ТЕМА

Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Комплексные числа, заданные парами $(0, y)$, называют ***чисто мнимыми числами***.

Для комплексных чисел существует ***несколько форм записи: алгебраическая форма записи, тригонометрическая форма записи и экспоненциальная (показательная) форма записи***.

ТЕМА

Алгебраическая форма - это такая форма записи комплексных чисел, при которой комплексное число z, заданное парой вещественных чисел (x, y), записывается в виде

$$z = x + iy$$

где использован символ i, называемый ***мнимой единицей***.

Определение

Число x называют ***вещественной (реальной) частью комплексного числа*** $z = x + iy$ и обозначают $\operatorname{Re} z$.

Число y называют ***мнимой частью комплексного числа*** $z = x + iy$ и обозначают $\operatorname{Im} z$.

Определения

Комплексные числа, у которых $\operatorname{Im} z = 0$, являются ***вещественными числами***.

Комплексные числа, у которых $\operatorname{Re} z = 0$, являются ***чисто мнимыми числами***.

Сложение и вычитание комплексных чисел

$$z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2),$$
$$z_1 - z_2 = x_1 + iy_1 - (x_2 + iy_2) = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2).$$

Умножение комплексных чисел

$$\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2 = (x_1 + \boldsymbol{i}y_1)\cdot(x_2 + \boldsymbol{i}y_2) = x_1x_2 + \boldsymbol{i}x_1y_2 + \boldsymbol{i}y_1x_2 + \boldsymbol{i}^2y_1y_2 =$$

$$= x_1x_2 + \boldsymbol{i}x_1y_2 + \boldsymbol{i}y_1x_2 - 1\cdot y_1y_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + \boldsymbol{i}(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Определение

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, у которых вещественные части одинаковые, а мнимые части отличаются знаком, называются ***комплексно сопряжёнными числами***.

Свойства комплексно сопряжённых чисел

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},$$

$$\overline{\overline{z}} = z,$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Определение

Модулем комплексного числа

$z = x + iy$ называют вещественное число, обозначаемое $|z|$ и определенное по формуле

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Свойства модулей комплексных чисел

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|,$$

$$|z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|,$$

$$|z_1 + z_2| \ge \left||z_1| - |z_2|\right|,$$

$$|z_1 - z_2| \ge \left||z_1| - |z_2|\right|.$$

Деление комплексных чисел

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{x_1x_2-ix_1y_2+iy_1x_2-i^2y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

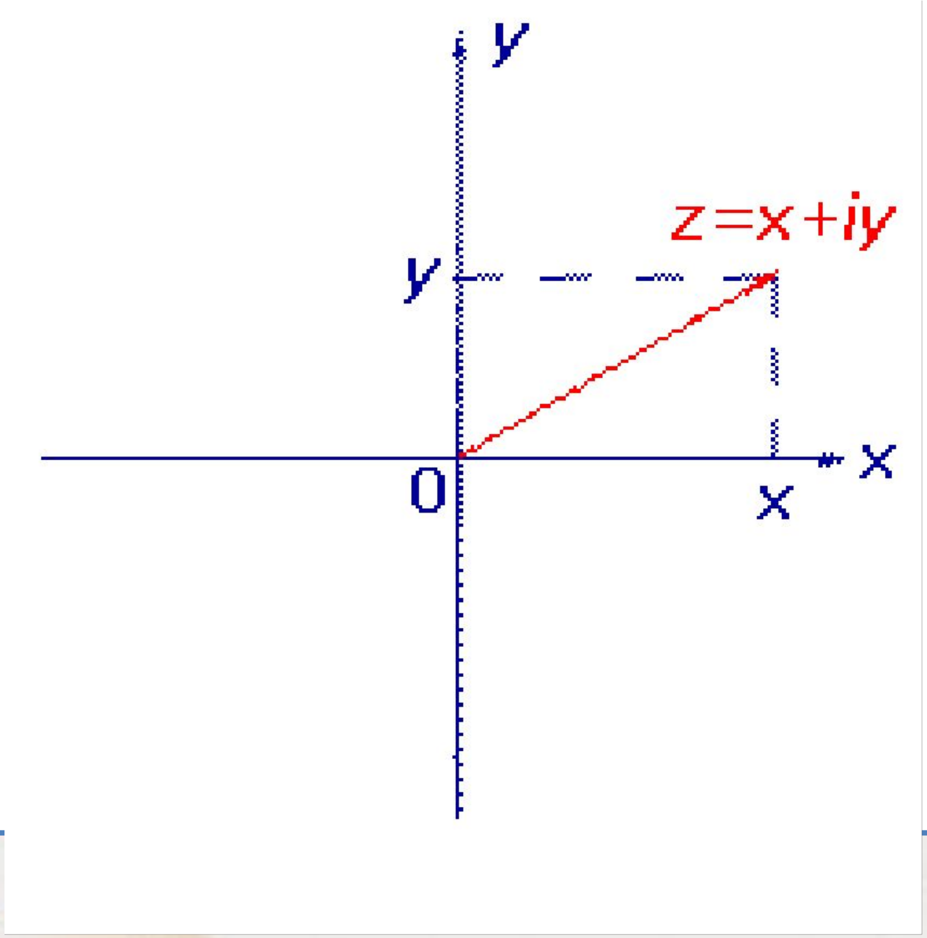
Определение

Рассмотрим плоскость с заданной на ней прямоугольной декартовой системой координат Oxy и напомним, что ***радиус-вектором*** на плоскости называют вектор, начало которого совпадает с началом системы координат.

Определение

Назовем рассматриваемую плоскость ***комплексной плоскостью***, и будем представлять комплексное число $z = x + iy$ радиус–вектором с координатами (x, y).

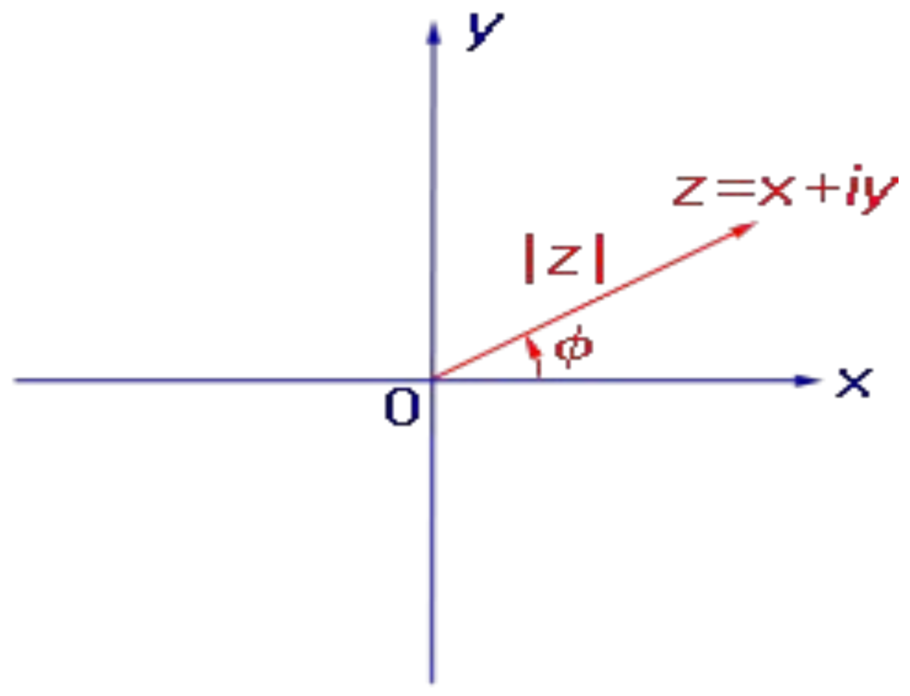
Геометрическое представление комплексных чисел



Определение

Аргументом комплексного числа z называют угол φ между положительным направлением вещественной оси и радиус-вектором z.

Аргумент комплексного числа z считают ***положительным***, если поворот от положительного направления вещественной оси к радиус-вектору z происходит ***против часовой стрелки***, и ***отрицательным*** - в случае поворота ***по часовой стрелке*** (см. рис.).


y
z=x+iy
|z|
ϕ
X
0

Определение

Поскольку аргумент любого комплексного числа определяется с точностью до слагаемого $2k\pi$ где k- произвольное целое число, то вводится, ***главное значение аргумента***, обозначаемое $\arg z$ и удовлетворяющее неравенствам:

$$-\pi < \arg z \leq \pi.$$

Тогда оказывается справедливым равенство:

$$\varphi = \arg z + 2k\pi, \quad k \in Z.$$

Тригонометрическое представление комплексного числа

Если для комплексного числа $z = x + iy$ нам известны его модуль $r = |z|$ и его аргумент φ, то мы можем найти вещественную и мнимую части по формулам

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \quad r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

Тригонометрическая запись колмплексного числа

Из формул вытекает, что любое отличное от нуля комплексное число $z = x + iy$ может быть записано в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

Расположение числа	Знаки и	Главное значение аргумента	Аргумент	Примеры
Положительная вещественная полуось	$x > 0,$ $y = 0$	0	$\varphi = 2k\pi$	$z = 3,$ $\begin{cases} r = 3, \\ \varphi = 2k\pi \end{cases}$
Первый квадрант	$x > 0,$ $y > 0$	$\operatorname{arctg}\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert$	$\varphi = \operatorname{arctg}\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert + 2k\pi$	$z = 3 + 4i,$ $\begin{cases} r = 5, \\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{4}{3} + 2k\pi \end{cases}$
Положительная мнимая полуось	$x = 0,$ $y > 0$	$\frac{\pi}{2}$	$\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$z = 2i,$ $\begin{cases} r = 2, \\ \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$
Второй квадрант	$x < 0,$ $y > 0$	$\pi - \operatorname{arctg}\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert$	$\varphi = \pi - \operatorname{arctg}\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert + 2k\pi$	$z = -4 + 4i,$ $\begin{cases} r = 4\sqrt{2}, \\ \varphi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$
Отрицательная вещественная полуось	$x < 0,$ $y = 0$	π	$\varphi = \pi + 2k\pi$	$z = -5,$ $\begin{cases} r = 5, \\ \varphi = \pi + 2k\pi \end{cases}$
Третий квадрант	$x < 0,$ $y < 0$	$-\pi + \operatorname{arctg}\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert$	$\varphi = -\pi + \operatorname{arctg}\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert + 2k\pi$	$z = -1 - \sqrt{3}i,$ $\begin{cases} r = 2, \\ \varphi = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$
Отрицательная мнимая полуось	$x = 0,$ $y < 0$	$-\frac{\pi}{2}$	$\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$z = -i,$ $\begin{cases} r = 1, \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$
Четвёртый квадрант	$x > 0,$ $y < 0$	$-\operatorname{arctg}\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert$	$\varphi = -\operatorname{arctg}\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert + 2k\pi$	$z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,$ $\begin{cases} r = 1, \\ \varphi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

Спасибо за работу на уроке!