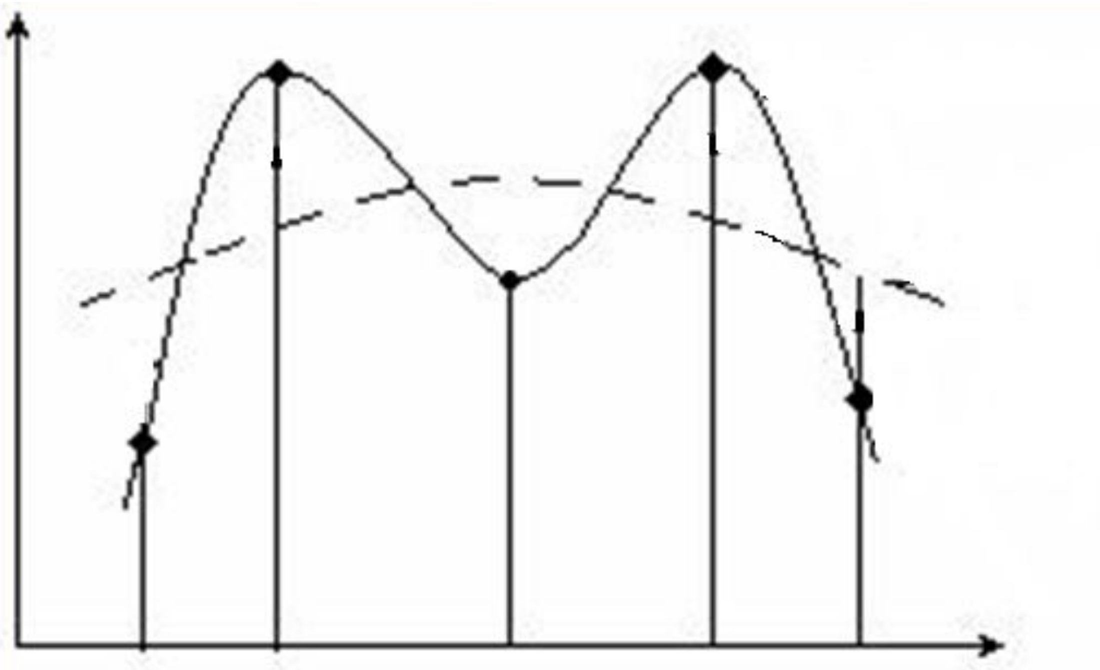
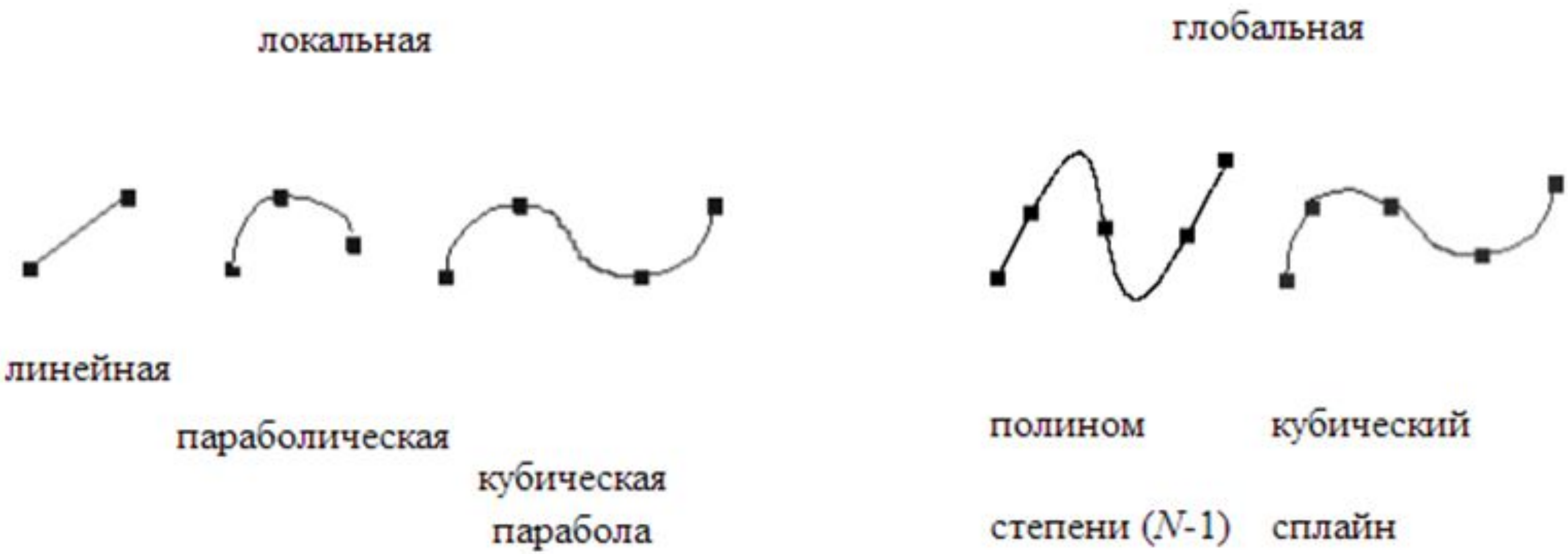
Интерполяция функций



Интерполяция - это вычисление значений y (x) во всей области определения аргумента по заданному дискретному множеству точек, т.е. переход от дискретной функции к непрерывной.



x_0, x_1,..., x_n - узлы интерполяции

i	x_i	y_i
0	x_0	y_0
1	x_1	y_1
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n	x_n	y_n

Задача интерполирования: найти значение функции в точке $\mathbf{x_k}$, принадлежащей отрезку **[x_0;x_n]**, но при этом x_k не совпадает ни с одним узлом интерполяции (x_k не равно x_0, x_1,...,x_n.)

Линейная интерполяция.

Линейная интерполяция - строится ломаная, которая проходит через точки $(X_i;Y_i)$, $i=0,1,2,...,n$, т.е. совпадающая с искомой функцией в узлах интерполирования и линейная на каждом участке$(X_i;X_{i+1})$ при $i=0,1,2,...,n-1$.

Очевидно, что при $X_i<=X<=X_{i+1}$ значения функции будут вычисляться по формуле:

$$\phi(X)=Y_i+(X - X_i) (Y_{i+1} - Y_i)/(X_{i+1} - X_i).$$

Параболическая интерполяция

Пусть искомая функция полином:

$$y(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

Потребуем, чтобы он проходил через заданные точки

$$y(x_k) = a_0 + a_1 x_k^1 + a_2 x_k^2 + \ldots + a_{n-1} x_k^{n-1}$$

Задача. Задана дискретная функция $y(x_k) = y_k$.

k	1	2	3	4
x_k	**0**	**1**	**2**	**3**
y_k	**0**	**3**	**5**	**4**

Полином $y(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n$, степень полинома = 3 $(N = 4)$, $y(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3$;

Составляем систему линейных уравнений и решаем ее любым методом:

$$a_0 + a_1 0^1 + a_2 0^2 + a_3 0^3 = 0$$

$$a_0 + a_1 1^1 + a_2 1^2 + a_3 1^3 = 3$$

$$a_0 + a_1 2^1 + a_2 2^2 + a_3 2^3 = 5$$

$$a_0 + a_1 3^1 + a_2 3^2 + a_3 3^3 = 4$$

Для решения методом Крамера вычисляется определитель Вандермонда:

$$W=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&2&4&8\\1&3&9&27\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\2&4&8\\3&9&27\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&4&8\\1&9&27\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&8\\1&3&27\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&4&8\\3&9&27\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot\begin{vmatrix}4&8\\9&27\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}2&8\\3&27\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}2&4\\3&9\end{vmatrix}=4\cdot 27-9\cdot 8-2\cdot 27+3\cdot 8+2\cdot 9-3\cdot 4=12$$

Для коэффициентов полинома имеем

$$a_0 = 0, \; a_1 = \frac{\Delta_1}{W}, \; \dots \; a_n = \frac{\Delta_n}{W}.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 9 & 27 \end{vmatrix} = 34, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & 27 \end{vmatrix} = 6, \; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 9 & 4 \end{vmatrix} = -4.$$

$$a_1 = \frac{34}{12} = \frac{17}{6}, \; a_2 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, \; a_3 = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}.$$

Получим следующий интерполирующий полином:

$$y(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{17}{6}x$$

Интерполяционный полином Лагранжа

Полином степени N-1, проходящий через N точек.

Требует большого объема вычислений.

Если узлы полинома равноотстоящие – вычисления упрощаются.

При изменении количества точек – полиномы L рассчитываются заново

$$L_j(x_k) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\dots(x - x_N)}{(x_j - x_1)(x_j - x_2)\dots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\dots(x_j - x_N)}$$

Интерполяция методом Лагранжа.

k	1	2	3	4
x_k	**0**	**1**	**2**	**3**
y_k	**0**	**3**	**5**	**4**

$y(x)=\sum_{n=1}^{N} y_j L_j(x)$. $N=4$ $y(x)=y_1L_1+y_2L_2+y_3L_3+y_4L_4=0\cdot L_1+3\cdot L_2+5\cdot L_3+4\cdot L_4$.

$$y(x)=\sum_{n=1}^{N} y_j L_j(x),\ N=4\quad y(x)=y_1L_1+y_2L_2+y_3L_3+y_4L_4=0\cdot L_1+3\cdot L_2+5\cdot L_3+4\cdot L_4,$$

$$L_2=\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}=\frac{x^3-5x^2+6x}{2},$$

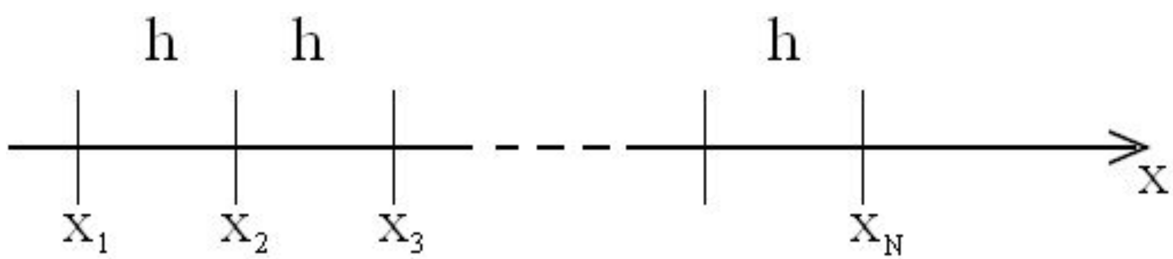
$$L_3=\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}=\frac{x^3-4x^2+3x}{-2},$$

$$L_4=\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}=\frac{x^3-3x^2+2x}{6},$$

$$y(x)=\frac{3x^3-15x^2+18x-5x^3+20x^2-15x+\frac{4}{3}x^3-4x^2+\frac{8}{3}x}{2}=\frac{-\frac{2}{3}x^3+x^2-\frac{17}{3}x}{2}=-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{17}{6}x\quad y(x)=-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{17}{6}x$$

Интерполяция методом Ньютона

При равноотстоящих узлах метод Ньютона, более простой метод, нежели метод Лагранжа



Вычисляем разности I-го порядка, через значение функции в соседних точках;

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k;$$

Вычисляем разности II-го порядка, через разности первого порядка в соседних точках;

$$\Delta^2 y_k = \Delta(\Delta y) = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k$$

Вычисляем разности n-ого порядка

$$\Delta^n y_k = \Delta(\Delta^{n-1} y_k) = \Delta^{n-1} y_{k+1} - \Delta^{n-1} y_k$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_1	y_1	$y_2 - y_1 = \Delta y_1$	$\Delta y_2 - \Delta y_1 = \Delta^2 y_1$	$\Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = \Delta^3 y_1$	$\Delta^3 y_2 - \Delta^3 y_1 = \Delta^4 y_1$
x_2	y_2	$y_3 - y_2 = \Delta y_2$	$\Delta y_3 - \Delta y_2 = \Delta^2 y_2$	$\Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2 = \Delta^3 y_2$	
x_3	y_3	$y_4 - y_3 = \Delta y_3$	$\Delta y_4 - \Delta y_3 = \Delta^2 y_3$		
x_4	y_4	$y_5 - y_4 = \Delta y_4$			
x_5	y_5				

Интерполяционный полином n-й степени имеет вид

$$y(x) = b_0 + b_1(x - x_1) + b_2(x - x_1)(x - x_2) + \ldots + b_{N-1}(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{N-1})$$

Коэффициенты b определяются из условия: **полином должен проходить через все заданные точки.**

$$y(x_1) = b_0$$

Коэффициент b_0 оцениваем через значение $y(x_1)$

$$\Delta\, y_1 = y(x_2) - y(x_1) = b_0 + b_1(x_2 - x_1) - b_0 = b_1 h$$

Коэффициент b_1 оцениваем через первую конечную разность Δy_1

$$\Delta^2\, y_1 = \Delta\, y_2 - \Delta\, y_1 = y(x_3) - y(x_2) - \Delta\, y_1$$
$$= b_0 + b_1(x_3 - x_1) + b_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) - b_0 - b_1(x_2 - x_1) - b_1 h = b_2 2!\, h^2$$

Коэффициент b_2 оцениваем через вторую

$$y(x) = y_1 + \frac{\Delta y_1}{1!\,h}(x - x_1) + \frac{\Delta^2 y_1}{2!\,h^2}(x - x_1)(x - x_2) + \ldots + \frac{\Delta^{(N-1)} y_1}{(N-1)!\,h^2}(x - x_1)(x - x_2)\ldots\left(x - x_{(N-1)}\right)$$

Докажем, что $y(x_k) = y_k$

$x = x_1 \qquad y(x_1) = y_1$

$x = x_2 \qquad y(x_2) = y_1 + \frac{\Delta y_1}{h}(x_2 - x_1) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{h} h = y_2$

$x = x_3$

$$y(x_3) = y_1 + \frac{\Delta y_1}{h}(x_3 - x_1) + \frac{\Delta^2 y_1}{2h^2}(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{h} 2h + \frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{2h^2} 2h^2 =$$

$$= y_1 + 2y_2 - 2y_1 + y_3 - y_2 - (y_2 - y_1) = y_3$$

Достоинства метода Ньютона:

- более простые вычисления;

- можно добавить точки и уточнить интерполяционный полином, не меняя предыдущих вычислений.

k	1	2	3	4
x_k	**0**	**1**	**2**	**3**
y_k	**0**	**3**	**5**	**4**