Лекция

Метод Ньютона: 1- и 2-я интерполяционные формулы Ньютона.

Понятие *конечных разностей*

- Пусть задана функция $y=f(x)$ на отрезке $[x_0,x_n]$, который разбит на n одинаковых отрезков (случай равноотстоящих значений аргумента). $\Delta x=h=const$. Для каждого узла x_0, $x_1=x_0+h$, …, $x_n=x_0+n\cdot h$ определены значения функции в виде:

$$f(x_0)=y_0,\ f(x_1)=y_1,\ \ldots,\ f(x_n)=y_n.$$

Понятие *конечных разностей*

- **Конечные разности первого порядка**

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$
$$\Delta y_1 = y_2 - y_1$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$$

- **Конечные разности второго порядка**

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$$
$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$\Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}$$

- Аналогично определяются конечные разности высших порядков:

$$\Delta^k y_0 = \Delta^{k-1} y_1 - \Delta^{k-1} y_0$$
$$\Delta^k y_1 = \Delta^{k-1} y_2 - \Delta^{k-1} y_1$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i, \qquad i = 0,1,\ldots,n-k.$$

Понятие *конечных разностей*

- Конечные разности функций удобно располагать в таблицах, которые могут быть:

1. Диагональными;
2. Горизонтальными.

Диагональная таблица

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
x_0	y_0					
		Δy_0				
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$			
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\Delta^5 y_0$
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$	
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$		
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$			
		Δy_4				
x_5	y_5					

Горизонтальная таблица

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$		
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$			
x_4	y_4	Δy_4				
x_5	y_5					

Первая интерполяционная формула Ньютона

- Пусть для функции $y = f(x)$ заданы значения $y_i = f(x_i)$ для ***равностоящих значений*** независимых переменных: $x_n = x_o + nh$, где h - *шаг интерполяции*.
- Необходимо найти полином $P_n(x)$ степени не выше n, принимающий в точках (узлах) x_i значения:

$$P_n(x_i) = y_i, \qquad i=0,\dots,n.$$

- Запишем интерполирующий полином в виде:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)\dots(x - x_{n-1}).$$

- Задача построения многочлена сводится к определению ***коэффициентов a**$_i$* из условий:

$$P_n(x_0)=y_0$$

$$P_n(x_1)=y_1$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \; \cdot$$

$$P_n(x_n)=y_n$$

Определение коэффициентов

- Полагаем в интерполирующий полиноме $x = x_о$, тогда, т.к. второе, третье и другие слагаемые равны ***о***,
- $P_n(x_о) = y_о = a_о$ $a_о = y_о$.
- Найдем коэффициент $\boldsymbol{a_1}$.
- При $x = x_1$ получим:

$$P_n(x_1) = y_1 = y_0 + \mathbf{a}_1(x_1 - x_0);$$
$$y_1 = y_0 + \mathbf{a}_1(x_1 - x_0),$$
$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h}.$$

Определение коэффициентов

- Для определения $\boldsymbol{a_2}$ составим конечную разность второго порядка.
- При $x = x_2$ получим:

$$P_n(x_2) = y_2 = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_0 + 2\Delta y_0 + \mathbf{a}_2 2h^2,$$

$$a_2 = \frac{y_2 - y_0 - 2\Delta y_0}{2h^2} = \frac{y_2 - y_0 - 2y_1 + 2y_0}{2h^2} = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2} =$$

$$= \frac{(y_2 - y_1) - (y_1 - y_0)}{2h^2} = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}.$$

Построение многочлена

- Аналогично можно найти другие коэффициенты. Общая формула имеет вид.

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k!\,h^k}, \qquad k=1..n.$$

- Подставляя эти выражения в формулу полинома, получаем:

$$P_n(X) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!\cdot h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\cdot h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\cdot h^n}(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}),$$

- где x_i ,y_i – узлы интерполяции; x – текущая переменная; h – разность между двумя узлами интерполяции
- h – величина постоянная, т.е. узлы интерполяции ***равноотстоят*** друг от друга.

Первая интерполяционная формула Ньютона

$$P_n(X) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1! \cdot h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! \cdot h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n! \cdot h^n}(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}),$$

- Этот многочлен называют **интерполяционным полиномом Ньютона** для интерполяции в начале таблицы (интерполирование «вперед») или ***первым*** *полиномом Ньютона.*

Первая интерполяционная формула Ньютона

- Для практического использования этот полином записывают в преобразованном виде, вводя обозначение $t=(x-x_0)/h$, тогда

$$P_n(x)=y_0+t\cdot\Delta Y_0+\frac{t\cdot(t-1)}{2!}\cdot\Delta^2 y_0+\ldots+\frac{t\cdot(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\cdot\Delta^n y_0\,.$$

- Эта ***формула применима*** для вычисления значений функции для значений аргументов, ***близких к началу интервала*** интерполирования.

Пример

- Дана таблица значений теплоёмкости вещества в зависимости от температуры $C_p = f(T)$. Определить значение теплоёмкости в точке T=450 K, n=3; h=100

Таблица 1

x (T)	300	400	500	600
Y (Cp)	52.88	65.61	78.07	99.24

Пример

Составим таблицу конечных разностей функции.

Таблица 2

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
300	52.88	12.73	-0.27	8.98
400	65.61	12.46	8.71	
500	78.07	21.17		
600	99.24			

Воспользуемся первой интерполяционной формулой, запишем интерполяционный многочлен при x=450 К.

$$P_3(450) = 52.88 + \frac{12.73}{100}(450-300) - \frac{0.27}{2!100^2}(450-300)(450-400) +$$

$$+\frac{8.98}{3!100^3}(450-300)(450-400)(450-500) = 71.31$$

Пример

- Таким образом, теплоемкость при температуре 450 K будет:

$$C_p(450)=71{,}31 \text{Дж/(моль} \cdot \text{K)}.$$

- Значение теплоемкости при T=450 K получили такое же, что и рассчитанное по формуле Лагранжа.

Вторая интерполяционная формула Ньютона

Область применения

- ***Второй*** интерполяционный полином Ньютона применяется для нахождения значений функций в точках, расположенных в ***конце интервала интерполирования.***
- Запишем интерполяционный многочлен в виде:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots \quad (1)$$
$$\dots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})\dots(x - x_1).$$

Определение коэффициентов

- Коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ определяем из условия:

$$P_n(x_i) = y_i \qquad i=0,\ldots,n.$$

- 1.Полагаем в интерполяционном многочлене $x = x_n$, тогда

$$P_n(x_n) = a_0,$$

$$P_n(x_n) = y_n = a_0,$$

$$a_0 = y_n.$$

Определение коэффициентов

- 2.Полагаем $x = x_{n-1}$, тогда:

$P_n(x_{n-1}) = y_{n-1} = y_n + a_1(x_{n-1} - x_n)$, $\qquad h = x_n - x_{n-1}$,

Следовательно: $a_1 = \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} = \dfrac{\Delta y_{n-1}}{h}$.

- 3.Полагаем $x = x_{n-2}$, тогда

$$P_n(x_{n-2}) = y_{n-2} = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h}(x_{n-2} - x_n) + a_2(x_{n-2} - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1}),$$

$$y_{n-2} = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h}(-2h) + a_2 \cdot 2h^2 = y_n - 2\Delta y_{n-1} + a_2 2h^2,$$

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2! h^2}.$$

Определение коэффициентов

Аналогично можно найти другие коэффициенты многочлена:

$$a_3 = \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!h^3} \ ,$$

....

$$a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} \ .$$

Вторая интерполяционная формула Ньютона

- Подставляя эти выражения в формулу (1), получим *вторую интерполяционную формулу Ньютона* или многочлен Ньютона для интерполирования «назад».

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) +$$

$$+ \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!h^3}(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1).$$

Вторая интерполяционная формула Ньютона

- Введем обозначения:

$$\frac{x-x_n}{h}=t \text{ или } x=x_n+th,$$

$$\frac{x-x_{n-1}}{h}=\frac{x-(x_n-h)}{h}=t+1,$$

$$\frac{x-x_{n-2}}{h}=\frac{x-(x_{n-1}-2h)}{h}=t+2,$$

....

$$\frac{x-x_1}{h}=\frac{x(x_n-2h)}{h}=t+n-1.$$

Вторая интерполяционная формула Ньютона

- Произведя замену , получим

$$P_n(x) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

- Это ***вторая формула Ньютона для интерполирования «назад».***

Пример

- Вычислить теплоемкость (табл.1) для температуры T=550 K.
- Воспользуемся второй формулой Ньютона и соответствующими конечными разностями (табл. 2)

Пример

$$P_3(x) = y_3 + \frac{\Delta y_2}{h}(x - x_3) + \frac{\Delta^2 y_1}{2!h^2}(x - x_3)(x - x_2) +$$

$$+ \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x - x_3)(x - x_2)(x - x_1),$$

$$P_3(550) = 99.24 + \frac{21.17}{100}(550 - 600) + \frac{8.71}{2!100^2}(550 - 600)(550 - 500) +$$

$$+ \frac{8.98}{3!100^3}(550 - 600)(550 - 500)(550 - 400) = 87.01.$$

- Следовательно, значение теплоемкости при температуре 550 К равно:
- Ср(550)=97,01 Дж/(моль К).

Аппроксимация функций

- Особенностью интерполяции являлось то, что интерполирующая функция строго проходит через узловые точки таблицы, т. е. рассчитанные значения совпадали с табличными: $y_i=f(x_i)$.
- Эта особенность обуславливалась тем, что количество коэффициентов в интерполирующей функции (m) было равно количеству табличных значений (n)

Особенности аппроксимации

- если для описания табличных данных будет выбрана функция с меньшим количеством коэффициентов ($m<n$), что часто встречается на практике, то уже нельзя подобрать коэффициенты функции так, чтобы функция проходила через каждую узловую точку.

Особенности аппроксимации

В лучшем случае, она будет проходить каким – либо образом между ними и очень близко к ним (рис. 1).

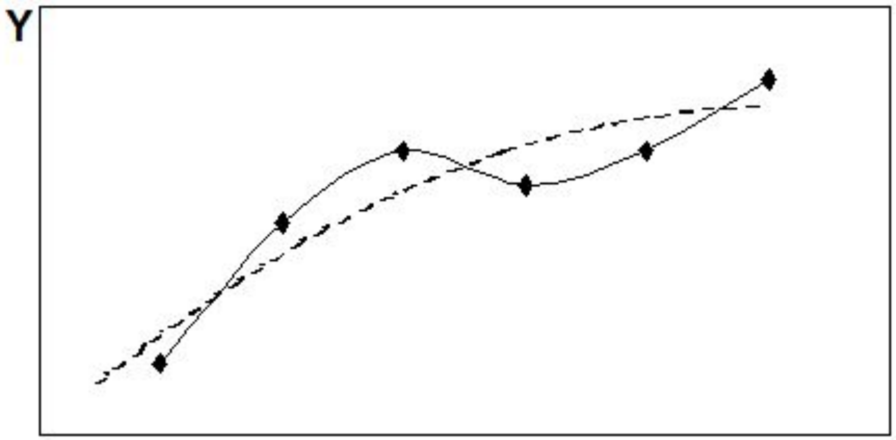

Рис. 1

– интерполирующая функция,

- - аппроксимирующая функция.

- Такой способ описания табличных данных называется ***аппроксимацией***, а функция – ***аппроксимирующей.***

Условия применения аппроксимации

1. Когда количество табличных значений очень велико. В этом случае интерполирующая функция будет очень громоздкой. Удобнее выбрать более простую в применении функцию с небольшим количеством коэффициентов, хотя и менее точную.

Условия применения аппроксимации

2. Когда вид функции заранее определен. Такая ситуация возникает, если требуется описать экспериментальные точки какой-либо теоретической зависимостью.

Условия применения аппроксимации

3. Аппроксимирующая функция может сглаживать погрешности эксперимента, в отличие от интерполирующей функции.

- Так, на рис.2 точками показаны табличные данные – результат некоторого эксперимента. Разброс данных объясняется погрешностью эксперимента.

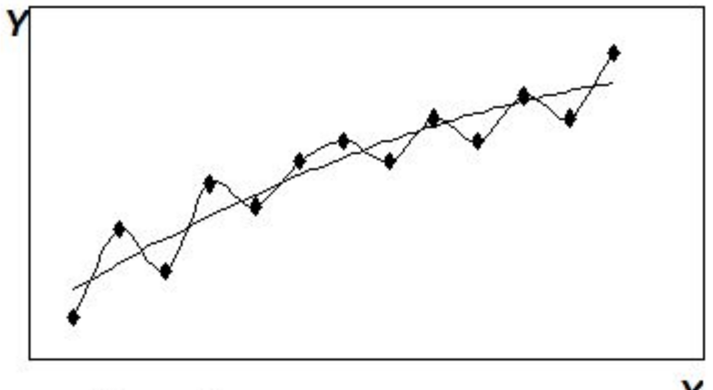

Рис 2

Условия применения аппроксимации

- интерполирующая функция, проходя через каждую точку, будет повторять ошибки эксперимента, иметь множество экстремумов: минимумов и максимумов – и в целом неверно отображать характер зависимости *Y* от *X*. Этого недостатка лишена аппроксимирующая функция.

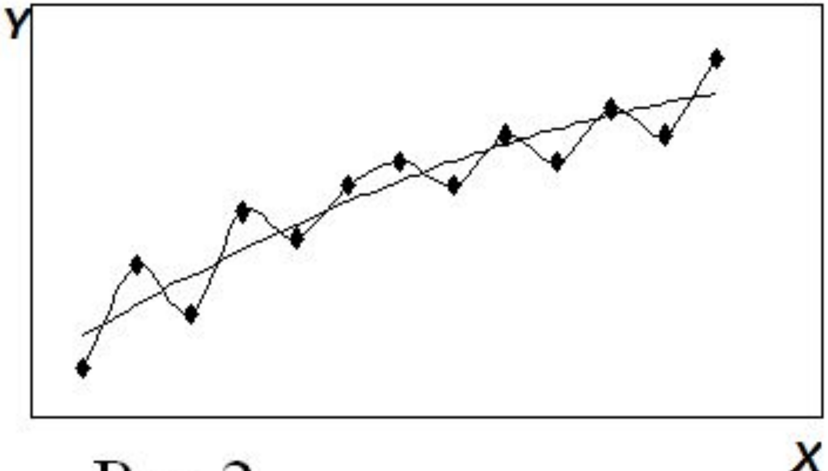

Рис 2

Условия применения аппроксимации

4. Интерполирующей функцией невозможно описать табличные данные, в которых есть несколько точек с одинаковым значением аргумента.

- Такая ситуация возможна, если один и тот же эксперимент проводится несколько раз при одних и тех же исходных данных. Однако это не является ограничением для использования аппроксимации, где не ставится условие прохождения графика функции через каждую точку.