

# Взаимное расположение Прямых и Плоскостей в пространстве

- Взаимное расположение Прямых в пространстве
- Взаимное расположение Прямых и Плоскостей в пространстве
- Взаимное расположение Плоскостей в пространстве

# ЦЕЛИ ЗАНЯТИЯ:

## - Образовательные:

- 1) сформировать представление о взаимных расположениях прямых, прямых и плоскостей в окружающем мире;
- 2) изучить понятия параллельных, скрещивающихся прямых в пространстве; параллельности прямой и плоскости, параллельности плоскостей и свойств;
- 3) формировать навыки чтения и построения чертежей, применения, полученных теоретических знаний при решении задач;

# ЦЕЛИ ЗАНЯТИЯ:

## - Развивающие:

*1) развивать пространственное воображение у обучающихся, умение переносить пространственные ситуации на плоскость, интерес к предмету, математическую речь.*

## - Воспитательные:

*воспитывать у обучающихся культуру математической речи, аккуратность в построении чертежа, формировать культуру общения.*

## - Методическая цель:

*показать формы и методы активизация мыслительной деятельности студентов.*

# ПЕРЕД НАЧАЛОМ РАБОТЫ МЫСЛЕННО ПРОГОВАРИВАЕМ:

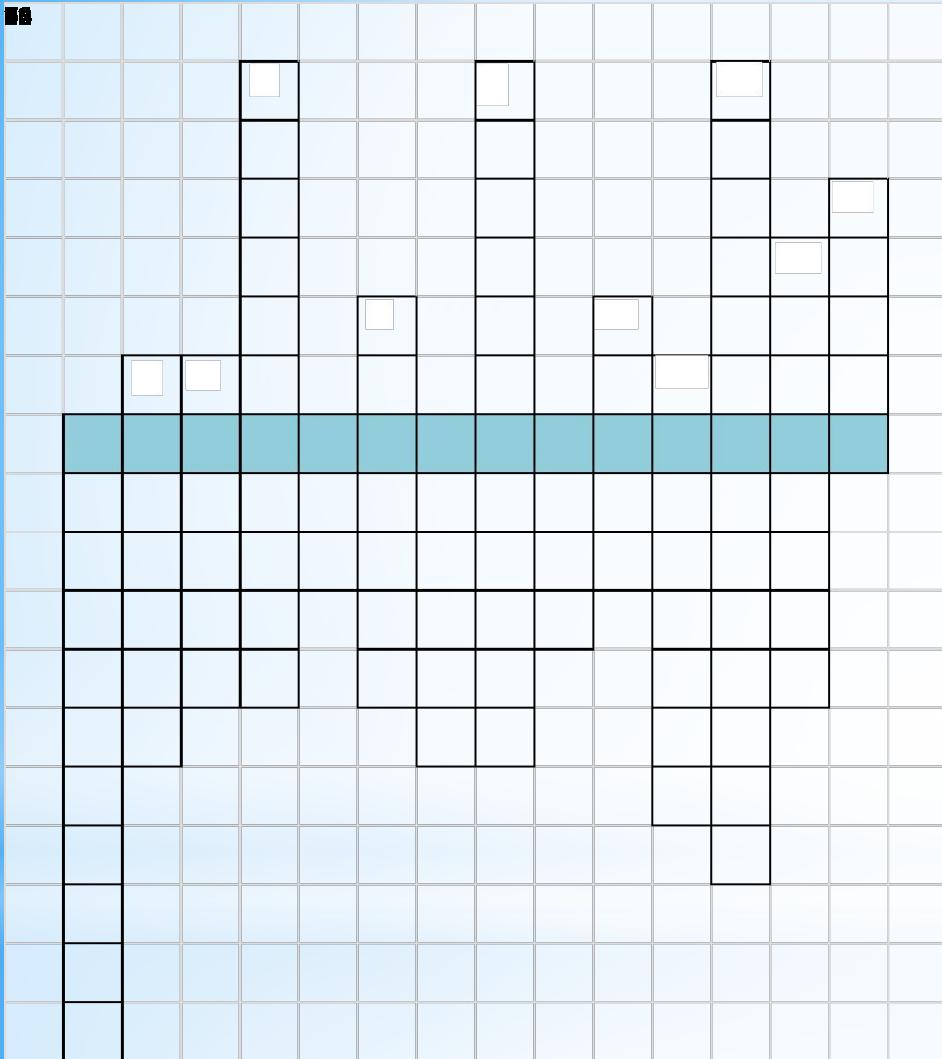
*Я настрой себе нашел,  
Чтобы быть везучим.  
Повторю сто раз его-  
Разойдутся тучи.  
У меня все хорошо-  
А будет еще лучше!*

# Проверь себя:

## ЗАДАНИЕ 1.

Впишите слова, пропущенные в предложениях.

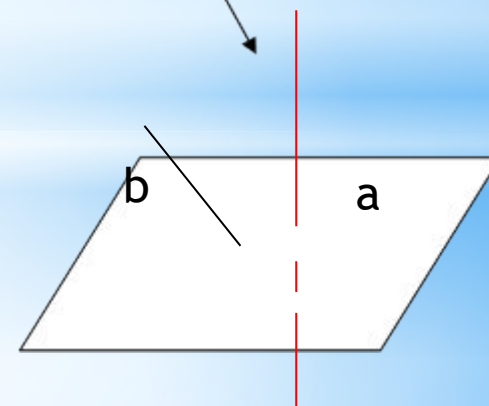
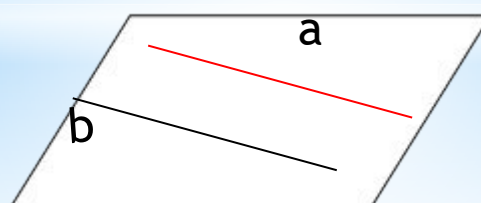
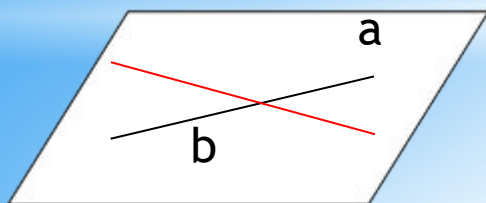
- 1) Через три точки, **не лежащие** на одной прямой, проходит единственная плоскость.
- 2) Если **две** точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит плоскости.
- 3) Две различные плоскости могут иметь только одну общую **прямую**.
- 4) Через прямую и не лежащую на ней точку проходит **единственная плоскость**.
- 5) Через две **пересекающиеся** прямые проходит единственная плоскость.



1. Раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве.
2. Математическое утверждение не требующее доказательства.
3. Одна из простейших фигур и планиметрии и стереометрии.
4. Раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур на плоскости.
5. Защитное приспособление воина в виде круга, овала, прямоугольника.
6. Теорема, в которой по заданному свойству нужно определить предмет
7. Направленный отрезок
8. Планиметрия - плоскость, стереометрия - ...
9. Женская одежда в форме трапеции.
10. Одна точка, принадлежащая обеим прямым.
11. Какую форму имеют гробницы фараонов в Египте?
12. Какую форму имеет кирпич?
13. Одна из основных фигур в стереометрии.
14. Она может быть прямой, кривой, ломаной.



# Взаимное расположение прямых





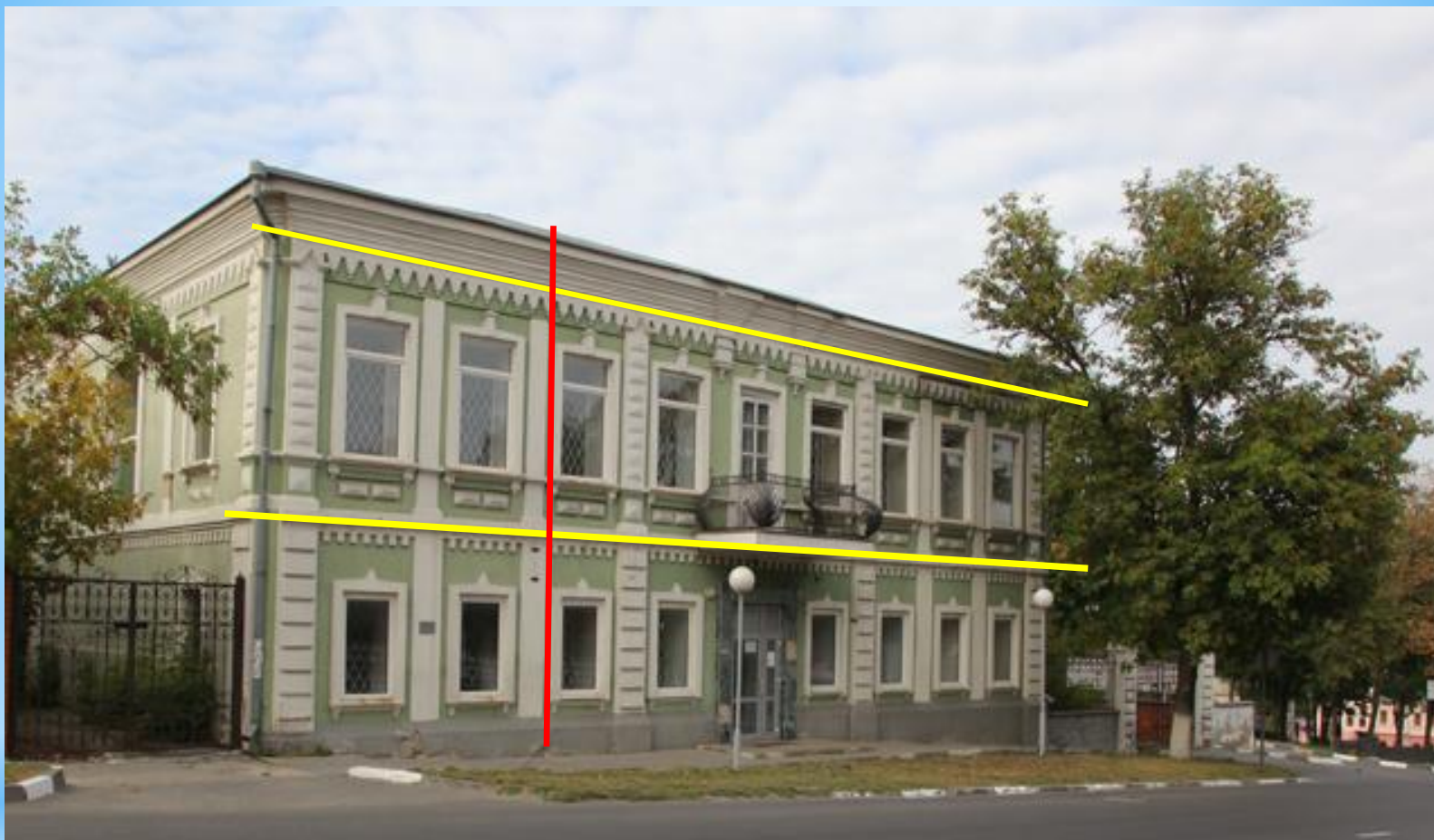
Две прямые в пространстве  $a$  и  $b$

Лежат в одной  
плоскости

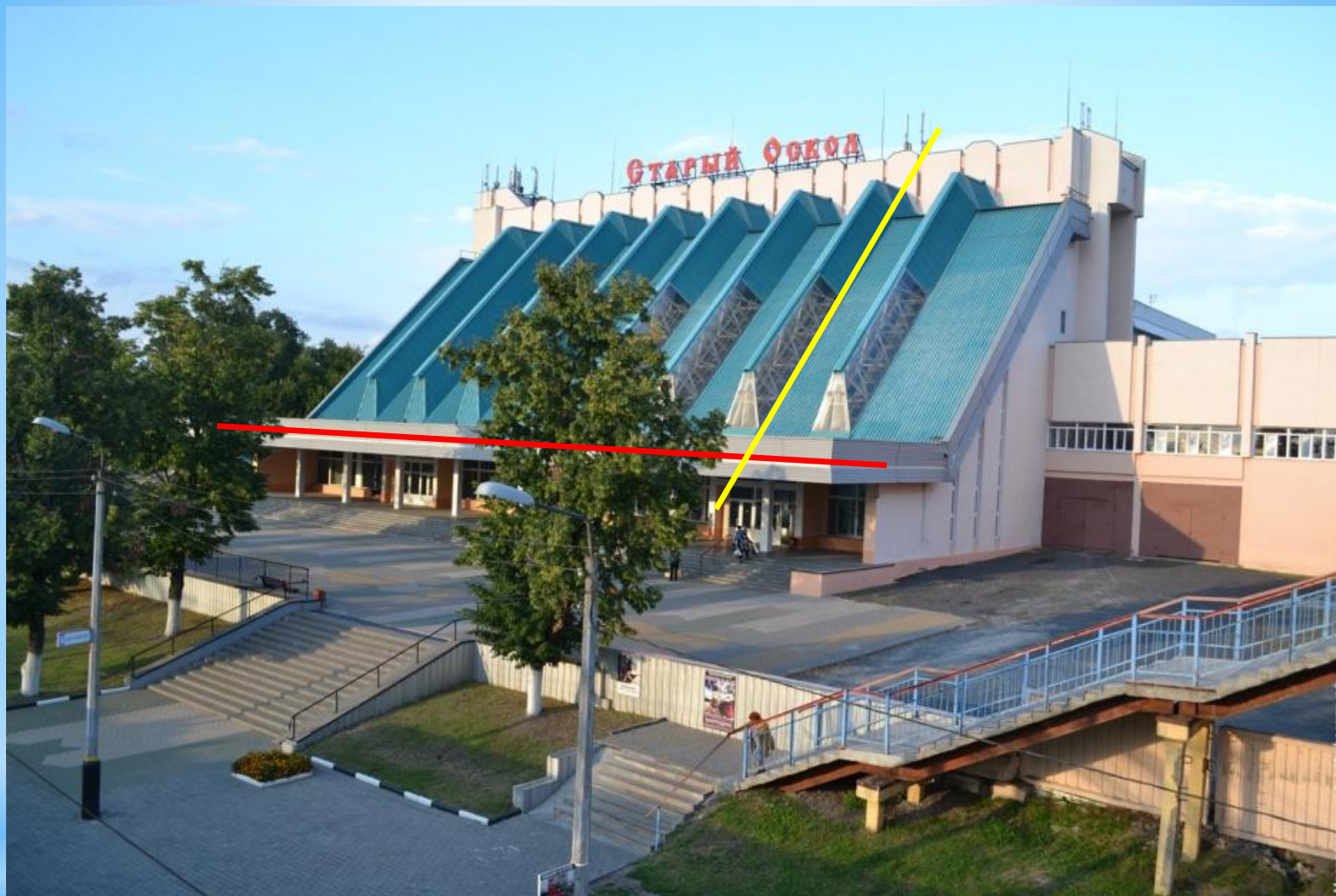
Не лежат в одной плоскости  
Скрещивающиеся  
 $a \div b$

Имеют одну общую точку  
Пересекаются  
 $A \cap b$

Не имеют общих точек  
 $a \parallel b$



Одной из достопримечательностью Старого Оскола являются купеческие домики XIX века. К примеру, дом № 66, в котором сейчас располагается Промышленная палата.



А это современное здание Железнодорожного вокзала Старого Оскола. Оно признано одним из самых необычных в стране.

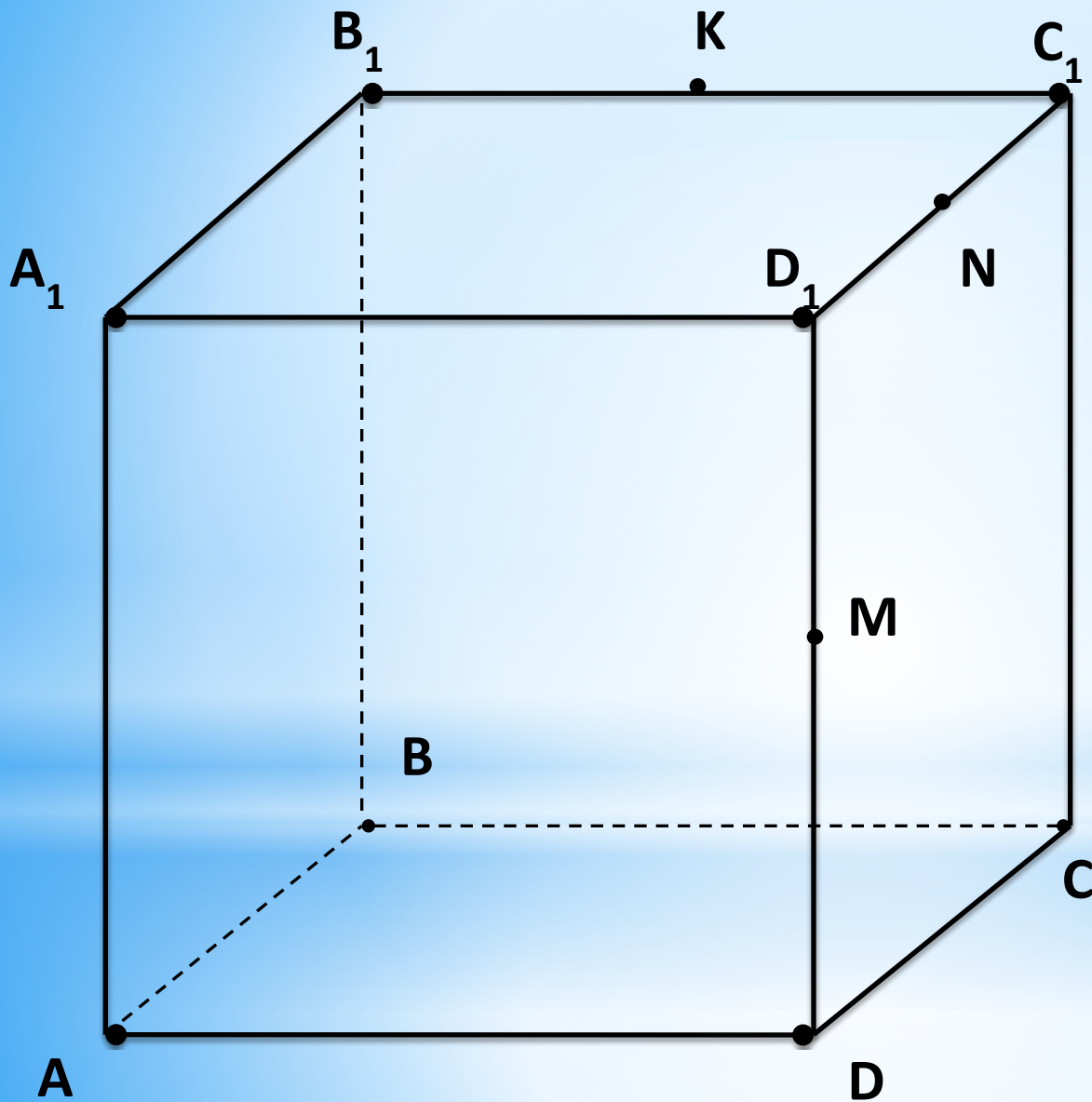


*Alex-31@mail.ru*





Пример скрещивающихся прямых в пространстве



Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  - куб

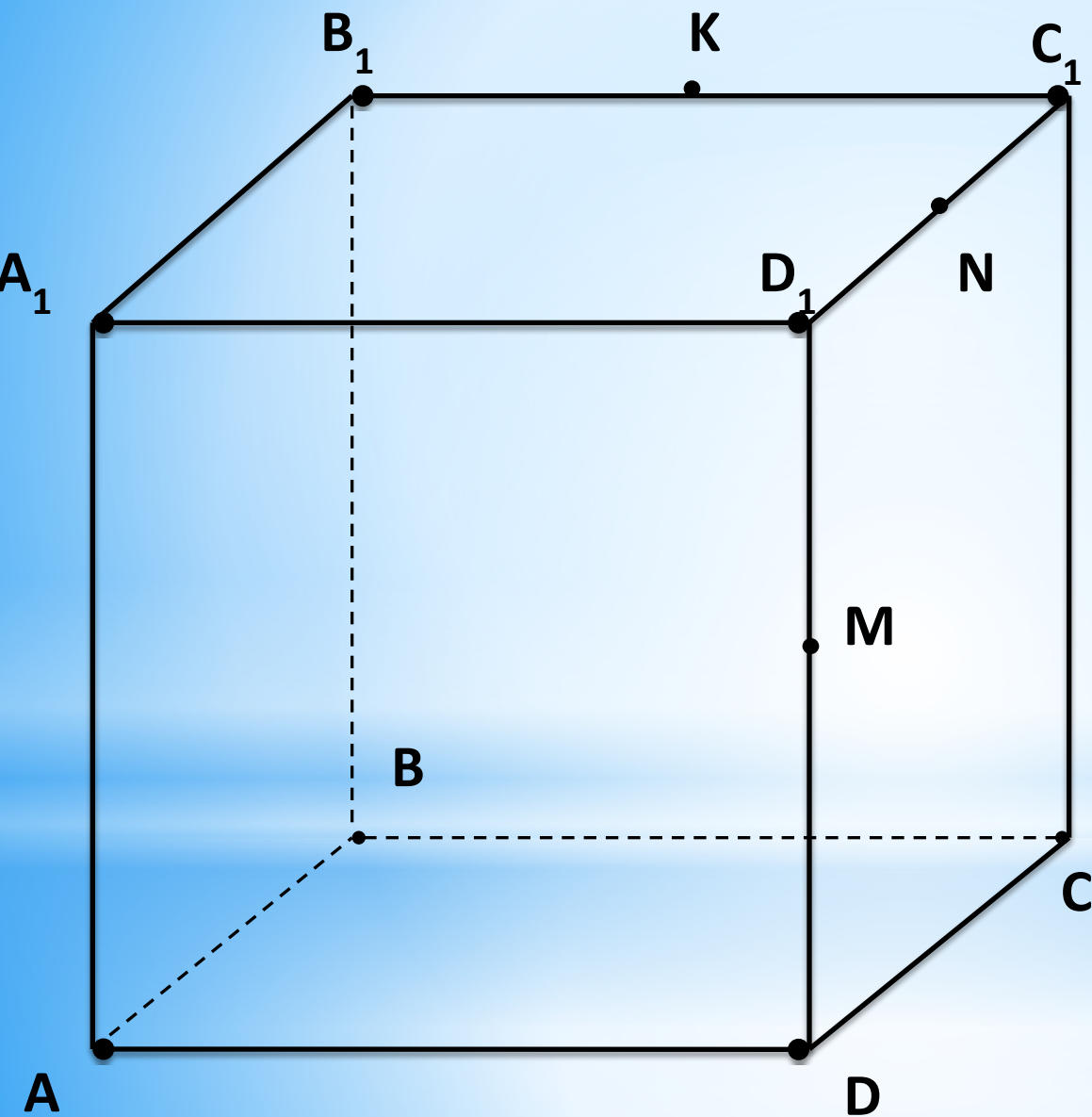
K, M, N - середины ребер

$B_1 C_1$ ,  $D_1 D$ ,  $D_1 C_1$

соответственно.

**Определите** взаимное положение следующих прямых:

- |            |           |
|------------|-----------|
| 1) AB      | $D_1 C_1$ |
| 2) $C_1 N$ | $A_1 D_1$ |
| 3) DC      | $AA_1$    |
| 4) MN      | DC        |
| 5) DM      | $BB_1$    |
| 6) KN      | $AA_1$    |



Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  - куб

$K, M, N$  - середины ребер

$B_1 C_1, D_1 D, D_1 C_1$

соответственно.

**Определите** взаимное положение следующих прямых:

- |            |           |
|------------|-----------|
| 1) $BC$    | $BB_1$    |
| 2) $CC_1$  | $AD$      |
| 3) $AA_1$  | $CC_1$    |
| 4) $MN$    | $BB_1$    |
| 5) $KC_1$  | $AD$      |
| 6) $DM$    | $KN$      |
| 7) $A_1 M$ | $AD$      |
| 8) $NC_1$  | $AB$      |
| 9) $AM$    | $A_1 D_1$ |
| 10) $KC$   | $AD$      |



# Проверь себя

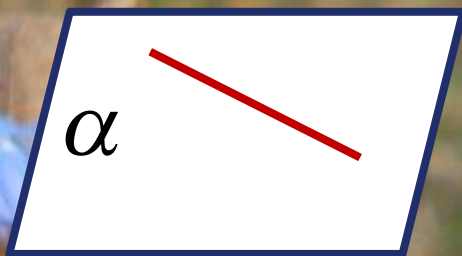
1. ПЕРЕСЕКАЮТСЯ (1;7;9)
2. ПАРАЛЛЕЛЬНЫ (3;5;8)
3. СКРЕЩИВАЮТСЯ (2;4;6;10)

# Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

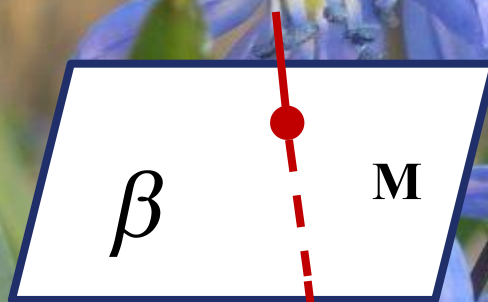
Прямая лежит в плоскости

Прямая пересекает плоскость

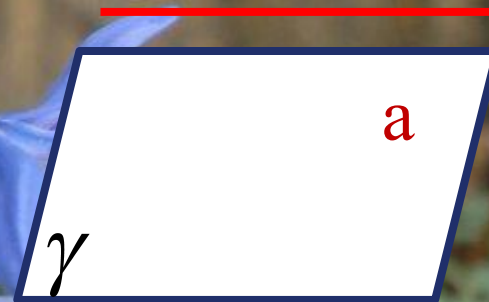
Прямая не пересекает плоскость



$$a \subset \alpha$$



$$a \cap \beta = M$$



$$a \not\subset \gamma$$

Множество общих точек

Единственная общая точка

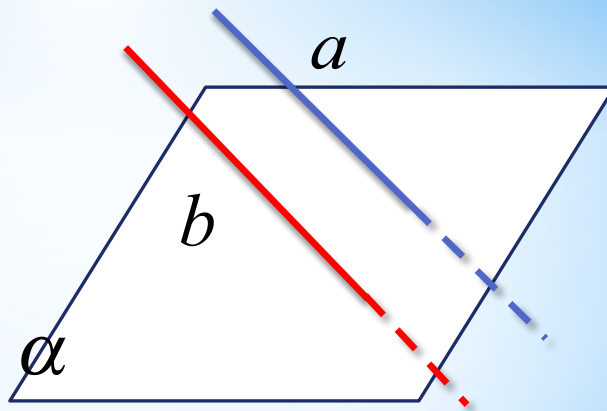
Нет общих точек

# Лемма о параллельных прямым:

Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

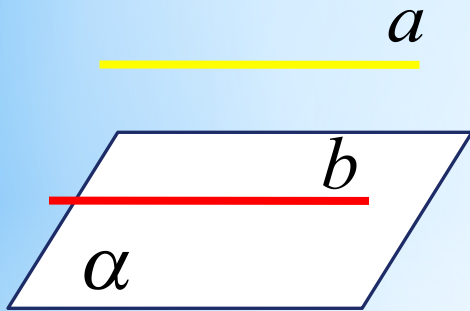
Дано :  $a \parallel b$

Доказать :  $b$  и  $\alpha$  имеют общую точку, причем она единственная



# ИЗУЧЕНИЕ НОВОГО:

## Параллельность прямой и плоскости



$a \notin \alpha$	$\Rightarrow a \parallel \alpha$
$a \parallel b$	
$b \in \alpha$	

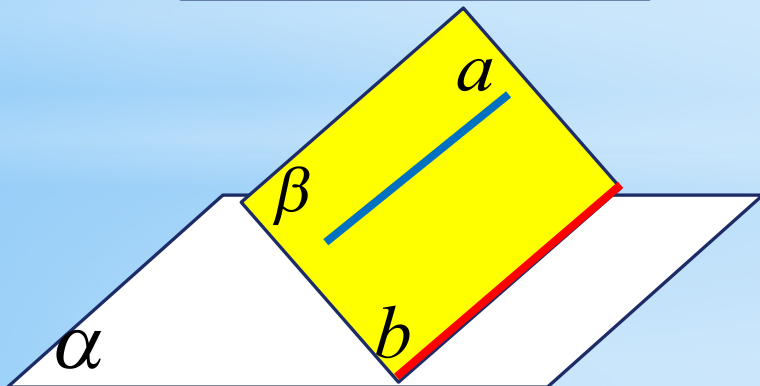
## Т. Признак прямой и плоскости

Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.

# Важные следствия

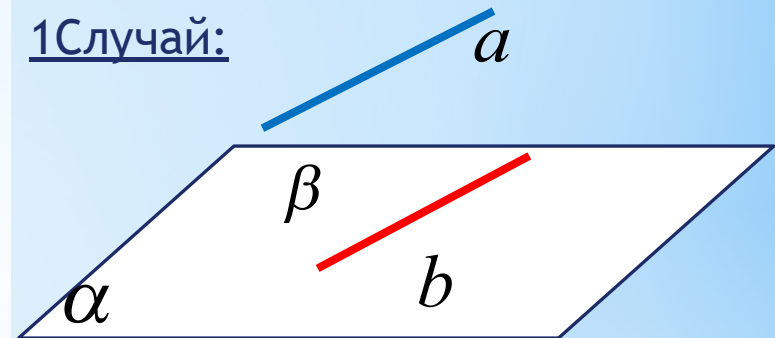
T1. Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \cap \beta = b \\ a \parallel \alpha \\ a \in \beta \end{array} \right| \Rightarrow a \parallel b$$

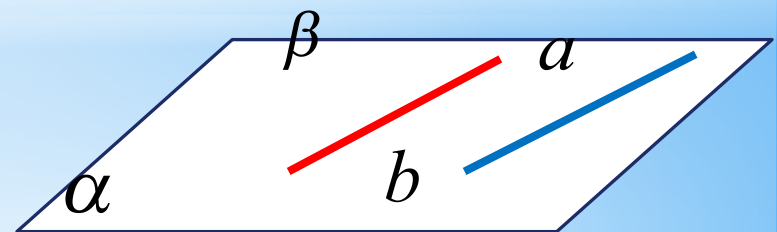


T2. Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости.

1Случай:



2Случай:



# Водонапорни кулери

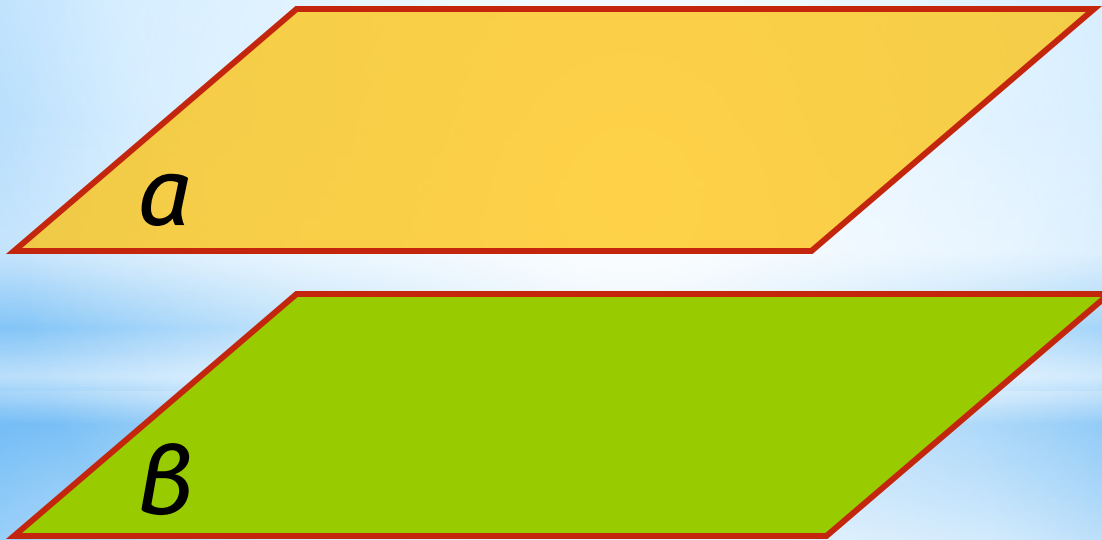


# Параллельность плоскостей



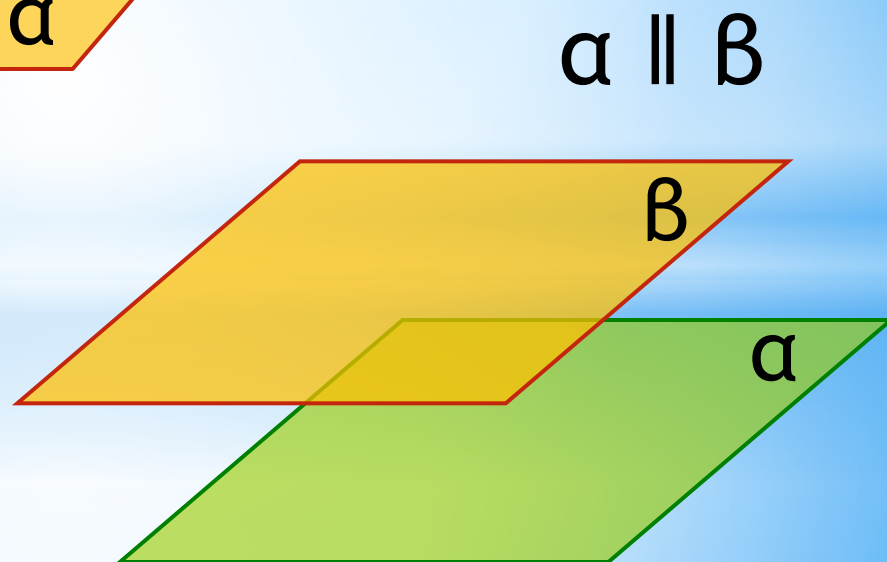
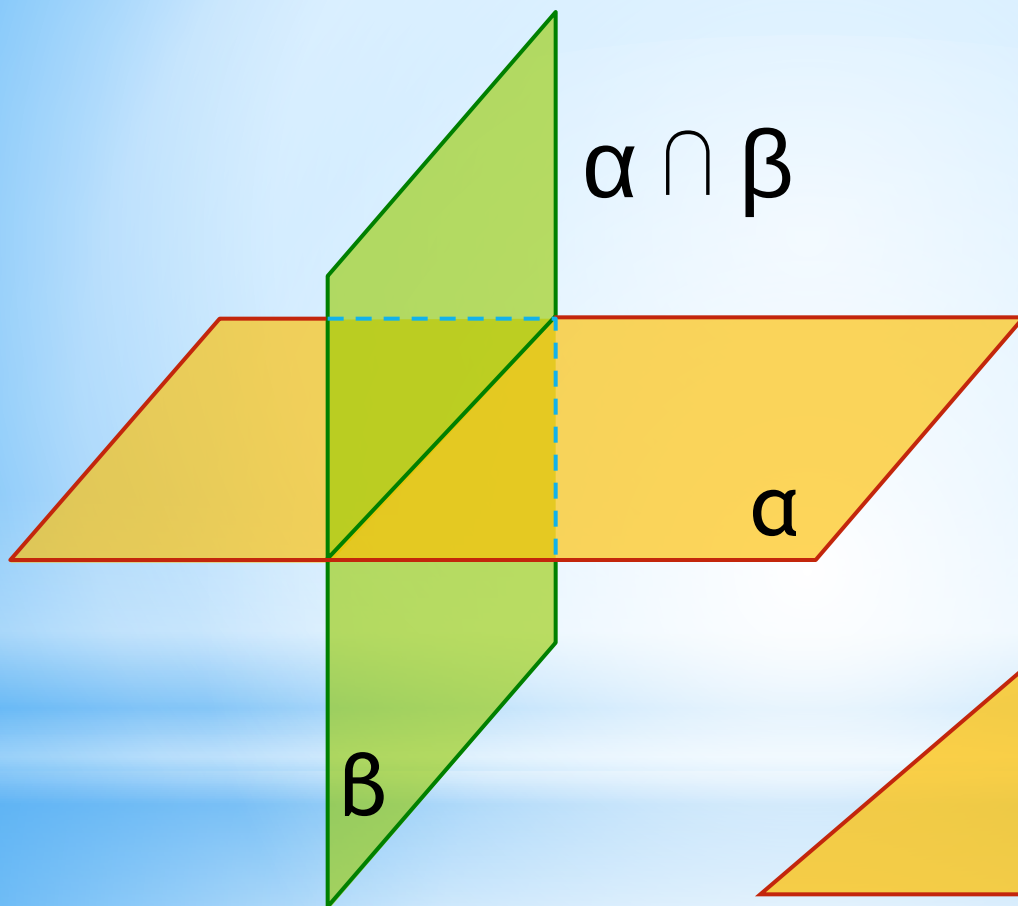
*Две плоскости называются  
параллельными, если они не пересекаются*

$$a \parallel b$$



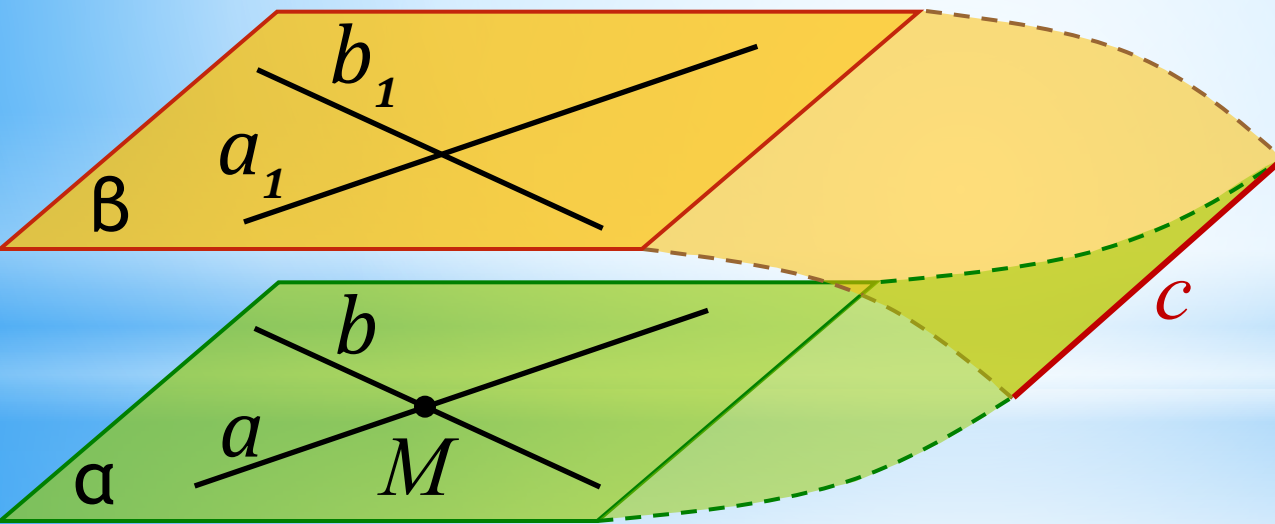


# Взаимное расположение плоскостей



# Признак параллельности плоскостей

*Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны*



Дано:  $\alpha$ ;  $\beta$ ;

$a \subset \alpha$ ;  $a_1 \subset \beta$ ;  $a \parallel a_1$ ;

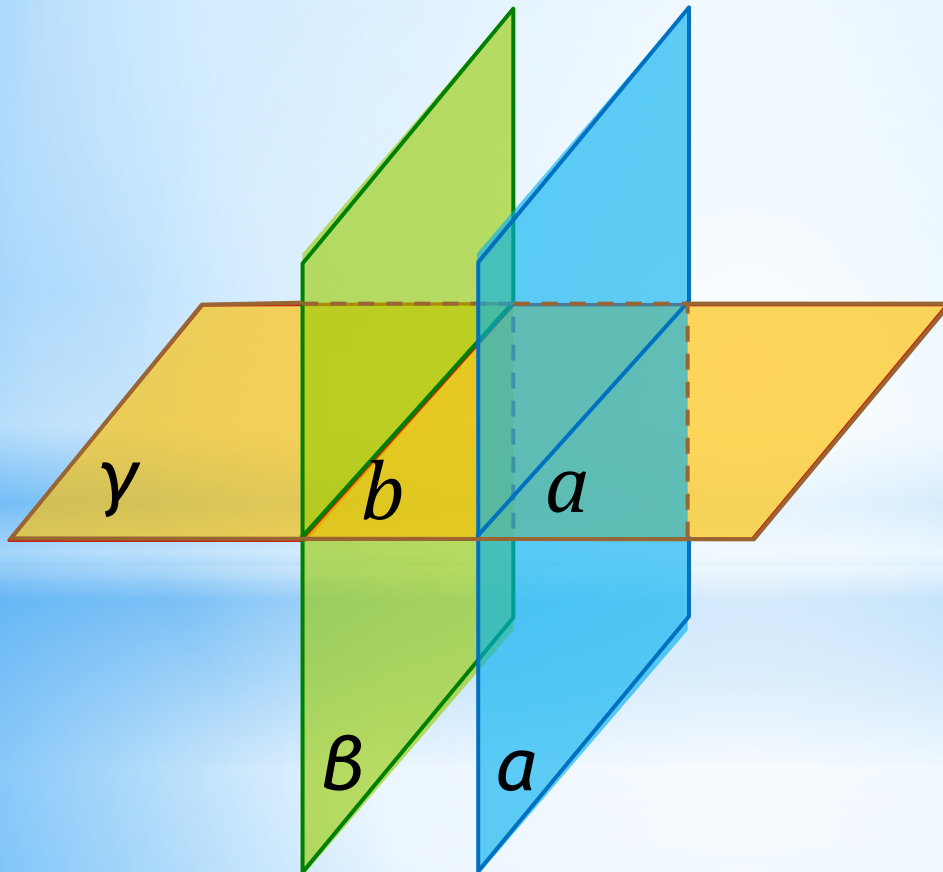
$b \subset \alpha$ ,  $b_1 \subset \beta$ ;  $b \parallel b_1$ ;

$a \cap b = M$ .

Доказать:  $\alpha \parallel \beta$

# 1 свойство параллельных плоскостей

*Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны*



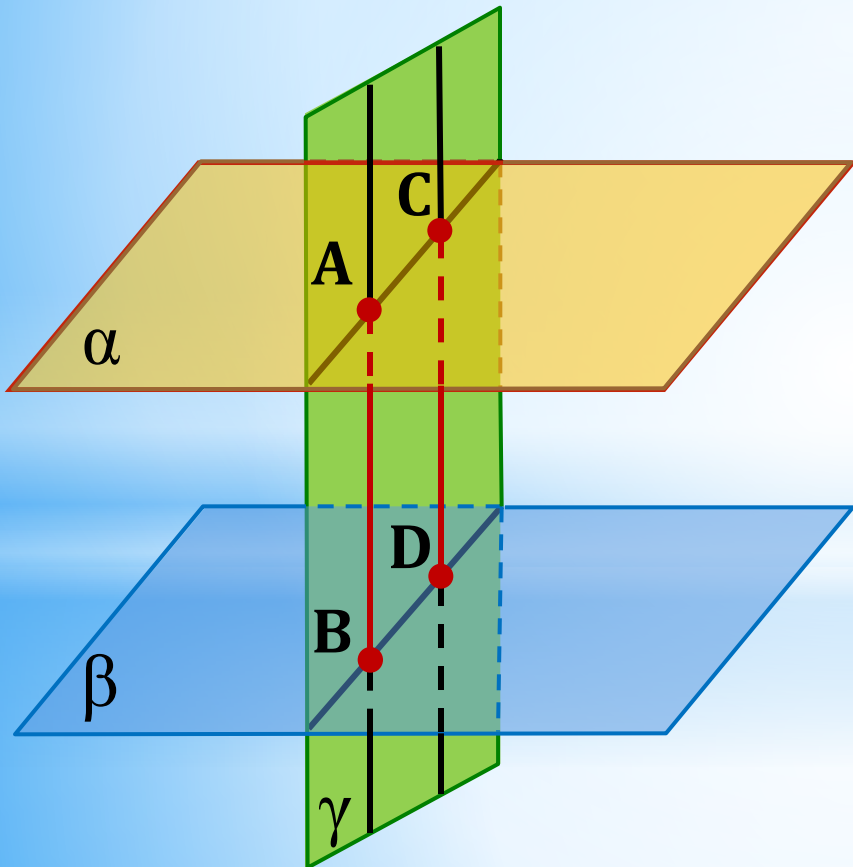
Дано:  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha \parallel \beta$

$\gamma \cap \alpha = a, \gamma \cap \beta = b$

Доказать:  $a \parallel b$

## 2 свойство параллельных плоскостей

*Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны*



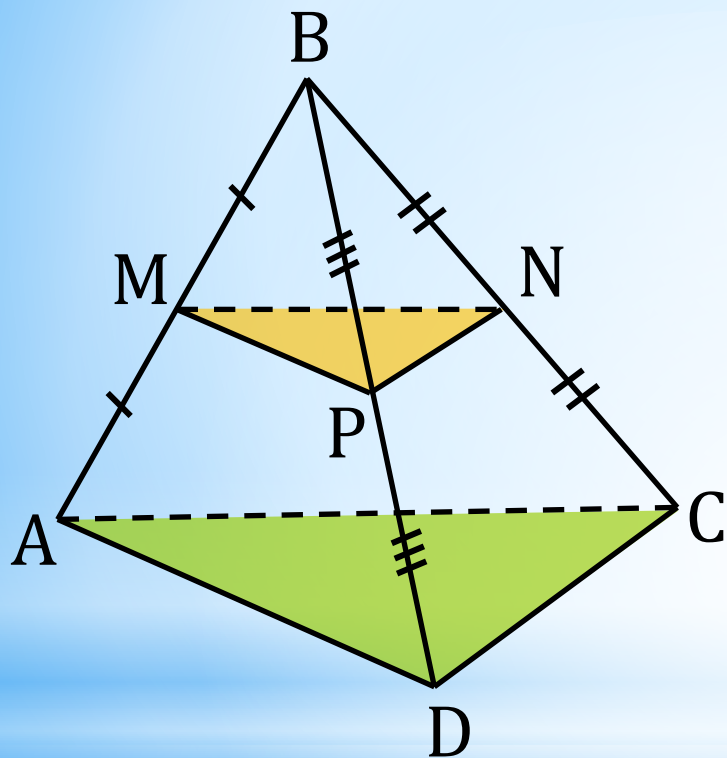
Дано:  $\alpha$ ;  $\beta$ ;  $\gamma$ ;

$\alpha \parallel \beta$ ;  $\gamma \cap \alpha = AC$ ;

$\gamma \cap \beta = BD$ ;  $AB \parallel CD$ .

Доказать:  $AB = CD$

# Задача №54



Дано:  $\triangle ADC$ ;

$B \notin (ADC)$ ;

$AM=MB$ ;  $CN=NB$ ;

$DP=PB$ ;  $S_{\triangle ADC} = 48 \text{ см}^2$

Доказать:

$(MNP) \parallel (ADC)$

# ЗАДАНИЕ ПО ТЕМЕ НА ЗАКРЕПЛЕНИЕ

1. Замените верным словом ошибку в утверждении:

«Прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна ей, если эта прямая параллельна любой прямой, лежащей в данной плоскости».

Ответ: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

2. Продолжите мысль:

«Если две плоскости пересекаются и одна из этих плоскостей проходит через прямую, параллельную другой плоскости, то линия пересечения этих плоскостей...»

Ответ: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

3. В признаке параллельности двух плоскостей какими должны быть прямые одной плоскости, соответственно параллельные прямым другой плоскости?

Ответ: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

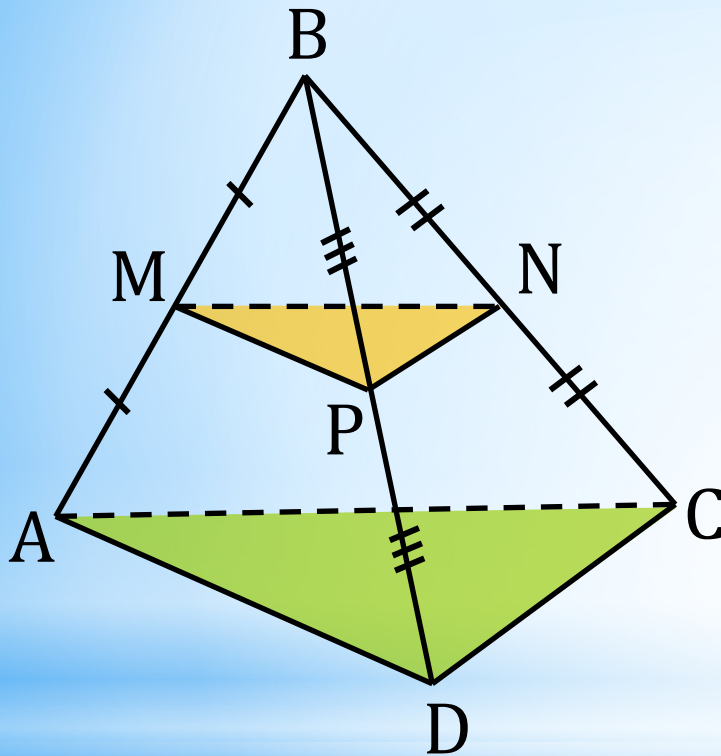
4. Каким свойством обладают две параллельные плоскости, пересеченные третьей?

Ответ: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

5. Сколько плоскостей, параллельных данной плоскости, можно провести через точку, не лежащую на данной плоскости?

Ответ: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

# Задача



Дано:  $\triangle ADC$ ;

$B \notin (ADC)$ ;

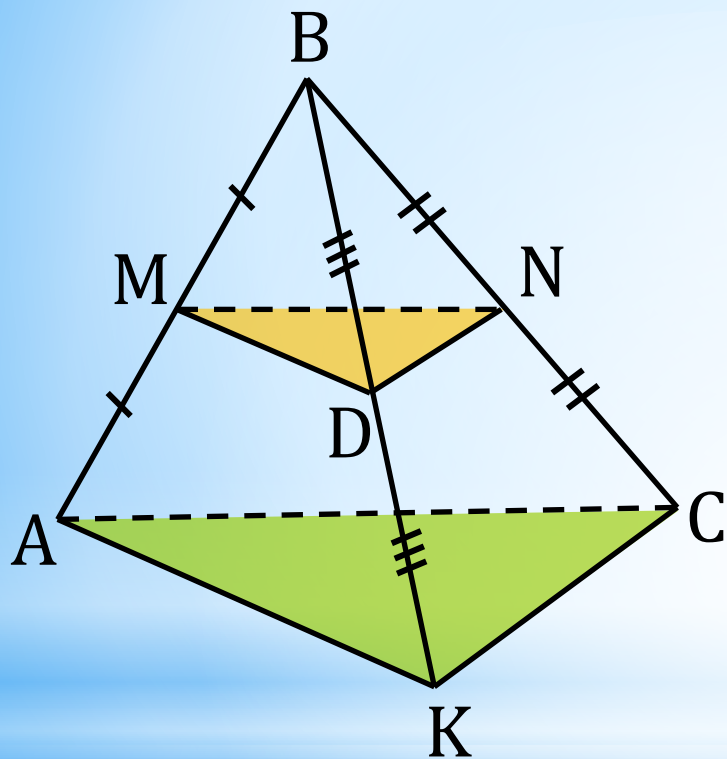
$AM=MB$ ;  $CN=NB$ ;

$DP=PB$ ;  $S_{\triangle ADC} = 48 \text{ см}^2$

а) Доказать:

$(MNP) \parallel (ADC)$

# Задача на закрепление:



Доказать:  
 $(MND) \parallel (AKC)$



# Проверь себя:

1. Замените верным словом ошибку в утверждении:

Ответ: «Прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна ей, если эта прямая параллельна **какой-нибудь** прямой, лежащей в данной плоскости».

2. Ответ: «Если две плоскости пересекаются и одна из этих плоскостей проходит через прямую, параллельную другой плоскости, то линия пересечения этих плоскостей **параллельна данной прямой**»

3. Ответ: Если две **пересекающиеся** прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то такие плоскости параллельны.

4. Ответ: Линии пересечения плоскостей **параллельны**.

5. Ответ: **Одну**.

# Проверь себя:

## ЗАДАЧА

Дано:

$$AM=MB,$$

$$BD=DK$$

$$BN=NC$$

Доказать, что  $MND \parallel AKC$ .

## Решение:

а) В  $\triangle ABC$ :  $MN$  - средняя линия,  $MN \parallel AC$ ,  $MN = \frac{1}{2}AC$ .

В  $\triangle BCK$ :  $DN$  - средняя линия,  $DN \parallel KC$ ,  $DN = \frac{1}{2}KC$ .

*По теореме: Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.*

Плоскости  $MDN$  и  $AKC$  параллельны.

$\sphericalangle MND = \sphericalangle ACK$  - как углы с соответственно параллельными сторонами.

# Задача №63

(дополнительная)

Дано:  $\alpha, \beta; \alpha \parallel \beta;$

$\angle BAC; AB \cap \alpha = A_1; AB \cap \beta = A_2;$

$AC \cap \alpha = B_1; AC \cap \beta = B_2;$

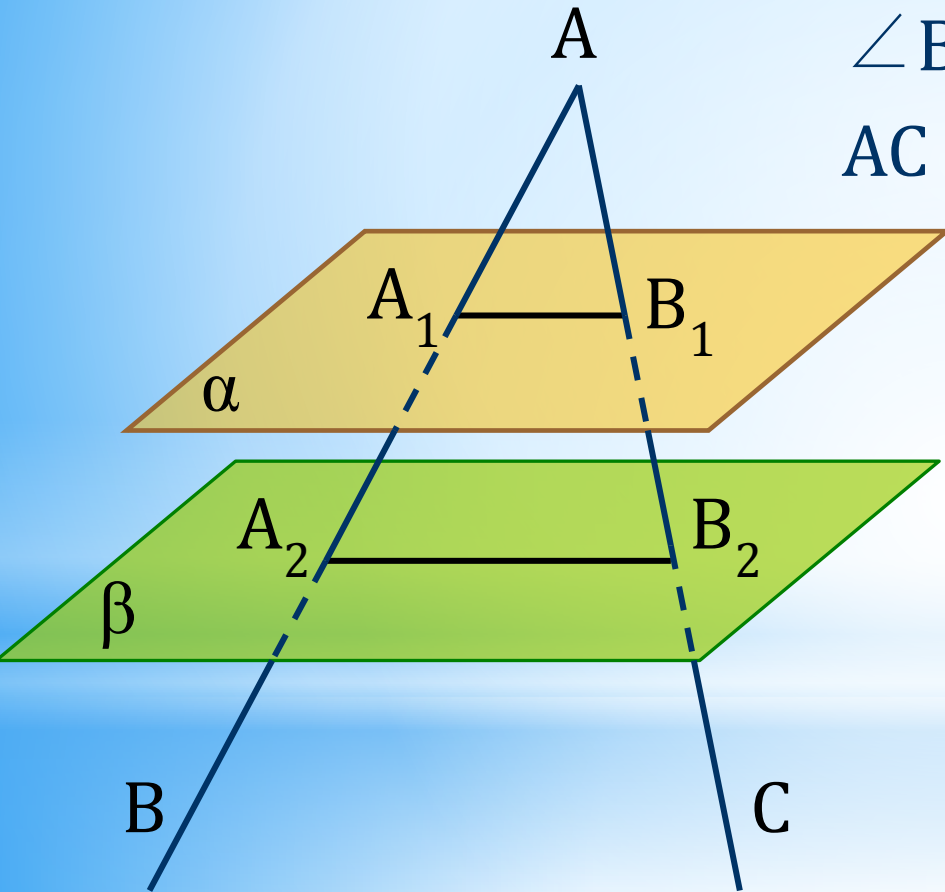
а)  $A_1A_2 = 2AA_1; A_1A_2 = 12\text{см};$   
 $AB_1 = 5\text{см};$

б)  $A_1B_1 = 18\text{см}; AA_1 = 24\text{см};$   
 $AA_2 = 1,5A_1A_2.$

Найти:

а)  $AA_2$  и  $AB_2;$

б)  $A_2B_2$  и  $AA_2.$



# Домашняя работа:

1. Плоскости параллельны, прямая  $m$  лежит в плоскости  $\alpha$ . Докажите, что прямая  $m$  параллельна плоскости  $\beta$ .

2. Графический тест.

Сделайте рисунки:

1.  $\alpha \cap \beta = a$ . Прямая  $b \parallel \alpha, b \parallel \beta$ .

2. Плоскости  $\alpha \parallel \gamma, \beta \parallel \gamma$ . Как могут быть расположены плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ ?

3. Плоскости  $\alpha \parallel \beta, \alpha \cap \gamma = a, \beta \cap \gamma = b$ . Как расположены прямые  $a$  и  $b$ ?

4.  $\alpha \cap \beta = a$ . Изобразите, если возможно, плоскость  $\gamma$ , такую, что  $\alpha \parallel \gamma, \beta \parallel \gamma$ .

5. Плоскости  $\alpha \cap \beta = a, \alpha \cap \gamma = c, \gamma \cap \beta = b$ . Могут ли быть параллельными прямые  $c$  и  $b$ .

A close-up photograph of a flowering branch, likely a cherry or plum, against a clear blue sky. The branch is covered with numerous small, white, five-petaled blossoms with prominent yellow stamens. Interspersed among the open flowers are many unopened buds, which are a deep red color. The background is a bright, clear blue sky, with some out-of-focus branches and buds visible in the distance.

**Спасибо за внимание!**