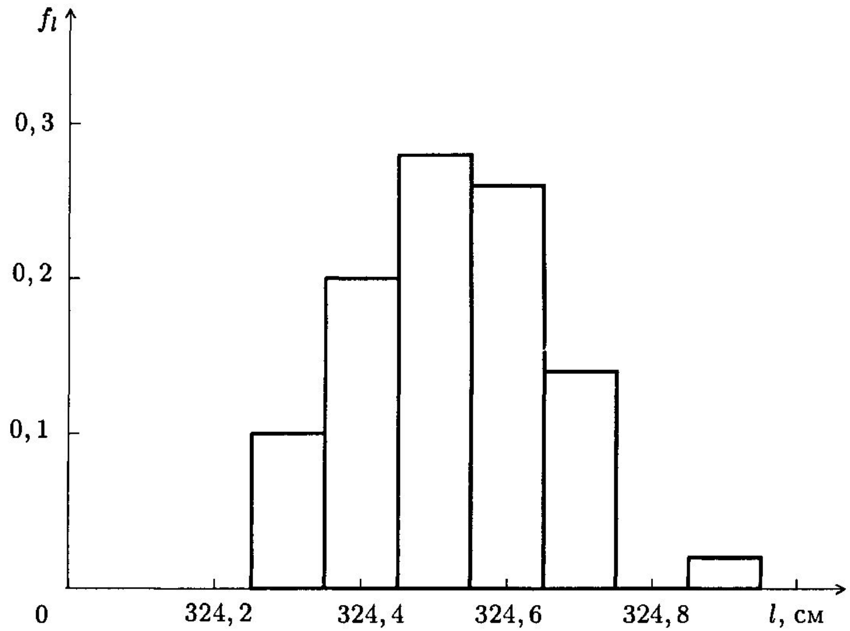
Статистическая обработка результатов эксперимента

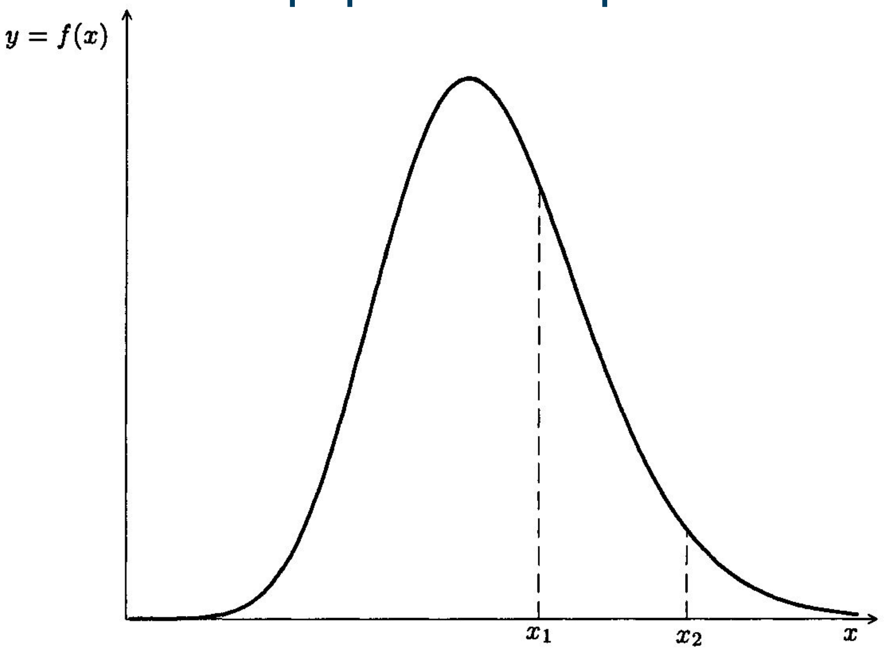
Дискретная переменная



$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}(x_i) = 1,$$

$$\overline{x} \equiv \sum_{i=1}^{\infty} x_i\, \mathcal{P}(x_i).$$

Непрерывная переменная



$$\mathcal{P} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1,$$

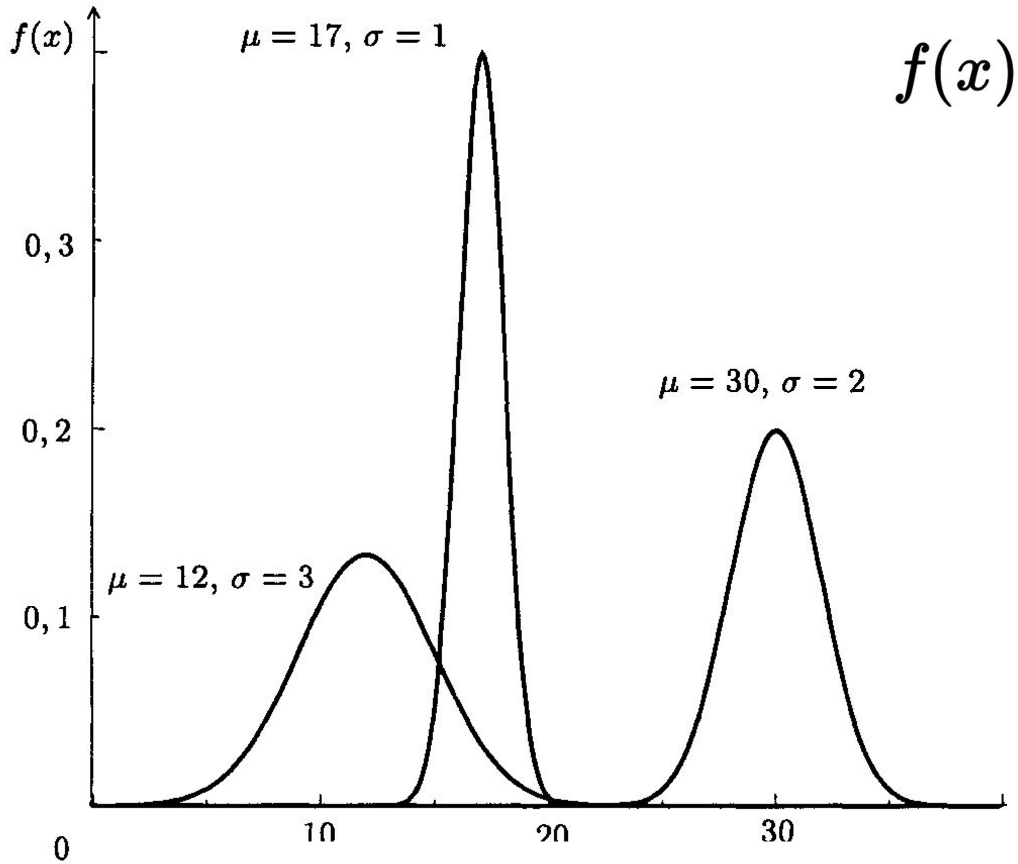
$$\overline{x} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx.$$

Ширина распределения может характеризоваться дисперсией (квадратом отклонения от среднего)

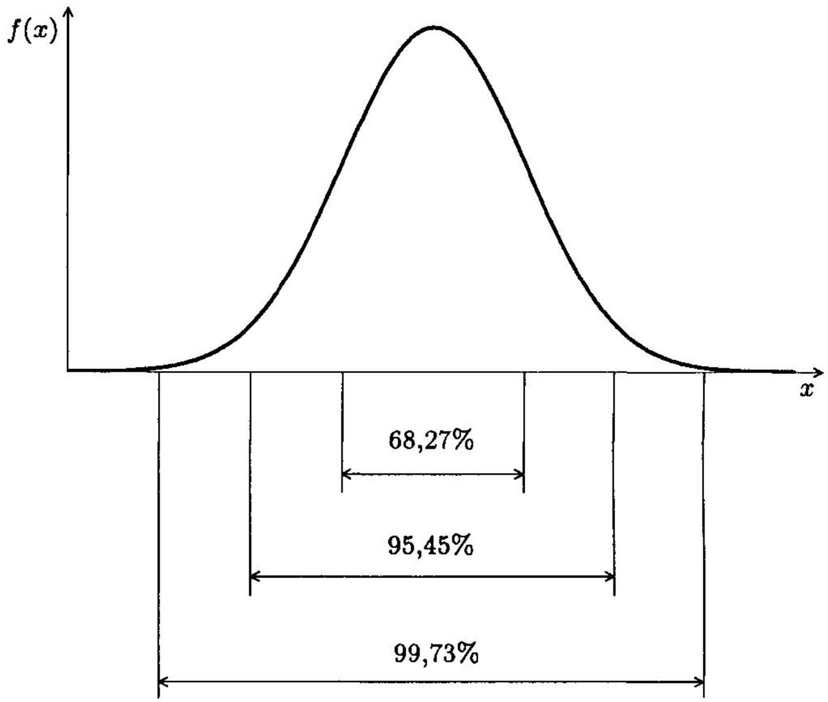
$$D \equiv \sigma^2 \equiv \sum_{i=1}^{\infty}(x_i - \overline{x})^2\, \mathcal{P}(x_i)$$

$$D \equiv \sigma^2 \equiv \overline{(x-\overline{x})^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\overline{x})^2 f(x)dx$$

Нормальное распределение (распределение Гаусса)



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



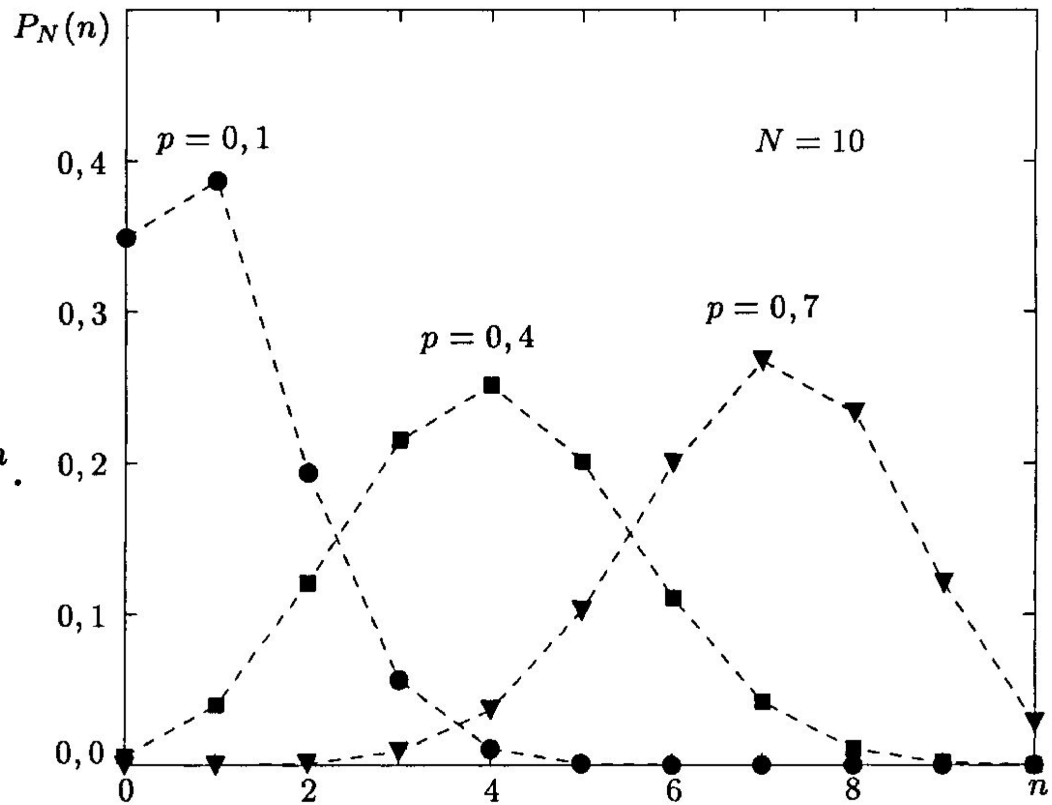
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}dy = 1.$$

Определение предэкспоненциального множителя

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dxdy\, \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-r^2} r dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$$

Другие виды распределений:
- Биноминальное (дискретное)
- Стьюдента
- Пуассона
- Лоренца
- Гамма-распределение
– распределение χ^2

Биноминальное распределение



$$P_N(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}.$$

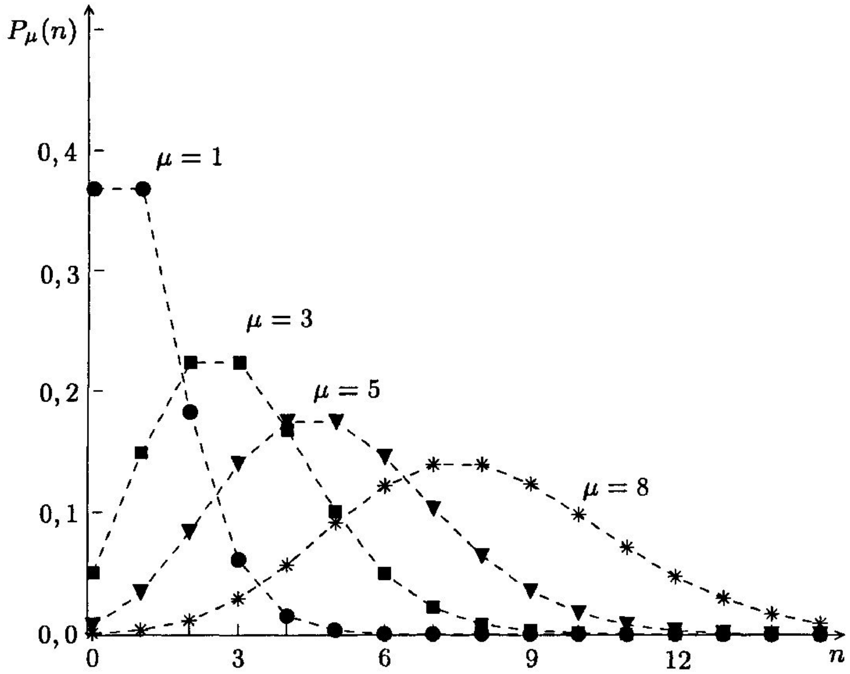
$$\overline{n} = \sum_{n=1}^{N} n P_N(n) = Np$$

$$\sigma = \sqrt{Np(1-p)}.$$

δ – абсолютная погрешность

$$\delta \equiv \frac{\sigma}{\overline{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Распределение Пуассона



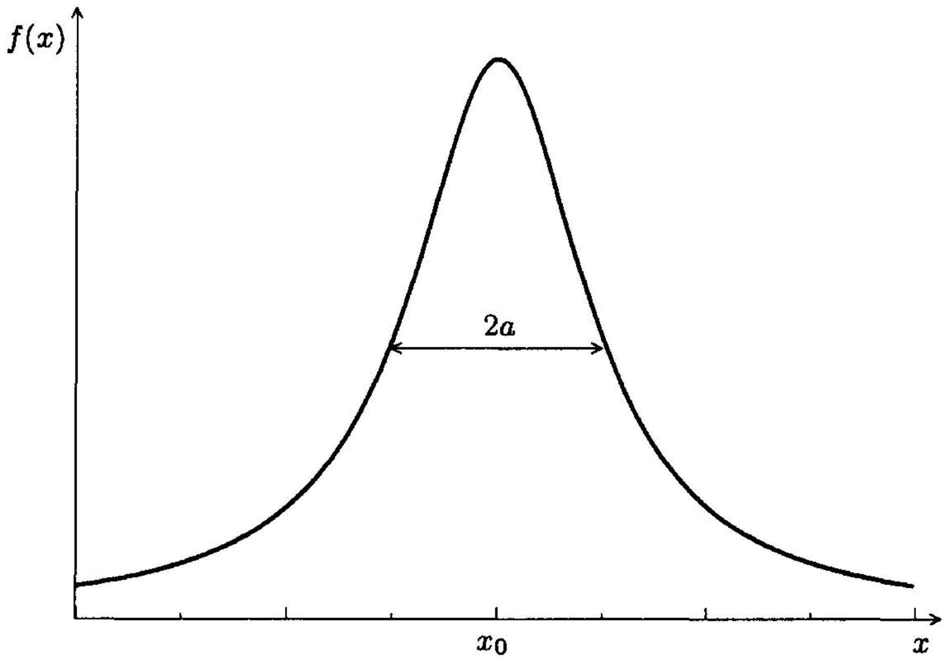
$$N \to \infty$$

$$Np = \text{const} \equiv \mu \ (\text{т. е. } p \to 0)$$

$$P_\mu(n) = \lim_{\substack{N \to \infty \\ p \to 0 \\ Np = \mu}} \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}$$

$$P_\mu(n) = \mathrm{e}^{-\mu} \frac{\mu^n}{n!}$$

Распределение Лоренца



$$f(x) = \frac{a}{\pi} \frac{1}{(x-x_0)^2 + a^2}$$

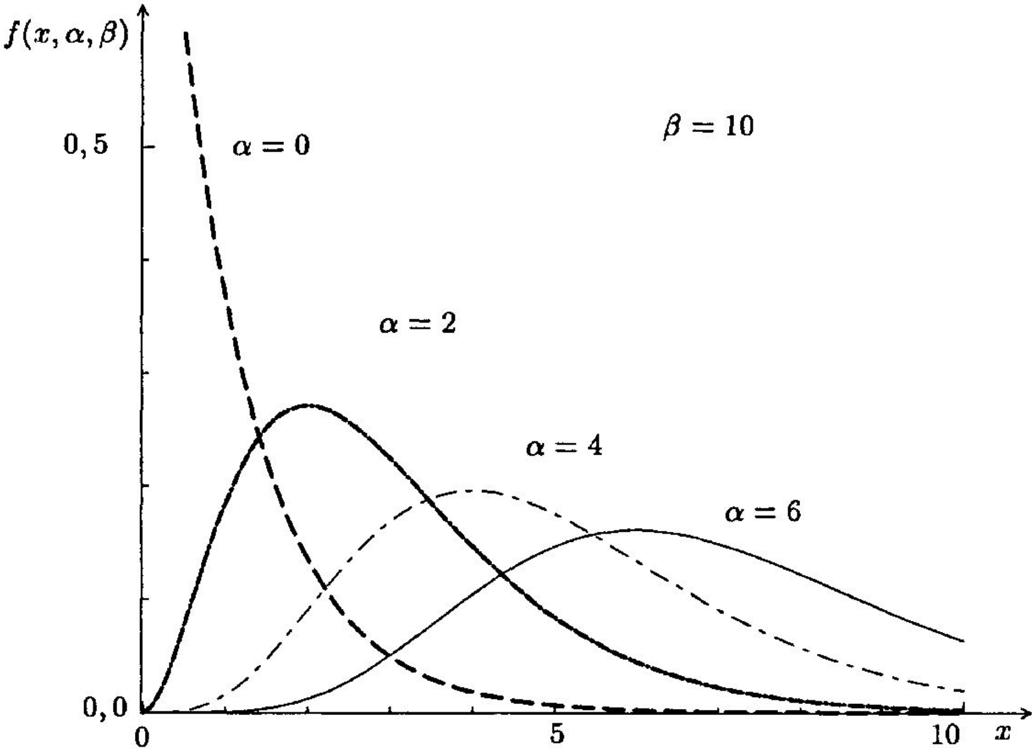
$$\xi = x - x_0$$

$$\overline{x} = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi}{\xi^2 + a^2} d\xi + x_0 \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\xi^2 + a^2}$$

$$\sigma^2 = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2 + a^2} dx = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi^2}{\xi^2 + a^2} d\xi$$

Гамма-распределение

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \qquad (x > 0)$$



Распределение вероятностей

$$f(x,\alpha,\beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}} x^\alpha e^{-x/\beta}$$

$$\overline{x} = \beta(\alpha+1)$$

$$\sigma^2 = \beta^2(\alpha+1)$$

Свойства Г-функции

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \ldots = n! \cdot \Gamma(1) = n!$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(n-\frac{3}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}$$

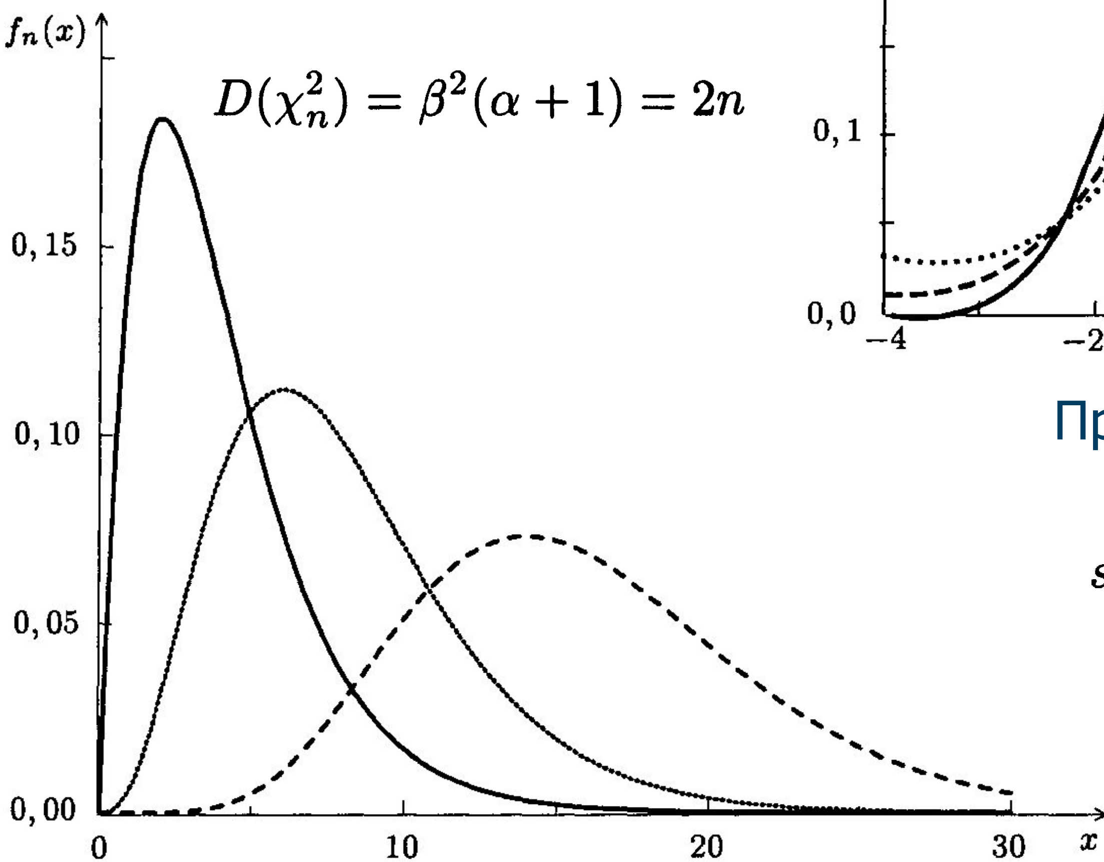
Распределение χ^2

$$\chi_n^2 \equiv y(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

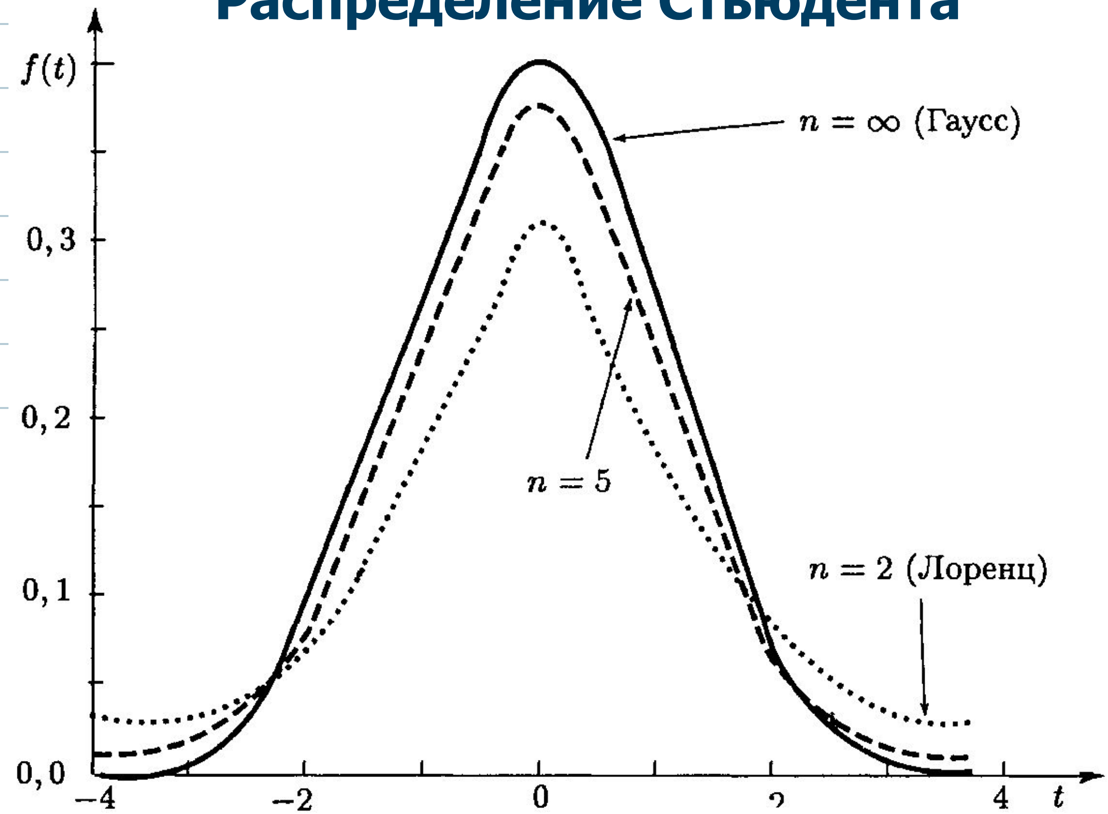
$$f_n(y) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{n/2}} y^{n/2-1} e^{-y/2}$$

$$\overline{\chi_n^2} = \beta(\alpha+1) = n$$

$$D(\chi_n^2) = \beta^2(\alpha+1) = 2n$$



Распределение Стьюдента

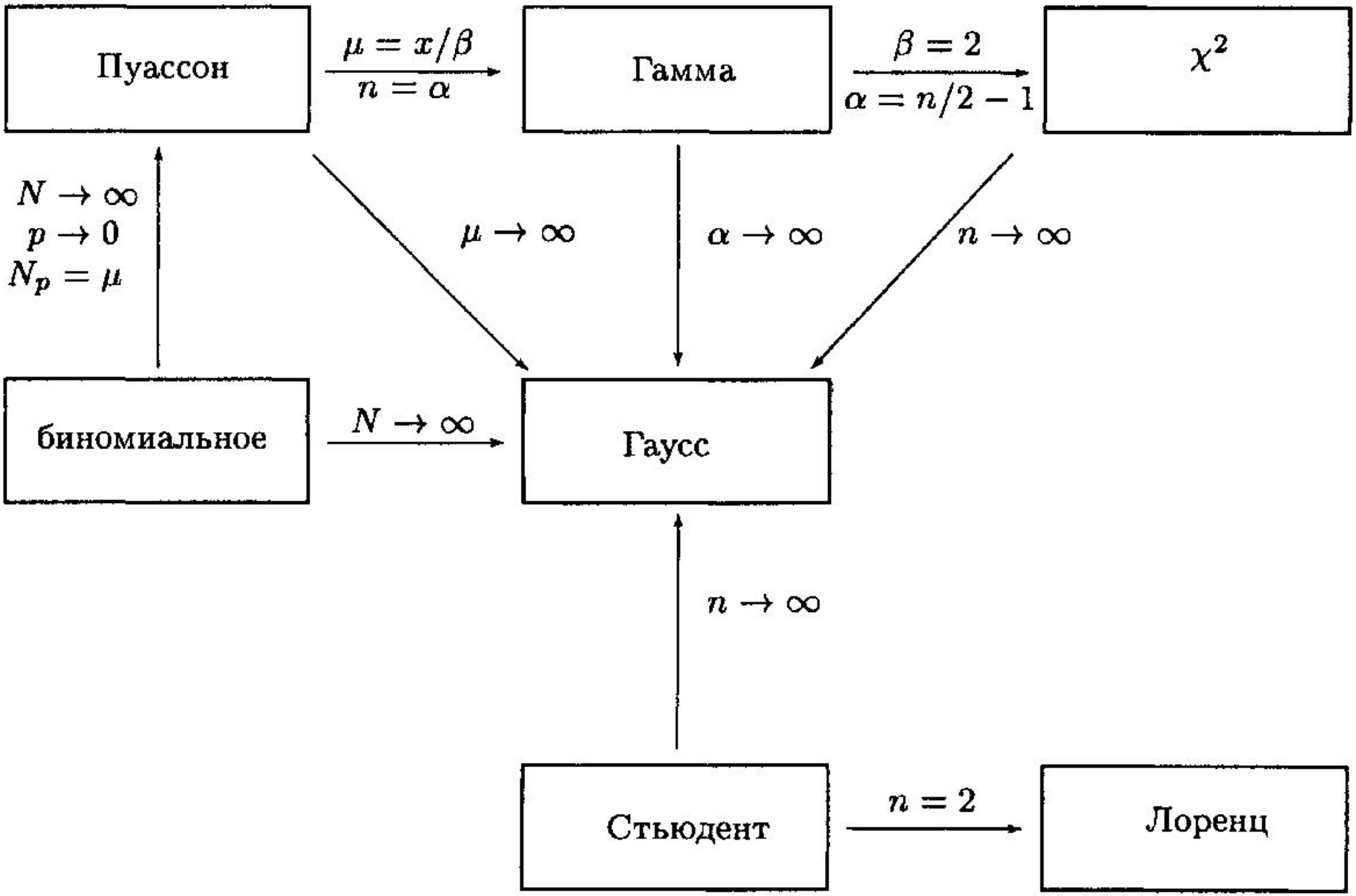


При малом n

$$m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$s_m^2 = \frac{s^2}{n} = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2$$

$$f_{n-1}(t) = \frac{C}{\left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{n/2}}$$



Соотношения между различными распределениями

Статистическая обработка результатов эксперимента

Если в результате измерения n раз некоторой физической величины x получен ряд значений x_1, x_2, ..., x_n, то в качестве значения, наиболее близкого к истинному, принимается среднее арифметическое

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Случайную ошибку измерений оценивают по среднеквадратичному отклонению от среднего значения измеряемой величины x.

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i)^2}{n-1}}$$

Истинное значение измеренной величины x лежит в интервале от $(\bar{x} - \Delta x)$ до $(\bar{x} + \Delta x)$, где Δx называется доверительным интервалом. Вероятность этого события (доверительная вероятность) составляет P.

Доверительный интервал рассчитывается по формуле

$$\Delta x = \frac{S_{\bar{x}}\, t_{P,n-1}}{\sqrt{n}}$$

где $t_{P,n-1}$ - коэффициент Стьюдента, зависящий от доверительной вероятности P и числа измерений n.

Таким образом, окончательная форма записи результата имеет вид

$$x = \bar{x} \pm \Delta x$$

$n = 6,\ l_1 = 4372$ мм, $l_2 = 4364$ мм, $l_3 = 4342$ мм, $l_4 = 4338$ мм, $l_5 = 4354$ мм $l_6 = 4330$ мм

$$l_I = \frac{l_{\text{макс}} + l_{\text{мин}}}{2} \qquad \Delta l_I = \frac{l_{\text{макс}} - l_{\text{мин}}}{2}$$

$$l_I = (4351 \pm 21)\ \text{мм}$$

$$l_{II} \equiv m = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} l_i = 4350\ \text{мм} \qquad s_m = \sqrt{\frac{1}{6\cdot 5}\sum_{i=1}^{6}(l_i - m)^2} = 6,6\ \text{мм}$$

$$t_{\nu=5;\,\mathcal{P}=0,95} = 2,57$$

$$l_{II} = (4350 \pm 17)\ \text{мм}$$

Правила округления

1. Точность результатов измерений и точность вычислений при обработке результатов измерений должны быть согласованы с требуемой точностью получаемой оценки измеряемой величины.

2. Погрешность оценки измеряемой величины следует выражать не более чем двумя значащими цифрами.

Две значащие цифры в погрешности оценки измеряемой величины сохраняют:

- при точных измерениях;
- если первая значащая цифра не более трех.

3. Сохраняемую значащую цифру в погрешности оценки измеряемой величины при округлении увеличивают на единицу, если отбрасываемая цифра неуказываемого младшего разряда больше либо равна пяти, и не изменяют, если она меньше пяти.

Распространение ошибок

$$(\Delta y)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\left. \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|_{\vec{x}=\vec{\mu}} \right)^2 (\Delta x_i)^2$$

$$y = x_1 + x_2 \qquad \frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial y}{\partial x_2} = 1 \qquad (\Delta y)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2$$

$$y = x_1 x_2 \qquad \frac{\partial y}{\partial x_1} = x_2 \qquad \frac{\partial y}{\partial x_2} = x_1 \qquad (\Delta y)^2 = x_2^2 (\Delta x_1)^2 + x_1^2 (\Delta x_2)^2$$

$$y = \frac{x_1}{x_2} \qquad (\Delta y)^2 = \frac{(\Delta x_1)^2}{x_2^2} + \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^2 \frac{(\Delta x_2)^2}{x_2^2}$$

$$\frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_1}{x_1} \right)^2 + \left(\frac{\Delta x_2}{x_2} \right)^2} \qquad \frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\Delta x_i}{x_i} \right)^2}$$

$$y = \sqrt{x_1 + \frac{x_2}{x_3}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{1}{2\sqrt{x_1 + x_2/x_3}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{1}{2x_3\sqrt{x_1 + x_2/x_3}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_3} = -\frac{x_2}{2x_3^2\sqrt{x_1 + x_2/x_3}}$$

$$\Delta y = \frac{1}{2\sqrt{x_1 + x_2/x_3}} \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \frac{(\Delta x_2)^2}{x_3^2} + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2 \frac{(\Delta x_3)^2}{x_3^2}}$$

$$y = \sqrt{z_1}, \qquad z_1 = x_1 + z_2, \qquad z_2 = \frac{x_2}{x_3}$$

$$\Delta y = \frac{\Delta z_1}{2\sqrt{z_1}}, \quad \Delta z_1 = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta z_2)^2}, \quad \Delta z_2 = z_2\sqrt{\left(\frac{\Delta x_2}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_3}{x_3}\right)^2}.$$

Косвенные измерения

Вид функции	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
$x = a \pm b$	$\Delta x = \Delta a + \Delta b$	$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a + \Delta b}{a \pm b}$
$x = a\,b$	$\Delta x = a\,\Delta b \pm b\,\Delta a$	$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$
$x = \frac{a}{b}$	$\Delta x = \frac{a\,\Delta b \pm b\,\Delta a}{b^2}$	$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$
$x = a^k$	$\Delta x = k\,a^{k-1}\Delta a$	$\frac{\Delta x}{x} = k\frac{\Delta a}{a}$
$x = \sqrt[k]{a}$	$\Delta x = \frac{\Delta a}{k\,a^{k-1}}$	$\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{k}\frac{\Delta a}{a}$
$x = \sin\alpha$	$\Delta x = \cos\alpha\,\Delta\alpha$	$\frac{\Delta x}{x} = ctg\alpha\,\Delta\alpha$
$x = \cos\alpha$	$\Delta x = \sin\alpha\,\Delta\alpha$	$\frac{\Delta x}{x} = tg\alpha\,\Delta\alpha$
$x = tg\alpha$	$\Delta x = \frac{\Delta\alpha}{\cos^2\alpha}$	$\frac{\Delta x}{x} = \frac{2\Delta\alpha}{\cos 2\alpha}$
$x = ctg\alpha$	$\Delta x = \frac{\Delta\alpha}{\sin^2\alpha}$	$\frac{\Delta x}{x} = \frac{2\Delta\alpha}{\sin 2\alpha}$

Задание 4. Вариант 47.

Исходные данные

44	30	34	48	33	45	41	44	35	37
33	45	39	34	46	41	31	50	39	43
35	52	42	39	42	33	36	44	45	40
34	51	37	39	43	40	32	45	44	44
37	42	48	35	50	48	32	40	43	33
36	48	40	43	37	42	30	45	36	40
41	50	42	39	36	44	51	46	48	44
33	50	43	37	43	42	47	47	34	44
45	48	44	42	39	34	45	38	32	33
38	26	49	34	40	46	48	31	36	48
41	47	35	34	43	41	42	35	33	42
33	37	39	47	39	37	37	47	42	39
38	41	34	39	42	36	46	30	36	43
43	44	47	35	45	33	38	37	38	39
40	48	42	52	38	44	40	38	45	37

Статистический ряд

24	0
25	0
26	1
27	0
28	0
29	0
30	3
31	2
32	3
33	9
34	8
35	6
36	7
37	10
38	7
39	11
40	8
41	6
42	12
43	9
44	11
45	9
46	4
47	6
48	9
49	1
50	4
51	2
52	2
53	0

Сгруппированная выборка

25	1
28	0
31	8
34	23
37	24
40	25
43	32
46	19
49	14
52	4

$\bar{x} = 40{,}4600$

$S = 5{,}59468$

$t_{0,95\ 150}$ – XXX

$\Delta x = \frac{S_x\, t_{p,n-1}}{\sqrt{n}}$ – 0,89533

$X = x \pm \Delta x =$ XXX ± XXX