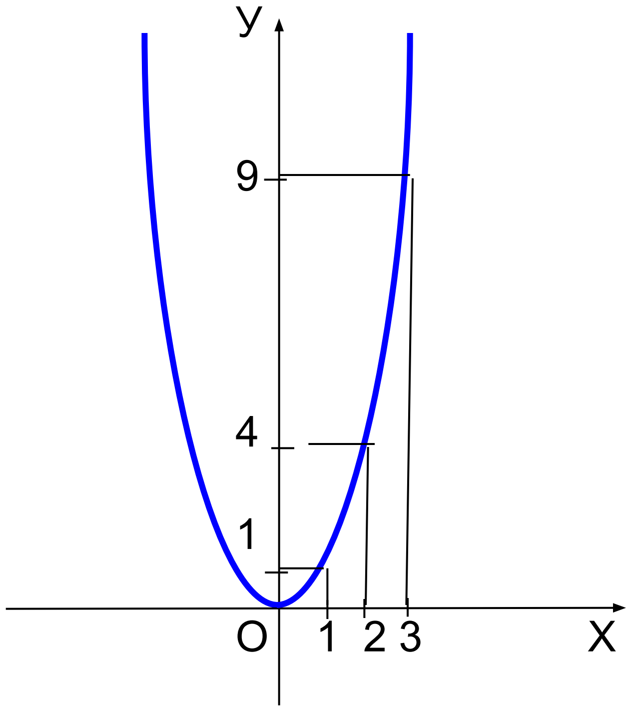
Квадратичная функция

Квадратичной функцией называется функция, заданная формулой

$$y = ax^2 + bx + c, \ a \neq 0.$$

1) $y = x^2$



Свойства функции:

1) *область определения*: Х = **R**

2) *множество значений*: У =[0;+∞[

3) f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f (x) ⇒ функция *четная*,

4) *график* - ***парабола***,

ветви вверх,

вершина **О(0; 0)**

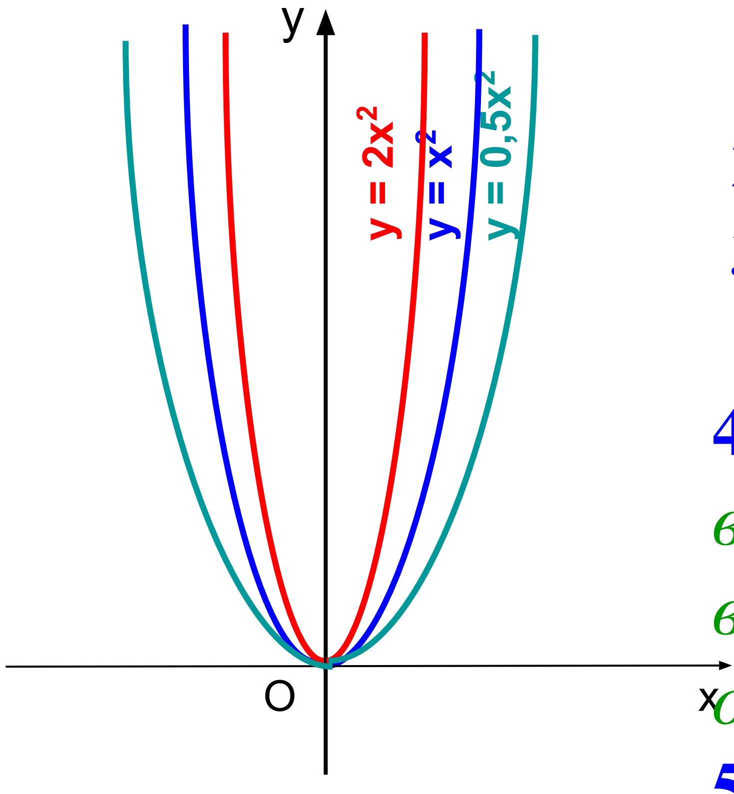
ось симметрии – ***Оу***

5) *возрастает* на [0; +∞[,

убывает на]-∞; 0].

2) $y = ax^2$

Свойства функции:



a > 0

1) *область определения*: **X = R**

2) *множество значений*: У =[0;+∞[

3) $f(-x) = a(-x)^2 = ax^2 = f(x) \Rightarrow$

функция *четная*,

4) *график* - ***парабола***,

вершина **О(0; 0),**

ветви вверх,

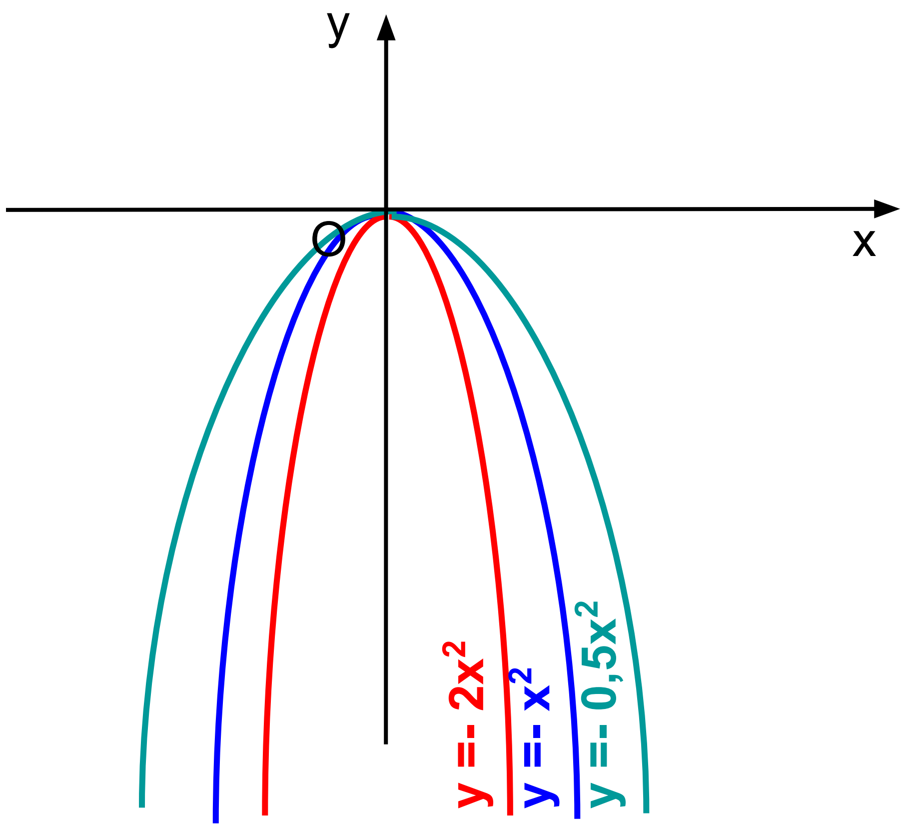
ось симметрии – ***Oy***

5) *возрастает* на [0; +∞[,

убывает на]-∞; 0].

a < 0

Свойства функции:



Самостоятельно аналогично.

3) $y = ax^2 + n$

Свойства функции:

a > 0

1) *Область определения:* **X = R**

2) *Множество значений:* У=[n; +∞[

3) $f(-x) = a(-x)^2 + n = ax^2 + n = f(x)$

⇒ функция *четная*,

4) *график* - ***парабола***,

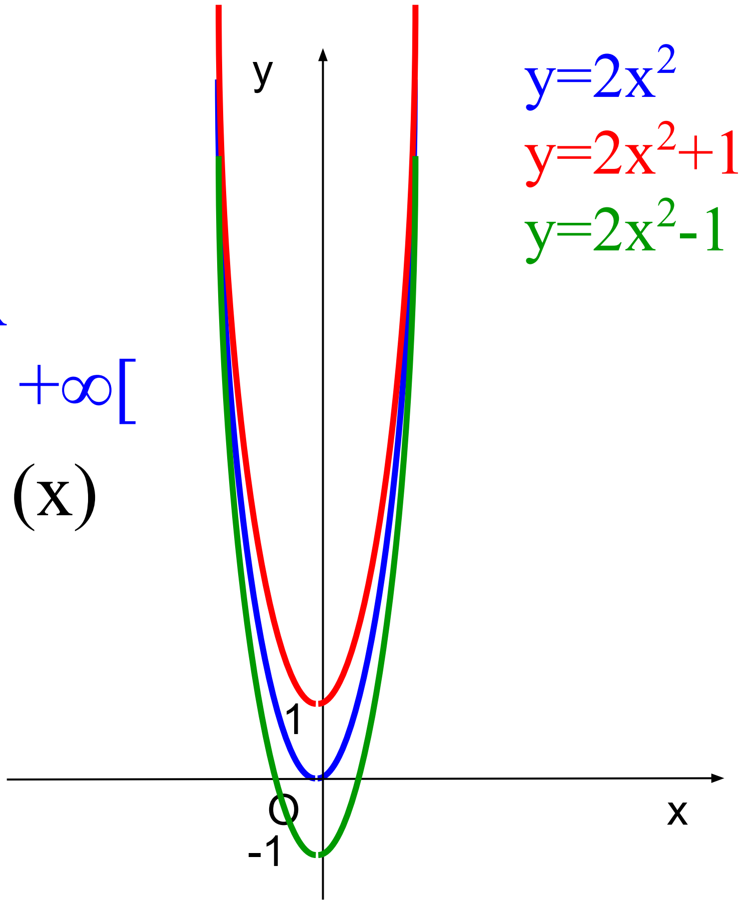
ветви вверх,

вершина ***(0; n)***,

ось симметрии параболы ***- Oy***

5) *возрастает* на [0; +∞[,

убывает на]-∞; 0].



Свойства функции:
$a < 0$

Самостоятельно аналогично

4) $y = a(x - m)^2$

Свойства функции:

$a > 0$

1) *Область определения:* **X = R**

2) *Множество значений:* У=[*0*; +∞[

3) $f(-x) = a((-x-m)^2 \neq f(x) \neq -f(x) \Rightarrow$ функция *ни четная*, *ни нечетная*

4) *графиком* функции является *парабола*,

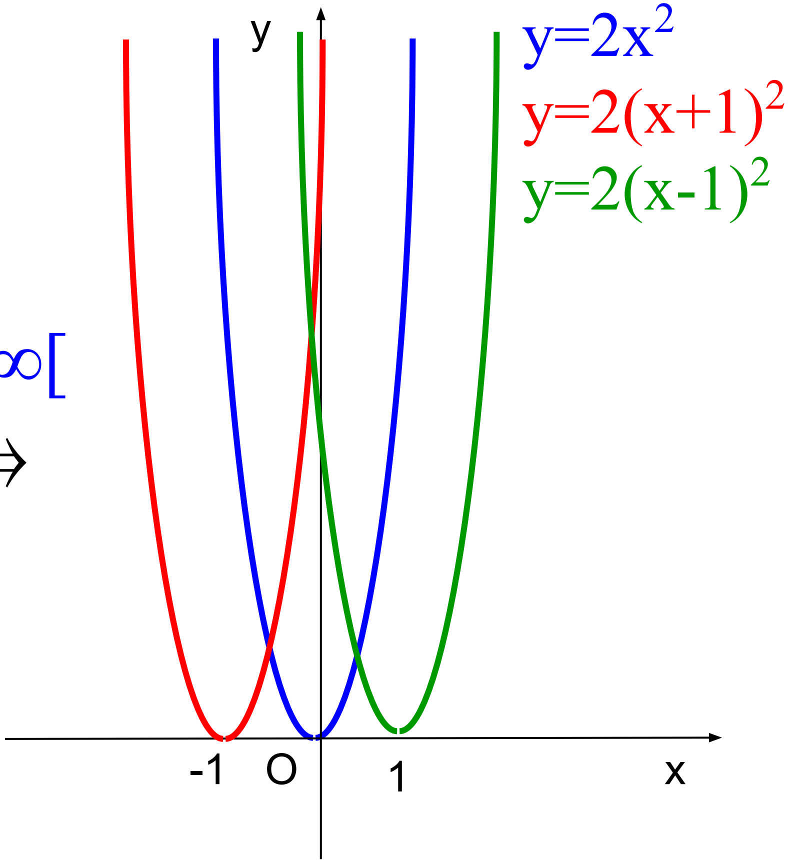
ветви вверх,

вершина ***(m; 0)***,

ось симметрии – прямая ***x = m***

5) *возрастает* на [m; +∞[,

убывает на]-∞; m].

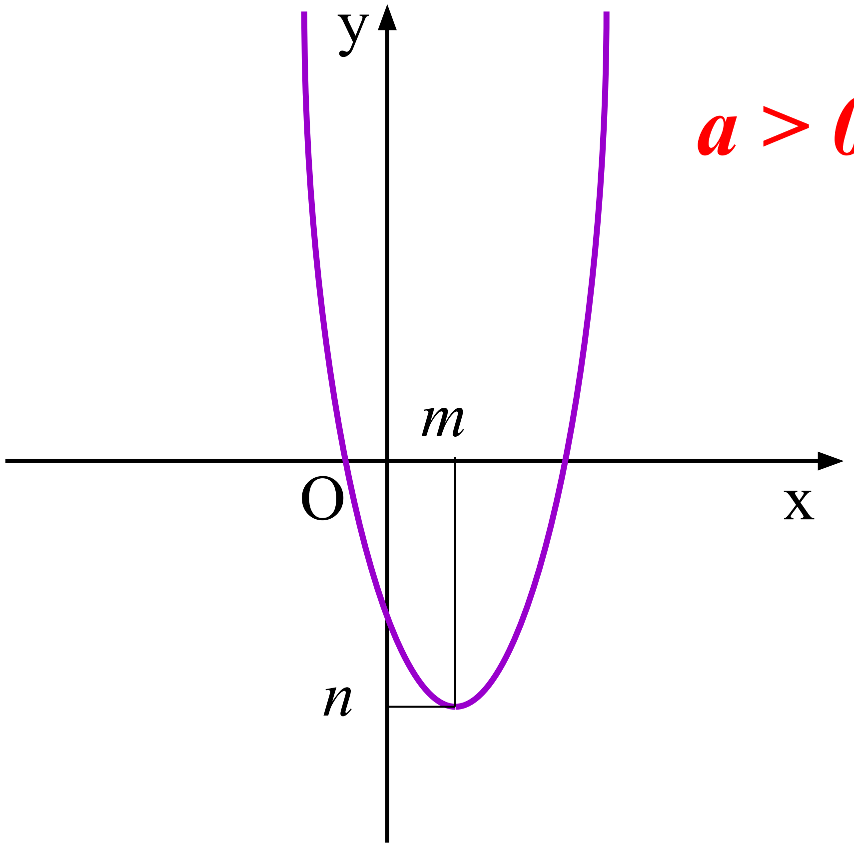


Свойства функции:

$a < 0$

Самостоятельно аналогично

5) $y = a(x - m)^2 + n$



$a > 0$

Свойства функции:

при $a > 0$ и $a < 0$

Самостоятельно

Построение графика функции
$y = ax^2 + bx + c$
1 способ

1) из квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ выделить полный квадрат: $y = a(x - m)^2 + n$:

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a(x^2 + 2\cdot x\cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$- \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}) = a\left[\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Обозначим $-\frac{b}{2a} = m$, $-\frac{b^2 - 4ac}{4a} = n$.

Получим $y = ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + n$.

2) определить координаты вершины параболы – $(m; n)$

3) построить вспомогательный график функции $y = ax^2$

4) выполнить перемещения вспомогательного графика в направлениях параллельных координатным осям:

а) параллельно оси Ох:

на m единиц *вправо*, если $m > 0$,

на $|m|$ единиц *влево*, если $m < 0$;

б) параллельно оси Оу:

на n единиц *вверх*, если $n > 0$,

на $|n|$ единиц *вниз*, если $n < 0$.

2 способ

1) Найти *координаты вершины параболы*:

абсцисса $x_0 = -\frac{b}{2a}$*, ордината* $y_0 = y(x_0)$

2) Найти (если возможно) *абсциссы точек пересечения параболы с осью Ох*:

это корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

3) Найти *ординату точки пересечения параболы с осью Оу*: это $y = y(0) = c$.

4) Найти *абсциссу точки, симметричной точке (0; с) относительно оси симметрии параболы:*

это корень уравнения $ax^2 + bx + c = c$.

5) Можно построить еще *несколько точек* искомого графика, выбрав несколько значений *x* и подсчитав соответствующие им значения *y*.

ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

Дробно-линейной функцией называется функция

$$y = \frac{ax+b}{cx+d},$$

полученная при делении друг на друга двух линейных функций.

1) $c = 0,\ d \neq 0 \Rightarrow y = \dfrac{ax+b}{d} = \dfrac{a}{d}x + \dfrac{b}{d}$ *линейная функция*

2) $a = d = 0,\ c \neq 0 \Rightarrow y = \dfrac{b}{cx} = \dfrac{к}{x}$ (где $k = \dfrac{b}{c}$) –

обратная пропорциональность

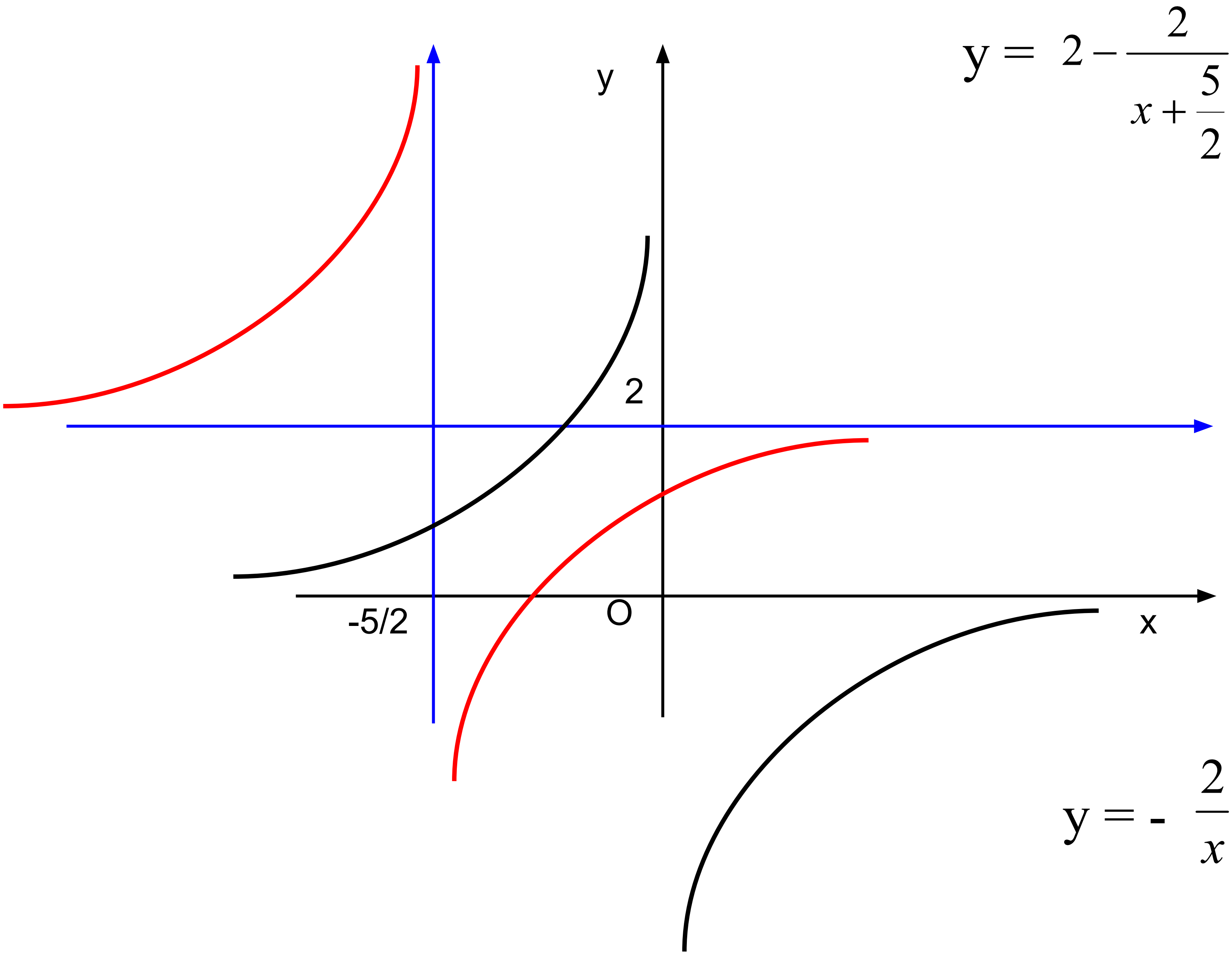
3) $c \neq 0,\ d \neq 0,\ ad = bc \Rightarrow \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} = p \Rightarrow$ a = cp, b = dp $\Rightarrow$

$$y = \frac{cp\ x + dp}{cx + d} = \frac{p(cx + d)}{cx + d)} = \text{p -}$$ *постоянная функция*

__Пример__. Построить график функции $y = \dfrac{4x+6}{2x+5}$

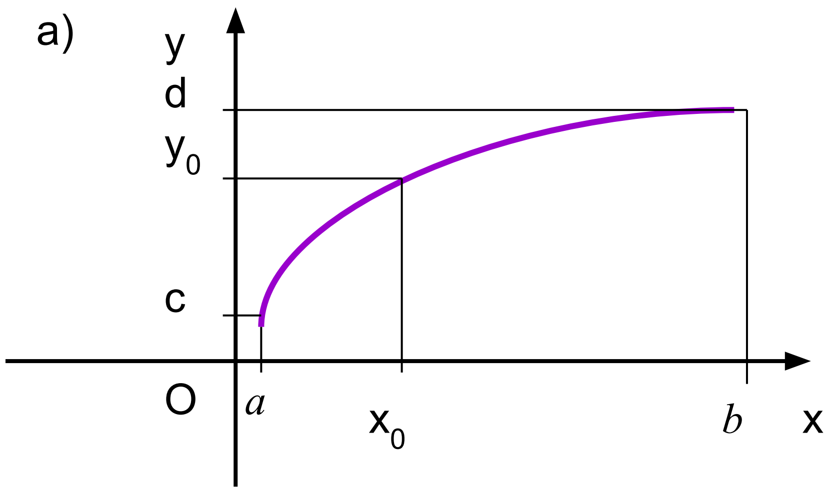
$$y = \frac{4\left(x + \frac{3}{2}\right)}{2\left(x + \frac{5}{2}\right)} = \frac{2\left(x + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} - \frac{5}{2}\right)}{\left(x + \frac{5}{2}\right)} = \frac{2\left[\left(x + \frac{5}{2}\right) - 1\right]}{x + \frac{5}{2}} = \frac{2\left(x + \frac{5}{2}\right) - 2}{x + \frac{5}{2}} = 2 - \frac{2}{x + \frac{5}{2}}$$

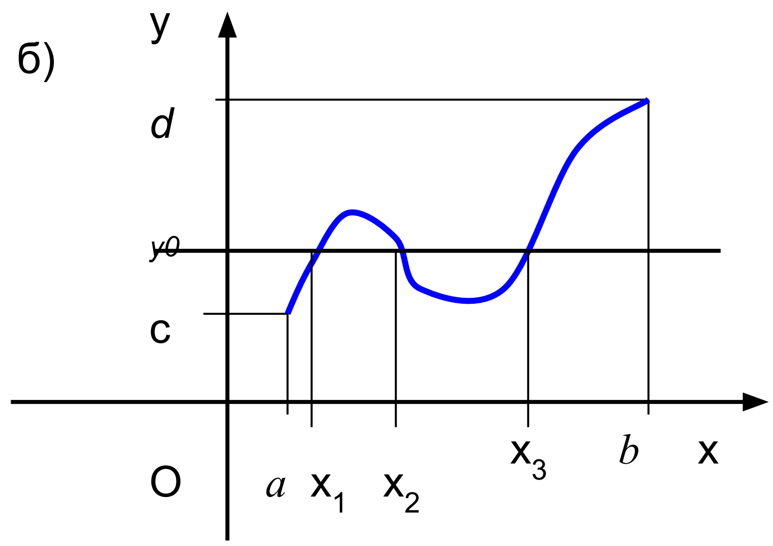
График функции $y = 2 - \dfrac{2}{x + \frac{5}{2}}$ получается сдвигом графика функции $y = -\dfrac{2}{x}$ на 5/2 единицы влево и на 2 единицы вверх.

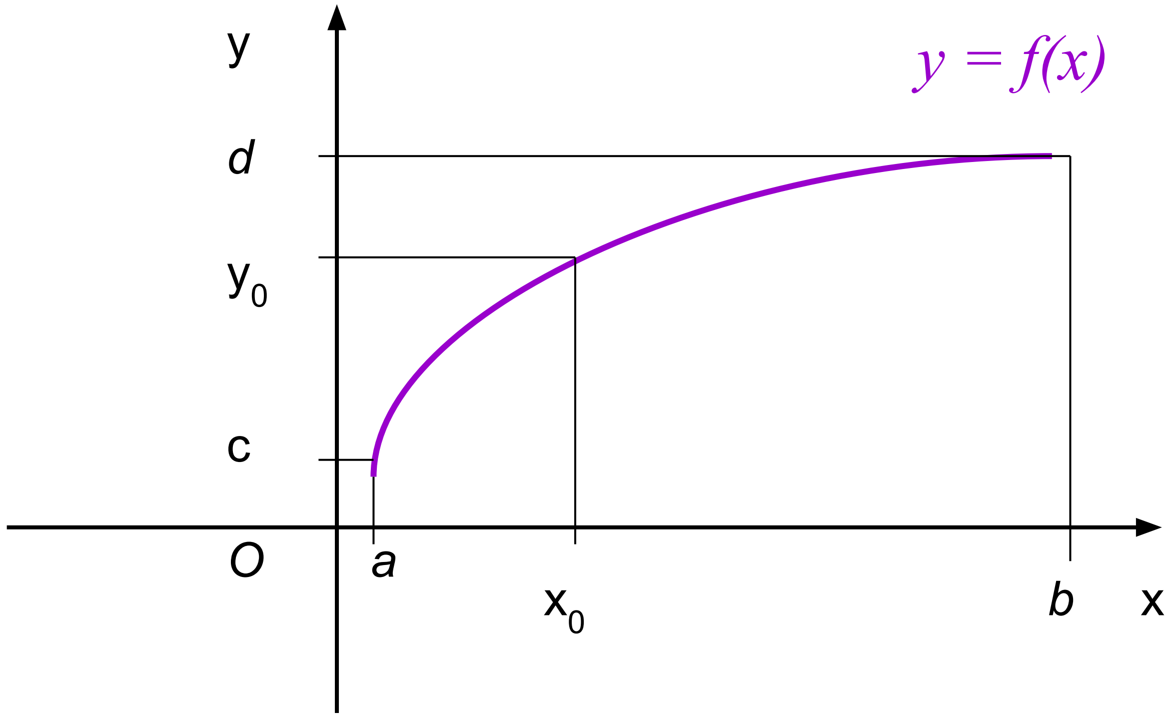


$y = 2 - \frac{2}{x + \frac{5}{2}}$
y
2
-5/2
O
x
$y = - \frac{2}{x}$

ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ





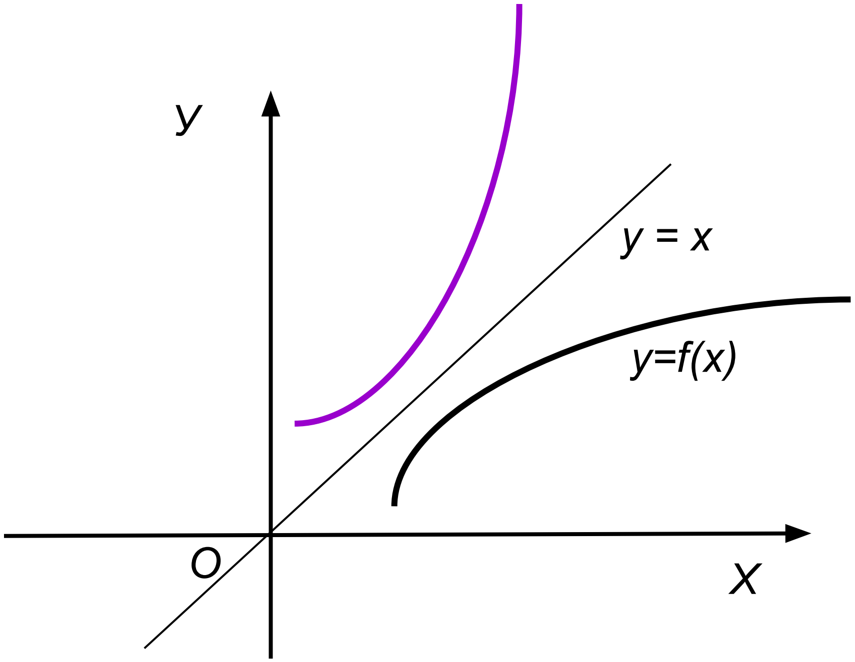


Если функция $y = f(x)$, x$\in$X, y$\in$Y такова, что для любого значения $y_0 \in$ Y существует единственное значение $x_0 \in$ X, такое, что $y_0 = f(x_0)$, то функция $f(x)$ **обратима**, функция $x = g(y)$, $y \in$Y **обратная функция** для функции $y = f(x)$, $x \in$ X.

Чтобы найти выражение для обратной функции, надо *решить уравнение $y = f(x)$ относительно x*, беря лишь те решения, которые принадлежат множеству X, и *поменять местами x и y*.

Если функция $y = f(x)$ определена и возрастает (убывает) на промежутке X, и областью ее значений является промежуток Y, то у нее существует обратная функция, которая определена и возрастает (убывает) на Y.

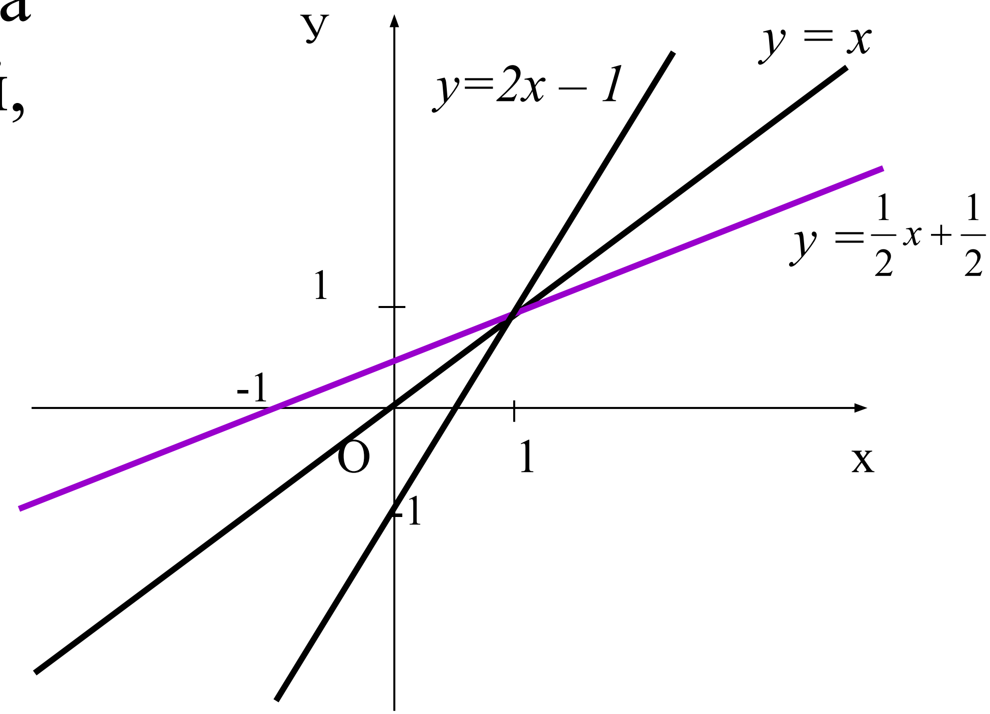
Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой y = x (биссектрисы 1-й и 3-й координатных четвертей)



<u>Примеры</u>:

1) Для функции y = 2x – 1 найти обратную функцию. Построить графики обеих функций.

Функция возрастает на всей числовой прямой, значит, у нее есть обратная функция



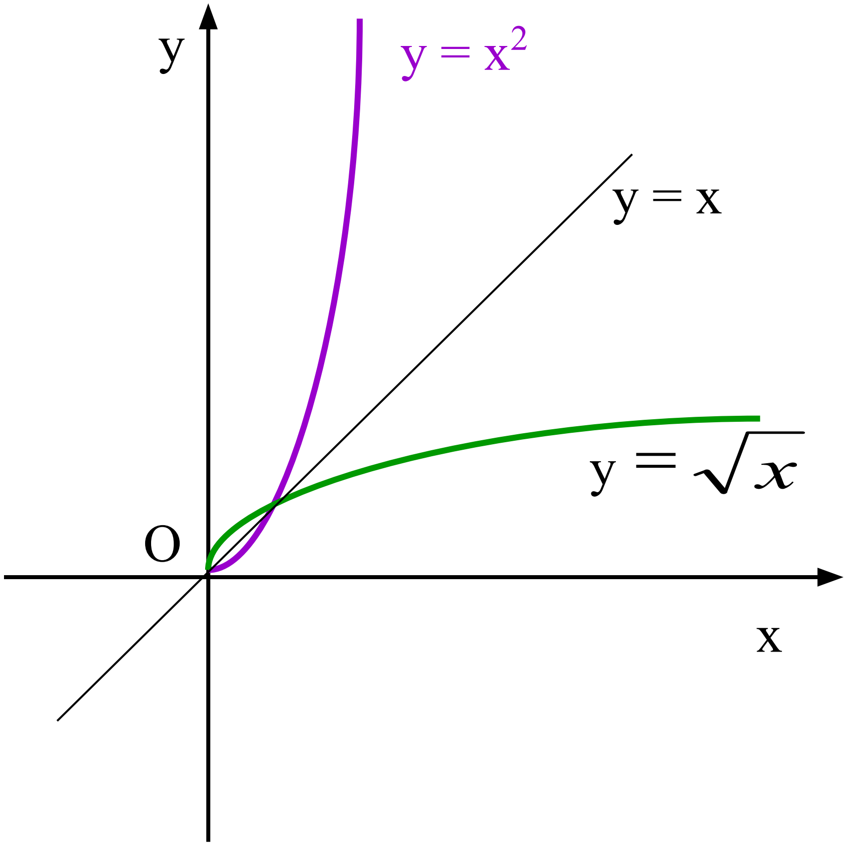
$$x = \frac{y+1}{2}$$

$$y = \frac{x+1}{2}$$

или $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

2) $y = x^2, x \in \mathbf{R}$

Эта функция не имеет обратной функции, так как, одно и то же значение y может соответствовать разным значениям x: $3^2 = (-3)^2 = 9$.



3) $y = x^2, x \in \mathbf{R}_+$

Функция возрастает на всей области определения, значит, у нее есть обратная функция

$x = \sqrt{y}$ $\qquad$ $y = \sqrt{x}$

КОМПОЗИЦИЯ ФУНКЦИЙ

$y = f(x)$, $x \in X$ и $x = g(t)$, $t \in T$, $x \in X$

$$t \rightarrow \underbrace{x = g(t) \rightarrow y}_{} = f(x),$$

$$\mathbf{f(g(t))}$$

Сложная функция $\mathbf{y = f(g(t))}$ называется **композицией функций** $y = f(x)$, $x \in X$ и

$x = g(t)$, $t \in T$.

От лат. *compositio – составление*

<u>Примеры</u>: 1) $y = x^2 + 1$ и $x = 3t - 4$,

$$y(x(t)) = (3t - 4)^2 + 1.$$

2) $f(x) = x^2 - 2x$, $g(x) = 4x + 3$

$f(g(x)) = (4x + 3)^2 - 2(4x + 3)$, $g(f(x)) = 4(x^2 - 2x) + 3$

3) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$

$g(t) = -t^2 - 1$ $g < 0$

композиция функций $y = f[g(t)]$ не определена

$y = g[f(x)] = -x - 1$

Спасибо за внимание!