}+\frac{6t^4}{4}+\frac{6t^7}{7}+C =$$

$$= \frac{3\sqrt[3]{(1+x)^8}}{8}-\frac{6\sqrt[3]{(1+x)^5}}{5}+\frac{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}{2}+\frac{6\sqrt[6]{(1+x)^7}}{7}+C$$

Пример 10. Найти $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$.

Решение. $x = 2\cos t,\ t \in (0;\pi)$

$$dx = 2\cdot(-\sin t)dt, \quad 4-x^2 = 4-4\cos^2 t = 4\sin^2 t$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{2(-\sin t)dt}{4\cos^2 t\cdot\sqrt{4\sin^2 t}} = -\int \frac{2\sin t dt}{4\cos^2 t\cdot|2\sin t|} =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos^2 t}dt = -\frac{1}{4}tgt + C = \left| \begin{array}{l} \frac{x}{2} = \cos t \\ t = \arccos\frac{x}{2} \end{array} \right| = -\frac{1}{4}tg\left(\arccos\frac{x}{2}\right) + C.$$

Здесь $t \in T$: $T \subset ((0,\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2},\pi))$.

Методы интегрирования: метод интегрирования по частям

Теорема 9.
Если $f(x), g(x) \in D(X)$ и существует $\int g(x)\cdot f'(x)dx$, то существует $\int f(x)g'(x)dx$, причем $\int f(x)g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int g(x)f'(x)dx + C$, $C \in R$

Доказательство.

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x),$$

$$\int (f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x))dx = f(x)\cdot g(x) + C_1, C_1 \in R.$$

$$\int (f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x))dx = \int f'(x)\cdot g(x)dx + \int f(x)\cdot g'(x)dx + C_2, C_2 \in R.$$

$$f(x)\cdot g(x) + C_1 = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx + C_2,$$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)g(x)dx + C_1 - C_2, \qquad C = C_1 - C_2.$$

Замечание. Если ввести обозначения:

$$u = f(x),\ \ v = g(x),\ \ du = f'(x)dx,\ dv = g'(x)dx,$$

то формула приобретает вид:

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du + C.}$$

Пример 11. Найти $\int arctgx\, dx$.

Решение.

$$\int arctg\ x\ dx = \left| \begin{matrix} u = arctgx \\ v = x \end{matrix} \right| = x \cdot arctgx - \int x\, d\left(arctgx\right) + C_1 =$$

$$= x \cdot arctgx - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx + C_1 = x \cdot arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} + C_1 =$$

$$= x \cdot arctgx - \frac{1}{2} ln\,|\,x^2+1\,| + C_2 + C_1 = x \cdot arctgx - \frac{1}{2} ln\,|\,x^2+1\,| + C, C = C_1 + C_2.$$

Замечание. В рассмотренном примере 11 размышлять над выбором функций u и v не приходилось, т.к. под интегралом только одна функция. В тех же случаях, когда под знаком интеграла стоит *произведение функций*, то успех применения метода интегрирования по частям зависит от правильности выбора ***u*** и ***dv;*** т.е. от правильности выбора функции, которую следует предварительно подвести под знак дифференциала. На практике, как правило, в этих случаях ***за u выбирают функцию производная, которой имеет наиболее простой вид, а под знак дифференциала вводят ту функцию, которая превращается в подобную или усложняется незначительно.***

В частности,

- если под знаком интеграла стоит *произведение алгебраической функции на тригонометрическую или показательную*, то за ***u берут алгебраическую функцию***, а под знак дифференциала подводят неалгебраическую функцию (показательную или тригонометрическую);
- если под знаком интеграла стоит *произведение алгебраической функции на логарифмическую или обратную тригонометрическую*, то за ***u берут неалгебраическую функцию*** (логарифмическую или обратную тригонометрическую), а под знак дифференциала подводят алгебраическую функцию.

Интегрирование рациональных дробей

Определение 4. Функция $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, где $a_n,\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_1, a_0 \in R$, называется *многочленом степени* n *с действительными коэффициентами.*

Обозначение: $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$

Определение 5. Функция $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где

$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, $a_n,\ldots,a_1,a_0\in R;$

$Q_m(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0$, $b_m,\ldots,b_1,b_0\in R;$

называется *рациональной дробью.*

Обозначение: $R_n(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$.

Определение 6. Рациональная дробь $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется *правильной*, если $n<m$, в противном случае, т.е. когда $\boldsymbol{n \geq m}$, дробь называется *неправильной.*

Теорема 10. Любая неправильная рациональная дробь $R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ может быть представлена в виде многочлена и правильной рациональной дроби, причем это разложение единственно; т.е. существуют единственные многочлены $T_{n-m}(x)$, $K_r(x)$, $0 \le r < m$, такие, что $R(x)=T_{n-m}(x)+\frac{K_r(x)}{Q_m(x)}$.

Доказательство.

Так как $n \ge m$, то существуют, причем единственные, многочлены $T_{n-m}(x)$ и $K_r(x)$, где $0 \le r < m$, такие, что $P_n(x)=T_{n-m}(x)\cdot Q_m(x)+K_r(x)$.

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{T_{n-m}(x)\cdot Q_m(x)+K_r(x)}{Q_m(x)}=\frac{T_{n-m}(x)\cdot Q_m(x)}{Q_m(x)}+\frac{K_r(x)}{Q_m(x)}=$$

$$=T_{n-m}(x)+\frac{K_r(x)}{Q_m(x)}.$$

Замечание. Многочлены $T_{n-m}(x)$, $K_r(x)$ можно найти, используя правила деления многочленов. Наиболее распространённый метод – «деление уголком». Ниже мы рассмотрим применение этого метода при решении конкретных примеров.

Из теоремы 10 следует, что *интегрирование неправильных рациональных дробей ($n \geq m$) сводится к интегрированию многочленов и правильных рациональных дробей:*

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx = \int \left(T_{n-m}(x) + \frac{K_r(x)}{Q_m(x)} \right) dx \,. \qquad (2)$$

Интегралы вида $\int T_{n-m}(x)\,dx = \int \left(a_{n-m}x^{n-m} + \ldots + a_1 x + a_0 \right) dx$ легко считаются методом разложения. Следовательно, нужно научиться интегрировать правильные рациональные дроби.

Определение 7. Рациональные дроби вида $\dfrac{A}{(x-a)}$, $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)}$, $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$; $A, M, N, a, p, q \in R$; $n \in N \setminus \{1\}$; $p^2 - 4q < 0$; называются *простейшими (элементарными)* рациональными дробями.

Теорема 11. Любая правильная рациональная дробь ($n < m$) $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ может быть представлена, причём единственным образом, в виде суммы простейших рациональных дробей.

$$Q_m(x) = (x-a_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (x-a_k)^{\alpha_k} \cdot \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot \left(x^2 + p_S x + q_S\right)^{\beta_S},$$

$$a_1, \ldots, a_k;\ p_1, q_1, \ldots, p_S, q_S \in R; \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_S \in N \cup \{0\};$$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i + 2\sum_{j=1}^{S} \beta_j = m; \quad p_j^2 - 4q_j < 0, \quad \forall \ j = 1, \ldots, S;$$

то найдётся единственный набор, коэффициентов

$$A_{11}, \ldots, A_{1\alpha_1}, \ldots, A_{k1}, \ldots, A_{k\alpha_k};\ M_{11}; N_{11}, \ldots, M_{S\beta_S}, N_{S\beta_S} \in R,$$

$$
\begin{aligned}
R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}&=\frac{A_{11}}{x-a_1}+\frac{A_{12}}{(x-a_1)^2}+\ldots+\frac{A_{1\,\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\\
&+\frac{A_{2\,1}}{x-a_2}+\frac{A_{2\,2}}{(x-a_2)^2}+\ldots+\frac{A_{2\,\alpha_2}}{(x-a_2)^{\alpha_2}}+\ldots+\\
&+\frac{A_{kl\,1}}{x-a_k}+\frac{A_{k\,2}}{(x-a_k)^2}+\ldots+\frac{A_{k\,\alpha_k}}{(x-a_{kl})^{\alpha_k}}+\\
&+\frac{M_{11}x+N_{11}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)}+\frac{M_{12}x+N_{12}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2}+\ldots+\frac{M_{1\,\beta_1}x+N_{1\,\beta_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\beta_1}}+\\
&+\frac{M_{21}x+N_{21}}{\left(x^2+p_2x+q_2\right)}+\frac{M_{22}x+N_{22}}{\left(x^2+p_2x+q_2\right)^2}+\ldots+\frac{M_{2\,\beta_2}x+N_{2\,\beta_2}}{\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{\beta_2}}+\ldots+\\
&+\frac{M_{S1}x+N_{S1}}{\left(x^2+p_Sx+q_S\right)}+\frac{M_{S2}x+N_{S2}}{\left(x^2+p_Sx+q_S\right)^2}+\ldots+\frac{M_{S\,\beta_S}x+N_{S\,\beta_S}}{\left(x^2+p_Sx+q_S\right)^{\beta_S}}.
\end{aligned}
$$

Интегрирование правильных рациональных дробей

Теорема 12.

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\,ln|x-a| + C;\ \ A, a \in R;\quad \forall X: X \subset R \setminus \{a\};$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C,\quad A, a \in R, n \in N \setminus \{1\};\ \forall X: X \subset R \setminus \{a\}.$$

<u>Доказательство.</u>

$$\int \frac{A}{x-a}dx = \int A\frac{1}{x-a}d(x-a) = A\,ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = \int A(x-a)^{-n}d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C,\quad n \in N \setminus \{1\}.$$

Интегрирование правильных рациональных дробей

Теорема 13.

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2} ln|x^2+px+q| + \frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} arctg \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C;$$

$M,N,p,q; p^2-4q<0;\ \forall X:\ X \subset R.$

Доказательство. 1 способ (метод замены переменной)

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Mx+N}{x^2+2\cdot x\cdot\frac{p}{2}+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q}dx = \int \frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{q}}dx =$$

$$\left| \begin{array}{l} t = x+\dfrac{p}{2}, dt = dx, \\ x = t-\dfrac{p}{2}, \\ q-\dfrac{p^2}{4} = a^2, a = \sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}} \end{array} \right| = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}dt = M\int\frac{tdt}{t^2+a^2} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2} + C_1.$$

$$\int \frac{tdt}{t^2+a^2} = \left| \begin{matrix} z = t^2 + a^2, \\ dz = 2tdt,\ tdt = \frac{1}{2}dz \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{1}{2}dz}{z} = \frac{1}{2} ln|z| + C_2 = \frac{1}{2} ln\left(t^2 + a^2\right) + C_2, C_2 \in R$$

$$\int \frac{M\left(t - \frac{p}{2}\right) + N}{t^2 + a^2} dt = \frac{M}{2} ln\left(t^2 + a^2\right) + \frac{N - \frac{Mp}{2}}{a} arctg \frac{t}{a} + C, C \in R$$

и, следовательно, возвращаясь к старой переменной, получаем:

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = \frac{M}{2} ln \mid x^2 + px + q \mid + \frac{N - \frac{Mp}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} arctg \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C, C \in R.$$

2 способ (метод подведения под знак дифференциала)

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \left| \begin{array}{l} \left(x^2+px+g\right)' = 2x+p \\ Mx+N = \frac{M}{2}\left(2x+p-p\right)+N = \frac{M}{2}\left(2x+p\right)+N-\frac{M}{2}p \end{array} \right| =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{(2x+p)}{x^2+px+q}dx + \left(N-\frac{M}{2}p\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{M}{2} ln \left| x^2+px+q \right| +$$

$$+\left(N-\frac{M}{2}p\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}} = \left| \begin{array}{l} q-\frac{p^2}{4} \rangle 0 \\ \text{по условию} \end{array} \right| = \frac{M}{2} ln \left| x^2+px+q \right| +$$

$$+\frac{\left(N-\frac{M}{2}p\right)}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} arctg \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

Теорема 14.

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} = \frac{x}{2a^2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + C,$$

$a \in R, n \in N \setminus \{1\};\ \forall\ X : X \subset R.$

Доказательство.

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} = \int \frac{1}{a^2}\cdot\frac{a^2}{\left(x^2+a^2\right)^n}\,dx = \int \frac{1}{a^2}\cdot\frac{a^2+x^2-x^2}{\left(x^2+a^2\right)^n}\,dx =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^n}dx + C_1 = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x\cdot x}{\left(x^2+a^2\right)^n}\,dx + C_1 =$$

$$= \left|\ \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}\,dx = \frac{1}{2}\left(x^2+a^2\right)^{-n} d\left(x^2+a^2\right) = \frac{1}{2(-n+1)}\,d\left(\left(x^2+a^2\right)^{-n+1}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{2(n-1)}\int x\, d\left(\left(x^2+a^2\right)^{-n+1}\right) + C_1 =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{2(n-1)}\int x\, d\left(\left(x^2+a^2\right)^{-n+1}\right) + C_1 =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{2(n-1)}\left[x\left(x^2+a^2\right)^{-n+1} - \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + C_2\right] + C_1 =$$

$$= \frac{x}{2a^2(n-1)\cdot\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{2a^2(n-1)}\right)\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + C =$$

$$= \frac{x}{2a^2(n-1)\cdot\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + C,\ \ C, C_1, C_2 \in R$$

Теорема 15.

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx=\frac{M}{2(1-n)\cdot\left(x^2+px+q\right)^{n-1}}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^n}$$

$M, N, p, q \in R;\quad n \in N \setminus \{1\};\ p^2-4q<0;\ \forall X : X \subset R.$

<u>***Доказательство.***</u>

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx=\left|\left(x^2+px+q\right)'=2x+p\right|=\int\frac{\frac{M}{2}(2x+p)+\left(N-\frac{M}{2}p\right)}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{d\left(x^2+px+q\right)}{\left(x^2+px+q\right)^n}+\left(N-\frac{M}{2}p\right)\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^n}+C=$$

$$=\frac{M}{2(1-n)}\cdot\frac{1}{\left(x^2+px+q\right)^{n-1}}+\left(N-\frac{M}{2}p\right)\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^n}+C, C\in R$$