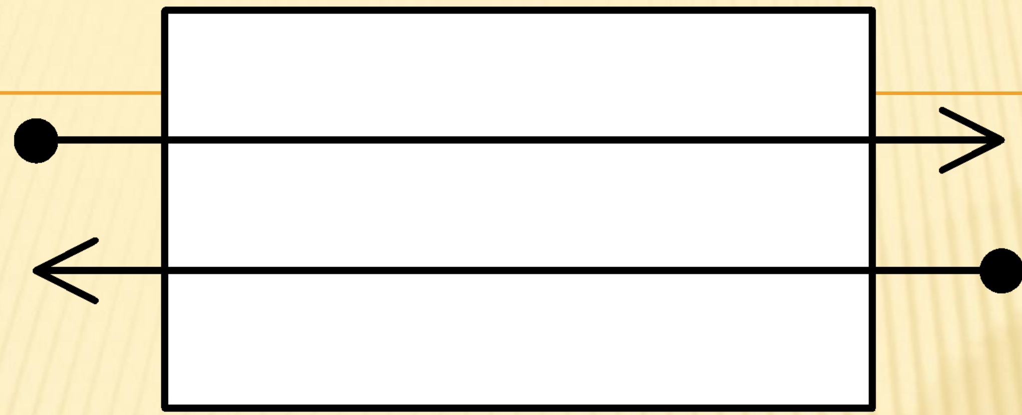
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Лекция 14.

Конечно-разностные методы решения систем уравнений, описывающих нестационарные режимы работы двухпоточного противоточного теплообменника.



$$\begin{cases} \dfrac{dT_1}{d\tau} + a\dfrac{dT_1}{dx} = b_1(T_{\text{ст}} - T_1) \\ \dfrac{dT_{\text{ст}}}{d\tau} = \beta_1(T_1 - T_{\text{ст}}) + \beta_2(T_2 - T_{\text{ст}}) \\ \dfrac{dT_2}{d\tau} - a_2\dfrac{dT_2}{dx} = b_2(T_{\text{ст}} - T_2) \end{cases}$$

- Начальные условия:

$$T_1\big|_{\tau=0} = T_1^{\,0}(x)$$

$$T_2\big|_{\tau=0} = T_2^{\,0}(x)$$

$$T_{\text{ст}}\big|_{\tau=0} = T_{\text{ст}}^{\,0}(x)$$

Граничные условия общего вида будут иметь следующий вид:

$$k_1(\tau) = m_1(\tau)T_1(\tau,0) + m_3(\tau)T_1(\tau,1) + m_5(\tau)T_2(\tau,0) + m_7(\tau)T_2(\tau,1)$$

$$k_2(\tau) = m_2(\tau)T_1(\tau,0) + m_4(\tau)T_1(\tau,1) + m_6(\tau)T_2(\tau,0) + m_8(\tau)T_2(\tau,1)$$

Явная конечно-разностная схема имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{T_{1,i}^{j+1} - T_{1,i}^{j}}{\Delta\tau} + a_{1,i-1}^{j}\dfrac{T_{1,i}^{j} - T_{1,i-1}^{j}}{\Delta x} = b_{1,i-1}^{j}\left(T_{cm,i-1}^{j} - T_{1,i-1}^{j}\right), \\ i = 2,\ldots,n+1 \\ \dfrac{T_{cm,i}^{j+1} - T_{cm,i}^{j}}{\Delta\tau} = \beta_{1,i}^{j}\left(T_{1,i}^{j} - T_{cm,i}^{j}\right) + \beta_{2,i}^{j}\left(T_{2,i}^{j} - T_{cm,i}^{j}\right), i = 1,\ldots,n+1 \\ \dfrac{T_{2,i}^{j+1} - T_{2,i}^{j}}{\Delta\tau} - a_{2,i+1}^{j}\dfrac{T_{2,i+1}^{j} - T_{2,i}^{j}}{\Delta x} = b_{2,i+1}^{j}\left(T_{cm,i+1}^{j} - T_{2,i+1}^{j}\right), \\ i = 1,\ldots,n \\ j = 1,\ldots,m \end{cases}$$

Граничное условие:

$$k_1^j = m_1^j T_{1,1}^j + m_3^j T_{1,n+1}^j + m_5^j T_{2,1}^j + m_7^j T_{2,n+1}^j$$

$$k_2^j = m_2^j T_{1,1}^j + m_4^j T_{1,n+1}^j + m_6^j T_{2,1}^j + m_8^j T_{2,n+1}^j$$

$$j = 1,\ldots,m+1$$

Начальные условия:

$$T_{1,i}^1 = T_1^0(x_i), \; T_{2,i}^1 = T_2^0(x_i)$$

$$T_{cm,i}^1 = T_{cm}^0(x_i), \quad i = 1,\ldots,n+1$$

Схема устойчива при выполнении условия:

$$\frac{\|a\|\Delta\tau}{\Delta x} \le 1$$

$$\|a\| = max(|a_{1,i}^{j}|, |a_{2,i}^{j}|)$$

Погрешность аппроксимации первого порядка: $0(\Delta x) + 0(\Delta\tau)$

Из конечно-разностных уравнений получаются следующие выражения для определения неизвестных значений температур потока и стенки:

$$
\begin{cases}
T_{1,i}^{j+1} = T_{1,i}^{j} + \Delta\tau\left[b_{1,i-1}^{j}\left(T_{cm,i-1}^{j} - T_{1,i-1}^{j}\right) - a_{1,i-1}^{j}\,\dfrac{T_{1,i}^{j} - T_{1,i-1}^{j}}{\Delta x} \right], \\
T_{cm,i}^{j+1} = T_{cm,i}^{j} + \\
\qquad + \Delta\tau\left[\beta_{1,i-1}^{j}\left(T_{1,i}^{j} - T_{cm,i}^{j}\right) + \beta_{2,i}^{j}\left(T_{2,i}^{j} - T_{cm,i}^{j}\right) \right] \\
T_{2,i}^{j+1} = T_{2,i+1}^{j} + \Delta\tau\left[b_{2,i+1}^{j}\left(T_{cm,i+1}^{j} - T_{2,i+1}^{j}\right) + a_{2,i+1}^{j}\,\dfrac{T_{2,i+1}^{j} - T_{2,i}^{j}}{\Delta x} \right]
\end{cases}
$$

Неявная конечно-разностная схема имеет вид:

$$\begin{cases}
\dfrac{T_{1,i}^{j+1}-T_{1,i}^{j}}{\Delta\tau}+a_{1,i-1}^{j}\dfrac{T_{1,i}^{j+1}-T_{1,i-1}^{j+1}}{\Delta x}=b_{1,i-1}^{j}\left(T_{cm,i-1}^{j+1}-T_{1,i-1}^{j+1}\right),\\
i=2,\dots,n+1\\
\dfrac{T_{cm,i}^{j+1}-T_{cm,i}^{j}}{\Delta\tau}=\beta_{1,i}^{j}\left(T_{1,i}^{j+1}-T_{cm,i}^{j+1}\right)+\beta_{2,i}^{j}\left(T_{2,i}^{j+1}-T_{cm,i}^{j+1}\right), i=1,\dots,n+\\
\dfrac{T_{2,i}^{j+1}-T_{2,i}^{j}}{\Delta\tau}-a_{2,i+1}^{j}\dfrac{T_{2,i+1}^{j+1}-T_{2,i}^{j+1}}{\Delta x}=b_{2,i+1}^{j}\left(T_{cm,i+1}^{j+1}-T_{2,i+1}^{j+1}\right),\\
i=1,\dots,n\\
j=1,\dots,m
\end{cases}$$

В случае независимых граничных условий:

$T_1(0)=T_{10}$ $T_2(1)=T_{20}$

т.е. известных значений

$$T_{1,1}^j = T_{10}^j, \; T_{2,n+1}^j = T_{20}^j$$

$$j = 1,\ldots,m+1$$

преобразовывая:

$$\begin{cases} T_{1,i}^{j+1}\left(\dfrac{1}{\Delta\tau}+\dfrac{a_{1,i-1}^{j}}{\Delta x}\right)+T_{1,i-1}^{j+1}\left(b_{1,i-1}^{j}-\dfrac{a_{1,i-1}^{j}}{\Delta x}\right)=T_{1,i}^{j}\dfrac{1}{\Delta\tau}+b_{1,i-1}^{j}T_{cm,i-1}^{j+1} \\ T_{cm,i}^{j+1}\left(\dfrac{1}{\Delta\tau}+\beta_{1,i}^{j}+\beta_{2,i}^{j}\right)=T_{cm,i}^{j}\left(\dfrac{1}{\Delta\tau}\right)+\beta_{1,i}^{j}T_{1,i}^{j+1}+\beta_{2,i}^{j}T_{2,i}^{j+1} \\ T_{2,i}^{j+1}\left(\dfrac{1}{\Delta\tau}-\dfrac{a_{2,i+1}^{j}}{\Delta x}\right)+T_{2,i+1}^{j+1}\left(b_{2,i+1}^{j}+\dfrac{a_{2,i+1}^{j}}{\Delta x}\right)=T_{2,i}^{j}\dfrac{1}{\Delta\tau}+b_{2,i+1}^{j}T_{cm,i+1}^{j+1} \end{cases}$$

преобразовывая:

$$\begin{cases} T_{1,i}^{j+1}\left(\Delta x + a_{1,i-1}^{j}\Delta\tau\right) + T_{1,i-1}^{j+1}\left(b_{1,i-1}^{j}\Delta x - a_{1,i-1}^{j}\Delta\tau\right) = \\ \qquad = T_{1,i}^{j}\left(\Delta x\right) + \left(\Delta x\Delta\tau b_{1,i-1}^{j}\right)T_{cm,i-1}^{j+1} \\ T_{cm,i}^{j+1}\left(1 + \Delta\tau\left(\beta_{1,i}^{j} + \beta_{2,i}^{j}\right)\right) = \\ \qquad = T_{cm,i}^{j} + \left(\Delta\tau\beta_{1,i}^{j}\right)T_{1,i}^{j+1} + \left(\Delta\tau\beta_{2,i}^{j}\right)T_{2,i}^{j+1} \\ T_{2,i}^{j+1}\left(\Delta x - a_{2,i+1}^{j}\Delta\tau\right) + T_{2,i+1}^{j+1}\left(b_{2,i+1}^{j}\Delta x + a_{2,i+1}^{j}\Delta\tau\right) = \\ \qquad = T_{2,i}^{j}\left(\Delta x\right) + \left(\Delta x\Delta\tau b_{2,i+1}^{j}\right)T_{cm,i+1}^{j+1} \end{cases}$$

Из конечно-разностного аналога уравнения энергетического баланса для стенки выражается:

$$T_{cm,i-1}^{j+1} = \frac{T_{cm,i-1}^{j} + \left(\Delta\tau\beta_{1,i-1}^{j}\right)T_{1,i-1}^{j+1} + \left(\Delta\tau\beta_{2,i-1}^{j}\right)T_{2,i-1}^{j+1}}{1 + \Delta\tau\left(\beta_{1,i-1}^{j} + \beta_{2,i-1}^{j}\right)}$$

$$T_{cm,i+1}^{j+1} = \frac{T_{cm,i+1}^{j} + \left(\Delta\tau\beta_{1,i+1}^{j}\right)T_{1,i+1}^{j+1} + \left(\Delta\tau\beta_{2,i+1}^{j}\right)T_{2,i+1}^{j+1}}{1 + \Delta\tau\left(\beta_{1,i+1}^{j} + \beta_{2,i+1}^{j}\right)}$$

Подставляя в конечно-разностные уравнения теплового баланса потоков:

$$\begin{cases} T_{1,i}^{j+1}\left(\Delta x + a_{1,i-1}^{j}\Delta\tau\right) + T_{1,i-1}^{j+1}\left(b_{1,i-1}^{j}\Delta x - a_{1,i-1}^{j}\Delta\tau\right) = \Delta x T_{1,i}^{j} + \\ + \left(\Delta x \Delta\tau b_{1,i-1}^{j}\right)\dfrac{T_{cm,i-1}^{j} + \left(\Delta\tau\beta_{1,i-1}^{j}\right)T_{1,i-1}^{j+1} + \left(\Delta\tau\beta_{2,i-1}^{j}\right)T_{2,i-1}^{j+1}}{1 + \Delta\tau\left(\beta_{1,i-1}^{j} + \beta_{2,i-1}^{j}\right)} \\ T_{2,i}^{j+1}\left(\Delta x - a_{2,i+1}^{j}\Delta\tau\right) + T_{2,i+1}^{j+1}\left(b_{2,i+1}^{j}\Delta x + a_{2,i+1}^{j}\Delta\tau\right) = \Delta x T_{2,i}^{j} + \\ + \left(\Delta x \Delta\tau b_{2,i+1}^{j}\right)\dfrac{T_{cm,i+1}^{j} + \left(\Delta\tau\beta_{1,i+1}^{j}\right)T_{1,i+1}^{j+1} + \left(\Delta\tau\beta_{2,i+1}^{j}\right)T_{2,i+1}^{j+1}}{1 + \Delta\tau\left(\beta_{1,i+1}^{j} + \beta_{2,i+1}^{j}\right)} \end{cases}$$

После преобразований получается:

$$\left(b^{j}_{1,i-1}\Delta x - a^{j}_{1,i-1}\Delta\tau - \frac{\left(\Delta x\Delta\tau^{2} b^{j}_{1,i-1}\beta^{j}_{1,i-1}\right)}{1+\Delta\tau\left(\beta^{j}_{1,i-1}+\beta^{j}_{2,i-1}\right)}\right)T^{j+1}_{1,i-1} -$$

$$\left(\Delta x - a^{j}_{2,i+1}\Delta\tau\right)T^{j+1}_{2,i} - \left(\frac{\Delta x\Delta\tau^{2} b^{j}_{2,i+1}\beta^{j}_{1,i+1}}{1+\Delta\tau\left(\beta^{j}_{1,i+1}+\beta^{j}_{2,i+1}\right)}\right)T^{j+1}_{1,i+1} +$$

$$+\left(b^{j}_{2,i+1}\Delta x + a^{j}_{2,i+1}\Delta\tau + \frac{\Delta x\Delta\tau^{2} b^{j}_{2,i+1}\beta^{j}_{2,i+1}}{1+\Delta\tau\left(\beta^{j}_{1,i+1}+\beta^{j}_{2,i+1}\right)}\right)T^{j+1}_{2,i+1} =$$

$$= -\left(-\Delta x T^{j}_{2,i} - \frac{\Delta x\Delta\tau b^{j}_{2,i+1}}{1+\Delta\tau\left(\beta^{j}_{1,i+1}+\beta^{j}_{2,i+1}\right)}T^{j}_{cm,i+1}\right)$$

$$\left(b_{1,i-1}^{j}\Delta x-a_{1,i-1}^{j}\Delta\tau-\frac{\left(\Delta x\Delta\tau^{2}b_{1,i-1}^{j}\beta_{1,i-1}^{j}\right)}{1+\Delta\tau(\beta_{1,i-1}^{j}+\beta_{2,i-1}^{j})}\right)T_{1,i-1}^{j+1}-$$

$$\left(\Delta x-a_{2,i+1}^{j}\Delta\tau\right)T_{2,i}^{j+1}-\left(\frac{\Delta x\Delta\tau^{2}b_{2,i+1}^{j}\beta_{1,i+1}^{j}}{1+\Delta\tau(\beta_{1,i+1}^{j}+\beta_{2,i+1}^{j})}\right)T_{1,i+1}^{j+1}+$$

$$+\left(b_{2,i+1}^{j}\Delta x+a_{2,i+1}^{j}\Delta\tau+\frac{\Delta x\Delta\tau^{2}b_{2,i+1}^{j}\beta_{2,i+1}^{j}}{1+\Delta\tau(\beta_{1,i+1}^{j}+\beta_{2,i+1}^{j})}\right)T_{2,i+1}^{j+1}=$$

$$=-\left(-\Delta xT_{2,i}^{j}-\frac{\Delta x\Delta\tau b_{2,i+1}^{j}}{1+\Delta\tau(\beta_{1,i+1}^{j}+\beta_{2,i+1}^{j})}T_{cm,i+1}^{j}\right)$$

В результате, с учётом независимых граничных условий получается система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} X\,\mathrm{OOOO}\ldots\ldots\ldots\ldots.\mathrm{OOOOO} \\ XXX\,\mathrm{OO}\ldots\ldots\ldots\ldots.\mathrm{OOOOO} \\ \mathrm{O}\,XXX\,\mathrm{O}\ldots\ldots\ldots\ldots.\mathrm{OOOOO} \\ \mathrm{OO}\,XXX\ldots\ldots\ldots\ldots.\mathrm{OOOOO} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{OOOOOO}\ldots\ldots\ldots.XXX\,\mathrm{OO} \\ \mathrm{OOOOOO}\ldots\ldots\ldots.\mathrm{O}\,XXX\,\mathrm{O} \\ \mathrm{OOOOOO}\ldots\ldots\ldots.\mathrm{OO}\,XXX \\ \mathrm{OOOOOO}\ldots\ldots\ldots.\mathrm{OOOO}\,X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{1,1}^{j+1} \\ T_{2,1}^{j+1} \\ T_{1,2}^{j+1} \\ T_{2,2}^{j+1} \\ \ldots\ldots \\ T_{1,n}^{j+1} \\ T_{2,n}^{j+1} \\ T_{1,n+1}^{j+1} \\ T_{2,n+1}^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ X \\ X \\ X \\ \ldots \\ X \\ X \\ X \\ X \end{pmatrix}$$

Данная система решается с помощью метода прогонки на каждом шаге по времени.

Если заданы граничные условия общего вида, то решение системы линейных алгебраических уравнений получается общими матричными методами.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!