Случайные сигналы в линейных системах

Будак Владимир Павлович,

Московский энергетический институт (ТУ)
кафедра светотехники

□: +7 (095) 763-5239 BudakVP@mpei.ru

Корреляционная теория

Рассматривать процесс как элемент некоторого функционального пространства, в котором введена мера

$$\|\xi(t)\| = \sqrt{\mathbf{M}\left(\xi(t)\right)^2}$$

что позволяет в средне-квадратичном смысле ввести все понятия анализа:

1. непрерывность случайной функции $\lim\limits_{t\to s}\|\xi(t)-\xi(s)\| = 0 : \lim\limits_{t\to s}\mathbf{M}\left(\xi(t)-\xi(s)\right)^2 = 0$
2. дифференцируемость случайной функции $\lim\limits_{t\to s}\left\|\dfrac{\xi(t)-\xi(s)}{t-s} - \xi'(t)\right\| = 0$

Важнейшую роль в функциональных пространствах играет скалярное произведение:

$$B_\xi(t_1,t_2) = \left(\xi(t_1),\xi(t_2)\right) = \mathbf{M}\xi(t_1)\xi^*(t_2) = \int x_1 x_2^* P_2(t_1,x_1;t_2,x_2)dx_1 dx_2$$

второй смешанный момент

$$\psi_\xi(t_1,t_2) = \mathbf{M}\left(\xi(t_1)-\mathbf{M}\xi(t_1)\right)\left(\xi^*(t_2)-\mathbf{M}\xi^*(t_2)\right) = B_\xi(t_1,t_2) - \mathbf{M}\xi(t_1)\mathbf{M}\xi^*(t_2)$$

корреляционная функция

Далее увидим, что вторые моменты обладают замкнутостью для линейных систем – корреляционная теория

Эргодичность

Эргодическая гипотеза – аналог закона больших чисел для случайных функций – *соответствие между средними по ансамблю реализаций средним по реализации*

$$\mathbf{M}\xi(t) = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \xi(t')dt', \quad B_\xi(\tau) = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \xi(t')\xi^*(t'+\tau)dt'$$

- Boltzmann – связь классической механики и статистической механики
- Для любой системы эргодичность означает, что с течением времени система в фазовом пространстве пройдет через любую точку
- Если в системе не заданы граничные условия, то она занимает фазовый объем, который с течением времени заполнит все фазовое пространство
- Синай доказал, что система из двух упругих шаров является перемешивающейся

Еще более усложняется эргодичность для нелинейных систем

Стационарность и однородность

Стационарный (для полей однородный) в узком смысле:

$$(\forall n):\ \left(P_n\left(t_1+\tau,x_1;t_2+\tau,x_2;\ldots\ ;t_n+\tau,x_n\right)=P_n\left(t_1,x_1;t_2,x_2;\ldots\ ;t_n,x_n\right)\right):$$

$$P_1\left(t_1+\tau,x_1\right)=P_1\left(t_1,x_1\right)\equiv P_1(x_1)$$

$$P_2\left(t_1+\tau,x_1;t_2+\tau,x_2\right)=P_2\left(t_1,x_1;t_2,x_2\right)\equiv P_2\left(x_1,x_2;t_2-t_1\right)$$

$$\mathbf{M}\xi(t)=\mathbf{M}\xi,\ \mathbf{D}\xi(t)=\mathbf{D}\xi,\ \psi_\xi(t_1,t_2)=\psi_\xi(t_2-t_1)\equiv\psi_\xi(\tau)$$

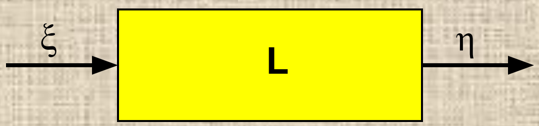
Стационарный (для полей однородный) в широком смысле:

$$(\forall n\le 2):\ \left(P_n\left(t_1+\tau,x_1;t_2+\tau,x_2;\ldots\ ;t_n+\tau,x_n\right)=P_n\left(t_1,x_1;t_2,x_2;\ldots\ ;t_n,x_n\right)\right):$$

$$\mathbf{M}\xi(t)=\mathbf{M}\xi,\ \mathbf{D}\xi(t)=\mathbf{D}\xi,\ \psi_\xi(t_1,t_2)=\psi_\xi(\tau),\ \mathbf{D}\xi=\psi_\xi(0)$$

Закон больших чисел является мостиком, соединяющим математическую теорию с физическим содержанием

Математическое ожидание и дисперсия случайных сигналов в линейных системах



$$\mathbf{L}\left(\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\, \mathrm{f_k}\right)=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k \mathbf{L}\left(\mathrm{f_k}\right)$$ - принцип суперпозиции

$$\eta=\mathbf{L}\left(\xi\right) \rightarrow \mathbf{M}\eta=\mathbf{ML}\left(\xi\right) \rightarrow \mathbf{M}\xi=\int\limits_{\mathrm{X}} x\,\mathrm{P}_{\xi}(dx) \rightarrow \mathbf{M}\eta=\mathbf{L}\left(\mathbf{M}\xi\right)$$

- Все явления имеют случайный характер и мы устанавливаем соотношения для средних

$$\mathbf{D}\eta=\left\langle \eta\eta^{*}\right\rangle=\left\langle \mathbf{L}(\xi)\mathbf{L}^{*}\left(\xi^{*}\right)\right\rangle$$ - оператор **L** сам с собою не коммутирует

Дисперсия на выходе в линейных системах не выражается через дисперсию на входе

Корреляционная функция

$$\psi_{\xi\xi}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=\Big\langle\big(\xi(\mathbf{r}_1)-\langle\xi(\mathbf{r}_1)\rangle\big)\big(\xi^*(\mathbf{r}_2)-\langle\xi^*(\mathbf{r}_2)\rangle\big)\Big\rangle=\langle\xi(\mathbf{r}_1)\xi^*(\mathbf{r}_2)\rangle-\langle\xi(\mathbf{r}_1)\rangle\langle\xi^*(\mathbf{r}_2)\rangle$$

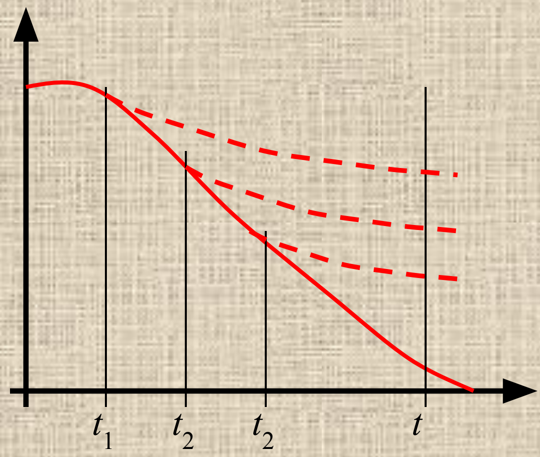
$\langle\xi(\mathbf{r}_1)\rangle=0,\ \tilde{\xi}(\mathbf{r}_1)=\xi(\mathbf{r}_1)-\langle\xi(\mathbf{r}_1)\rangle:\ \psi_{\tilde{\xi}\tilde{\xi}}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=\langle\tilde{\xi}(\mathbf{r}_1)\tilde{\xi}^*(\mathbf{r}_2)\rangle$ - флуктуации случайной величины

$$\psi_{\eta\eta}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=\langle\mathbf{L}_1\xi(\mathbf{r}_1')\mathbf{L}_2^*\xi^*(\mathbf{r}_2')\rangle=\langle\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2^*\xi(\mathbf{r}_1')\xi^*(\mathbf{r}_2')\rangle=\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2^*\langle\xi(\mathbf{r}_1')\xi^*(\mathbf{r}_2')\rangle=\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2^*\psi_{\xi\xi}(\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_2')$$

$$\psi_{\eta\eta}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=\iint\psi_{\xi\xi}(\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_2')h(\mathbf{r}_1'\to\mathbf{r}_1)h^*(\mathbf{r}_2'\to\mathbf{r}_2)d^2r_1'd^2r_2'$$

$$\psi_{\eta\eta}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=\iint\psi_{\xi\xi}(\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_2')h(\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_1)h^*(\mathbf{r}_2'-\mathbf{r}_2)d^2r_1'd^2r_2'$$

$$\mathbf{D}\eta=\psi_{\eta\eta}(\mathbf{r},\mathbf{r})=\iint\psi_{\xi\xi}(\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_2')h(\mathbf{r}_1'-\mathbf{r})h^*(\mathbf{r}_2'-\mathbf{r})d^2r_1'd^2r_2'$$



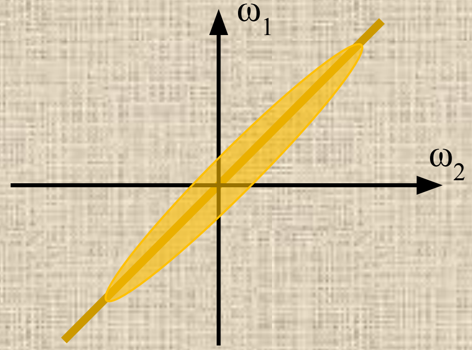
Для линейных систем корреляционная теория замкнута

Спектр случайного процесса

$$\psi_{\eta\eta}(t_1,t_2) = \left\langle \eta(t_1)\eta^*(t_2) \right\rangle = \left\langle \int C(\omega_1) e^{i\omega_1 t_1}\, d\omega_1 \int C^*(\omega_2) e^{-i\omega_2 t_2}\, d\omega_2 \right\rangle$$

$$\eta(t) = \int C(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$= \int \left\langle C(\omega_1) C^*(\omega_2) \right\rangle e^{i(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)}\, d\omega_1 d\omega_2$$



- Если $\langle C(\omega_1)C^*(\omega_2)\rangle \neq 0$ при $\omega_1 \neq \omega_2$, то области различных частот скоррелированы друг с другом
- Вклад в интеграл билинейной величины дают все частоты

$$\left\langle \left|\eta(t)\right|^2 \right\rangle = \psi_{\eta\eta}(t,t) = \int \left\langle C(\omega_1) C^*(\omega_2) \right\rangle e^{it(\omega_1 - \omega_2)}\, d\omega_1 d\omega_2$$

Энергетический спектр случайного процесса в общем случае не локализован

Спектр стационарного процесса

Пусть имеется стационарный процесс: $\psi_{\eta\eta}(t_1,t_2)=\psi_{\eta\eta}(t_1-t_2)$

$$\left\langle C(\omega_1)C^*(\omega_2)\right\rangle=\frac{1}{2\pi}\int\psi_{\eta\eta}(t_1-t_2)\,\mathrm{e}^{-i(\omega_1 t_1-\omega_2 t_2)}\,dt_1dt_2$$

Перейдем к новым переменным: $T=\frac{1}{2}\left(t_1+t_2\right),\ \tau=t_1-t_2$

$$t_1=T+\frac{\tau}{2},\ t_2=T-\frac{\tau}{2}:\ \frac{\mathrm{D}(t_1,t_2)}{\mathrm{D}(T,\tau)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial t_1}{\partial T} & \frac{\partial t_2}{\partial T}\\ \frac{\partial t_1}{\partial\tau} & \frac{\partial t_2}{\partial\tau}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\cdot 1-1\cdot\frac{1}{2}=-1$$

$$\left\langle C(\omega_1)C^*(\omega_2)\right\rangle=\frac{1}{2\pi}\int\psi_{\eta\eta}(\tau)\exp\left\{-i(\omega_1-\omega_2)T-i\frac{\tau}{2}(\omega_1+\omega_2)\right\}d\tau dT$$

$$\Omega=\frac{\omega_1+\omega_2}{2},\ \omega=\omega_1-\omega_2:\ \left\langle C(\omega_1)C^*(\omega_2)\right\rangle=\frac{1}{2\pi}\int\psi_{\eta\eta}(\tau)\exp\{-i\omega T-i\tau\Omega\}\,d\tau dT$$

$$\left\langle C(\omega_1)C^*(\omega_2)\right\rangle=\frac{1}{2\pi}\int\exp\{-i\omega T\}\,dT\int\psi_{\eta\eta}(\tau)\,\mathrm{e}^{-i\tau\Omega}\,d\tau=\int\psi_{\eta\eta}(\tau)\,\mathrm{e}^{-i\tau\Omega}\,d\tau\ \delta(\omega_1-\omega_2)$$

Спектр стационарного процесса локализуется на диагонали

Спектральная плотность случайного процесса – спектр Wiener-Хинчина

$$S(\omega)=\int \psi_{\eta\eta}(\tau)\,\mathrm{e}^{-i\tau\omega}\,d\tau:\quad \left\langle C(\omega_1)C^*(\omega_2)\right\rangle = S(\Omega)\,\delta(\omega_1-\omega_2),\ \ \Omega=\left.\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right|_{\omega_1=\omega_2=\omega}=\omega$$

$\mathbf{D}\eta=\psi_{\eta\eta}(0)=\int S(\omega)d\omega$ - спектр локализован вдоль диагонали

Для случайных полей: $\psi(\boldsymbol{\rho})=\int S(\boldsymbol{\nu})\,\mathrm{e}^{i2\pi\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\nu}}\,d^2\nu,\quad S(\boldsymbol{\nu})=\int \psi(\boldsymbol{\rho})\,\mathrm{e}^{-i2\pi\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\nu}}\,d^2\rho,\ \ \boldsymbol{\rho}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$

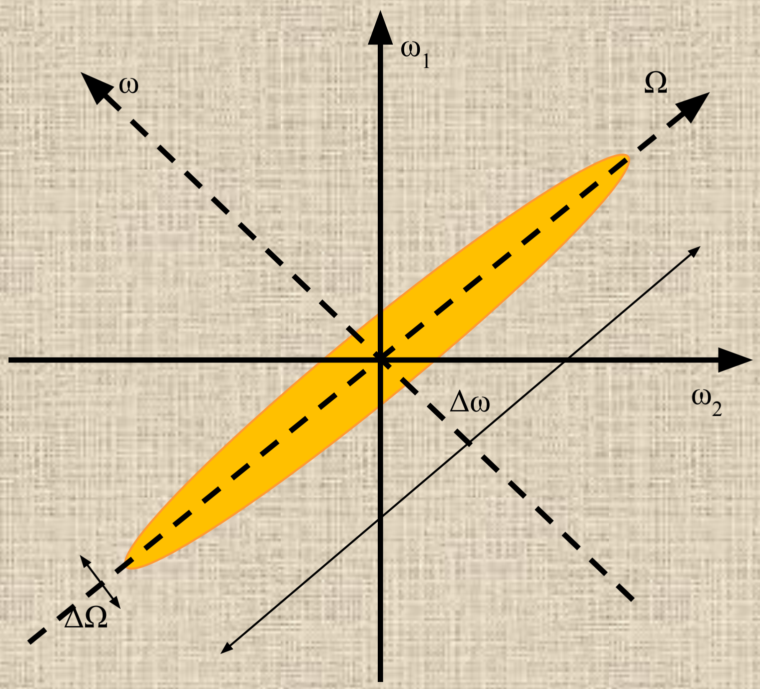
$$\psi_\eta(\boldsymbol{\rho})=\int \psi_\xi(\boldsymbol{\rho}')h\left(\mathbf{R}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')\right)h^*\left(\mathbf{R}-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')\right)d^2\rho' d^2R$$

$$S_\eta(\boldsymbol{\nu})=S_\xi(\boldsymbol{\nu})H(\boldsymbol{\nu})H^*(\boldsymbol{\nu})$$

Спектральная теория в линейных систем имеет смысл только для стационарных (однородных) функций

Квазиоднородные поля

- Любое реальное поле неоднородно уже хотя бы в силу своей ограниченности
- Существуют поля с достаточной для практики точностью близкие к однородным



$$\left\langle C(\omega_1)C^*(\omega_2)\right\rangle = \int \psi(T,\tau)\exp\left\{-i(\Omega T + \omega\tau)\right\} dT d\tau$$

$$\Delta\Omega \ll \Delta\omega : \quad \left|\frac{\partial\psi}{\partial T}\right| \ll \left|\frac{\partial\psi}{\partial \tau}\right|$$

$$S(T,\omega) = \int \Psi(T,\tau)\,\mathrm{e}^{-i\omega\tau}\, d\tau$$

Спектр Wigner – похож на обычный, но может быть и отрицательный