Лекция 2

1.Задача об использовании ресурсов

2.Геометрический метод решения задачи об использовании ресурсов

3.Симплексный метод

4.Транспортная задача. Экономико-математическая модель задачи

5.Метод потенциалов

1.Задача об использовании ресурсов

Задача 1. ***Предприятие производит изделия двух типов А и В из трех видов сырья I, II, III. Расход сырья на одно изделие каждого типа задан в условных единицах следующей таблицей:***

Изделия	*Сырье*		
	I (S_1)	**II (S_2)**	**III (S_3)**
A	**3**	**1**	**1**
B	**2**	**2**	**1**

Запасов сырья имеется: вида I – 27 ед., вида II – 18 ед., вида III – 10 ед. Изделие типа А приносит прибыль 3 ден. ед., типа В – 1 ден. ед. Составить план выпуска изделий, при котором предприятие будет имеет наибольшую прибыль. Решить задачу графически и симплексным методом.

Решение. 1. Составим математическую модель задачи. Обозначим: x_1 – количество выпускаемых изделий типа ***А***, x_2 – количество выпускаемых изделий типа ***В***. Тогда с учетом расходов сырья на изготовление изделия каждого типа получим следующие ограничения на x_1 и x_2, учитывающие запасы сырья каждого вида:

$3x_1 + 2x_2$ - расход сырья S_1

$x_1 + 2x_2$ - расход сырья S_2

$x_1 + x_2$ - расход сырья S_3

Изделия	*Сырье*		
	I (S_1)	II (S_2)	
A	3	1	
B	2	2	

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 27, \\ x_1 + 2x_2 \le 18, \\ x_1 + x_2 \le 10. \end{cases} \qquad (2.1)$$

По смыслу задачи $x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0.$ (2.2)

Прибыль предприятия при плане $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$ равна $F = 3x_1 + x_2$ (2.3)

Необходимо найти значения x_1, x_2, удовлетворяющие неравенствам (2.1), (2.2), для которых функция (2.3) достигает наибольшего значения.

2.Геометрический метод решения задачи

Введем систему координат на плоскости и изобразим в ней множество решений систем неравенств (2.1), (2.2) (область допустимых решений − *ОДР*) в виде множества точек плоскости.

Условию (2.2) удовлетворяют точки первой четверти. Для получения полуплоскостей, соответствующих неравенствам системы (2.1), построим их границы, т.е. прямые линии:

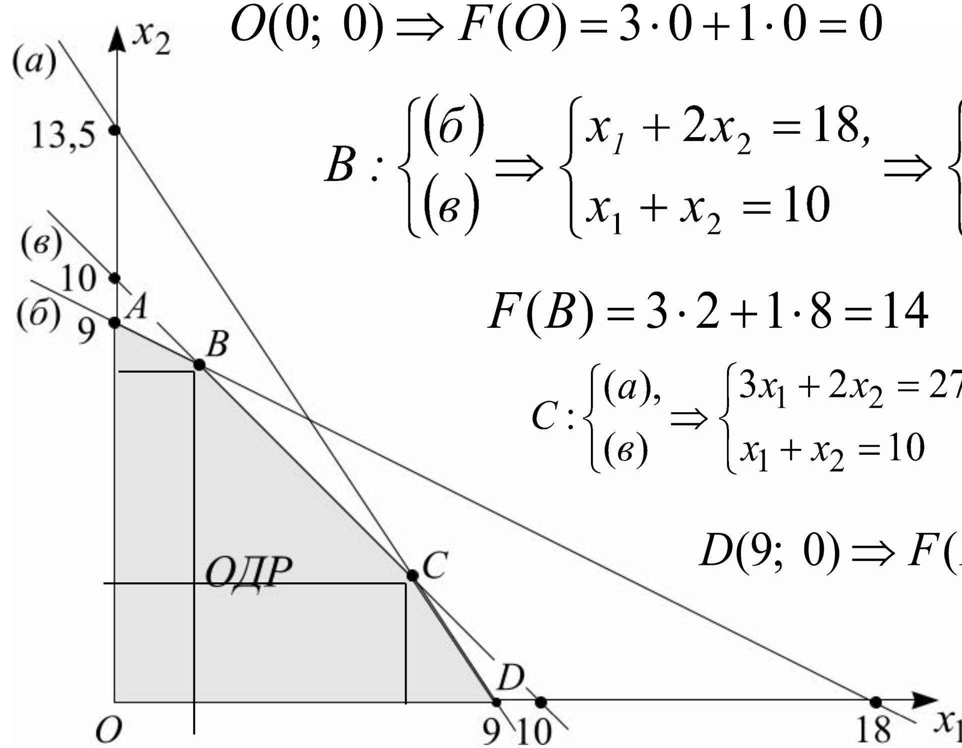
$$3x_1 + 2x_2 = 27 \qquad \text{(а)}$$

$$x_1 + 2x_2 = 18 \qquad \text{(б)}$$

$$x_1 + x_2 = 10 \qquad \text{(в)}$$

Пересечение построенных полуплоскостей с первой четвертью – искомая *ОДР* (многоугольник *OABCD*).

Ищем координаты вершин *ОДР* и значения целевой функции *F* в этих вершинах:



$$O(0;\ 0) \Rightarrow F(O) = 3\cdot 0 + 1\cdot 0 = 0$$

$$A(0;\ 9) \Rightarrow F(A) = 3\cdot 0 + 1\cdot 9 = 9$$

$$B:\begin{cases}(б)\\(в)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1 + 2x_2 = 18,\\ x_1 + x_2 = 10\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1 = 2,\\ x_2 = 8\end{cases} \Rightarrow B(2;8) \Rightarrow$$

$$F(B) = 3\cdot 2 + 1\cdot 8 = 14$$

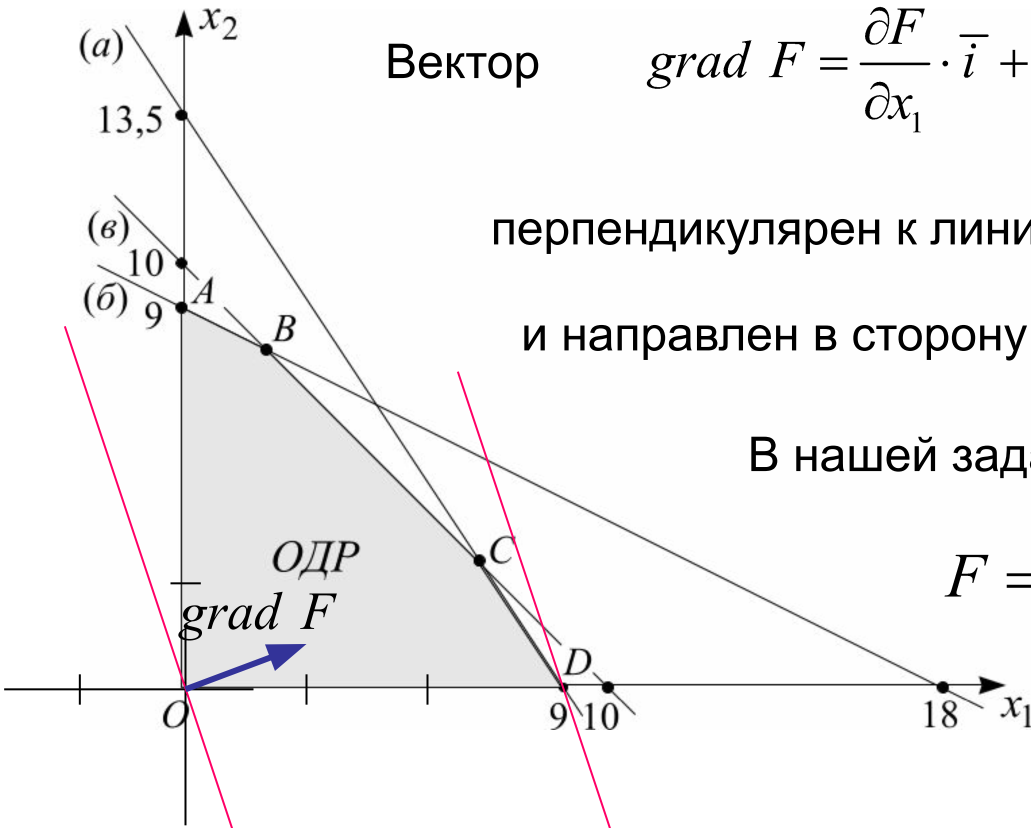
$$C:\begin{cases}(a),\\(в)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3x_1 + 2x_2 = 27,\\ x_1 + x_2 = 10\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1 = 7,\\ x_2 = 3\end{cases} \Rightarrow C(7;\ 3) \Rightarrow \quad F(C) = 3\cdot 7 + 1\cdot 3 = 24$$

$$D(9;\ 0) \Rightarrow F(D) = 3\cdot 9 + 1\cdot 0 = 27$$

$$F_{\max} = F(D) = F(9;\ 0) = 27.$$

Замечание

$F = 3x_1 + x_2$ - функция двух переменных



Вектор $grad\ F = \dfrac{\partial F}{\partial x_1} \cdot \overline{i} + \dfrac{\partial F}{\partial x_2} \cdot \overline{j}$ в каждой точке плоскости

перпендикулярен к линии уровня $F(x_1, x_2) = C$

и направлен в сторону наибольшего роста функции

В нашей задаче

$$F = 3x_1 + x_2 = 0$$

$$grad\ F = 3 \cdot \overline{i} + 1 \cdot \overline{j}$$

Линии уровня функции

$F = 0$ $\quad 3x_1 + x_2 = 0$

$F = 27$ $\quad 3x_1 + x_2 = 27$

В ы в о д: ***предприятию выгодно выпустить только 9 изделий типа А и не выпускать изделия типа В . При этом его прибыль будет наибольшая и составит 27 ден. ед.***

3.Симплексный метод

Приведем стандартную задачу к каноническому виду, добавив в левые части неравенств (2.1) дополнительные неотрицательные переменные .

$$F = 3x_1 + x_2 \to \max \qquad (2.4)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 27, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 18, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 10; \end{cases} \qquad (2.5)$$

$$x_1, ..., x_5 \geq 0. \qquad (2.6)$$

Выбираем в качестве базисных добавленные переменные x_3, x_4, x_5. Тогда оставшиеся переменные x_1, x_2 будут свободными. Положим $x_1=0$ и $x_2=0$. Тогда $x_3=27, x_4=18, x_5=10$, т.е. получаем первое базисное решение

$$X_Б^{(1)} = (0; 0; 27; 18; 10)$$

При этом

$$F^{(1)} = 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$$

Структура целевой функции позволяет утверждать, что ее ***значения могут быть увеличены*** за счет увеличения значений как свободной переменной $\boldsymbol{x_1}$, так и свободной переменной $\boldsymbol{x_2}$ (коэффициенты при этих переменных положительные). ***Отсюда следует, что найденное базисное решение оптимальным не является.***

Назначим другой набор базисных переменных, который обеспечит увеличение значений целевой функции. С этой целью будем увеличивать значения свободной переменной $\mathbf{x_1}$, оставляя $\mathbf{x_2=0}$, и определим из системы (2.5), какая из базисных переменных первой станет отрицательной.

Переписав систему (2.5) в более удобном для анализа виде

$$\begin{cases} x_3 = 27 - 3x_1 - 2x_2, \\ x_4 = 18 - x_1 - 2x_2, \\ x_5 = 10 - x_1 - x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \le x_3 = 27 - 3x_1, \\ 0 \le x_4 = 18 - x_1, \\ 0 \le x_5 = 10 - x_1, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 \le 27, \\ x_1 \le 18, \\ x_1 \le 10 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \le 9, \\ x_1 \le 18, \\ x_1 \le 10 \end{cases}$$

заключаем, что проблемной является **базисная переменная** $\boldsymbol{x_3}$ из первого равенства системы. Выводим ее из состава базисных и обмениваем на свободную переменную $\boldsymbol{x_1}$:

В результате новыми базисными переменными стали $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_4}, \boldsymbol{x_5}$, а новыми свободными - $\boldsymbol{x_3}, \boldsymbol{x_2}$. Выражаем в системе (2.5) новые базисные переменные через новые свободные, начиная с ее проблемного первого равенства:

$$\boxed{x_1 = 9 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3}$$

$$x_4 = 18 - \left(9 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3\right) - 2x_2 = 9 - \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3$$

$$x_5 = 10 - \left(9 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3\right) - x_2 = 1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3$$

Через эти же свободные переменные выражаем целевую функцию (2.4):

$$\boxed{F = 3\left(9 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3\right) + x_2 = 27 - x_2 - x_3}$$

(2.4')

В результате получаем:

$$F = 27 - x_2 - x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 = 9 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3, \\ x_4 = 9 - \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3, \\ x_5 = 1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3; \end{cases} \qquad (2.5')$$

$$x_1, \ldots, x_5 \geq 0.$$

Полагаем свободные переменные $x_2 = x_3 = 0$

Тогда базисные переменные согласно системе (2.5') принимают значения ***x_1=9 , x_4=9, x_5=1***, т.е. получаем второе базисное решение

$$X_Б^{(2)} = (9;\,0;\,0;\,9;\,1) \qquad F^{(2)} = 27 - 0 - 0 = 27$$

Структура целевой функции из условия (2.4') позволяет утверждать, что ***ее значения <u>не могут быть увеличены</u> за счет увеличения значений как свободной переменной x_2, так и свободной переменной x_3 (коэффициенты при этих переменных в F отрицательные).***

Отсюда следует, что ***найденное базисное решение является оптимальным . При этом***

$$X_{опт} = (9;\,0;\,0;\,9;\,1) \qquad F_{\max} = 27$$

Ответ. Для получения максимальной прибыли в количестве 27 ден. ед. предприятие должно выпустить 9 изделий типа *А* и не выпускать изделия типа *В*. При этом сырье вида I будет израсходовано полностью, а сырье видов II и III останется в количествах 9 и 1 усл. ед. соответственно.

4.Транспортная задача. Экономико-математическая модель задачи

Задача. ***Поставщики A_1, A_2, A_3 имеют некоторую продукцию в количествах $a_1=100$, $a_2=120$, $a_3=180$ единиц соответственно. Потребители B_1, B_2, B_3, B_4 нуждаются в этой продукции в количествах $b_1=50$, $b_2=120$, $b_3=100$, $b_4=130$ единиц соответственно. Стоимости (ден. ед.) перевозки единицы продукции C_{ij} от i- го поставщика к j-у потребителю, значения a_i и b_j даны в следующей таблице:***

a_i	b_j	50 (b_1)	120 (b_2)	100 (b_3)	130 (b_4)
100 (a_1)		4 x_{11}	5 x_{12}	5 x_{13}	6 x_{14}
120 (a_2)		3 x_{21}	4 x_{22}	6 x_{23}	5 x_{24}
180 (a_3)		3 x_{31}	5 x_{32}	3 x_{33}	6 x_{34}

Требуется составить план перевозок всей продукции от поставщиков потребителям, при котором суммарные затраты на перевозки минимальны.

Решение. Эта задача является закрытой транспортной задачей, так как $a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3+b_4=400$. Для ее решения воспользуемся таблицей, в которой будем составлять последовательно планы перевозок.

Пусть x_{ij} - объем перевозки от i -го поставщика к j -у потребителю

Мощности поставщиков должны быть реализованы

a_i \ b_j	50	120	100	130
100	*4* x_{11}	*5* x_{12}	*5* x_{13}	*6* x_{14}
120	*3* x_{21}	*4* x_{22}	*6* x_{23}	*5* x_{24}
180	*3* x_{31}	*5* x_{32}	*3* x_{33}	*6* x_{34}

$$\begin{aligned} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}&=100\\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}&=120\\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}&=180 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} x_{11}+x_{21}+x_{31}&=50\\ x_{12}+x_{22}+x_{32}&=120\\ x_{13}+x_{23}+x_{33}&=100\\ x_{14}+x_{24}+x_{34}&=130 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Спросы всех потребителей должны быть удовлетворены

$$x_{i,j}\geq 0,\quad i=1,2,3;\ \ j=1,2,3,4.$$

Суммарные затраты на перевозки должны быть минимальными

$$\begin{aligned} F=&\,4x_{11}+5x_{12}+5x_{13}+6x_{14}+3x_{21}+4x_{22}+6x_{23}+5x_{24}+\\ &+3x_{31}+5x_{32}+3x_{33}+6x_{34} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Математическая формулировка задачи

На множестве неотрицательных решений системы уравнений (2.7)-(2.8) найти такое решение

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix}$$

при котором функция (2.9) принимает наименьшее значение

***Замечание*. Мы имеем задачу линейного программирования в канонической форме. В этой системы 6 линейно независимых уравнений (т.е. ранг системы равен 6). Это означает, что число базисных переменных равно 6.**

Составим первый план перевозок. В этом плане отличными от нуля перевозками могут быть лишь m+n-1=3+4-1=6 значений (базисные переменные), где m − число поставщиков, n − число потребителей. Остальные значения заведомо равны нулю (свободные переменные). Будем их в таблице помечать прочерком .

Для составления плана последовательно заполняют клетки таблицы так, чтобы на каждом шаге исчерпывалась или потребность какого-либо потребителя, или возможность какого-либо поставщика. В соответствующем столбце или строке ставят в остальных пустых клетках прочерки. *Если при этом одновременно исчерпывается и потребность и возможность, то вычеркивается что-то одно (столбец или строка)*. При таком построении плана перевозок заполненными окажутся ровно ***(m+n-1)*** клетки, а остальные прочеркнутся.

a_i \ b_j	**50**	**120**	**100**	**130**	
100	4 —	5	5	6	
120	3 **50**	4	6 4	5	
180	3 —	5	3	6	

Заполняем клетку (21), так как − C_{21}= 3 наименьшее, значением x_{21}=50.
При этом вычеркивается первый столбец.

b_j / a_i	50	120	100	130	
100	4 —	5 50	5 —	6 50	
120	3 50	4 70	6 4 —	5 —	
180	3 —	5 —	3 100	6 80	

На втором шаге заполняем клетку (33) x_{33}=100, т.к. C_{33}=3 − наименьшее, значением . При этом вычеркивается третий столбец.

В оставшихся клетках наименьшее C_{22}=4 , поэтому заполняем клетку (22) значением x_{22}=70. При этом вычеркивается вторая строка.
Теперь остаётся наименьшее C_{12}=5. Берём x_{12}=50, вычеркивая второй столбец.
Остаётся клетка (14) с x_{14}=50 (исчерпалась первая строка) и клетка (34) с x_{34}=80 . Число заполненных клеток при этом составляет m+n-1=3+4-1=6 .
Стоимость перевозок *F* при данном плане
F = 5·50 + 6·50 + 3·50 + 4·70 + 3·100 + 6·80 = 1760 (ден. ед.)

a_i \ b_j	50	120	100	130	v_i
100	4 -	5 50	5 -	6 50	
120	3 50	4 70	6 -	5 -	-3
180	3 -	5 -	3 100	6 80	
u_j	0				

Для проверки оптимальности полученного плана воспользуемся методом потенциалов. Введём строку потенциалов $\boldsymbol{U_j}$ и столбец потенциалов $\boldsymbol{V_i}$. Полагаем $U_1=0$, а остальные U_i и V_j найдём так, чтобы для ***заполненных клеток*** выполнялись равенства

$$c_{ij} + v_i + u_j = 0$$

Вычисляем оценки ***прочеркнутых клеток по формулам***

$$\delta_{ij} = c_{ij} + v_i + u_j$$

a_i \ b_j	50	120	100	130	v_i
100	4 0 -	5 0 **50** –	5 2 -	6 0 **50** +	**-4**
120	3 0 – **50**	4 0 **70** +	6 4 -	5 0 -	**-3**
180	3 -1 + -	5 0 -	3 0 **100**	6 – 0 **80**	**-4**
u_j	**0**	**-1**	**1**	**-2**	

Таблица 2

Оценки клеток будем записывать в правых верхних углах клеток. Для оптимального плана должно выполняться условие

$$\boxed{\delta_{ij} \geq 0}$$

$$\delta_{11} = 4 + (-4) + 0 = 0 \qquad \delta_{24} = 5 + (-3) + (-2) = 0$$

$$\delta_{13} = 5 + (-4) + 1 = 2 \qquad \delta_{31} = 3 + (-4) + 0 = -1$$

$$\delta_{23} = 6 + (-3) + 1 = 4 \qquad \delta_{32} = 5 + (-4) + (-1) = 0$$

У нас , $\delta_{31} = -1 < 0$ следовательно, ***план не оптимален***. Уменьшить стоимость перевозок можно, заполнив клетку (31) (на каждой единице, проставленной в клетку (31), стоимость перевозок уменьшится на 1 ден. ед.). Для заполнения клетки (31) составим цикл пересчёта (в таблице 2 обозначен пунктиром), по которому переместим в клетку (31) 50 единиц. При этом клетки (12) и (21) опустошаются. В одну из них поставим 0, в другую − прочерк, так как количество прочерков и заполненных клеток должно остаться прежним. При пересчете в клетках с (+) добавляется 50 ед., в клетках с (−) вычитается 50 ед. Имеем новый план (таблица 3)

a_i \ b_j	**50**	**120**	**100**	**130**	v_i
100	4 0 -	5 0 **50**	5 2 -	6 0 **50** +	**- 4**
120	3 0 − **50**	4 0 **70** +	6 4 -	5 0 -	**- 3**
180	3 -1 + -	5 0 -	3 0 **100**	6 − 0 **80**	**- 4**
u_j	**0**	**-1**	**1**	**-2**	

Уменьшить стоимость перевозок можно, заполнив клетку (31) (на каждой единице, проставленной в клетку (31), стоимость перевозок уменьшится на 1 ден. ед.). Для заполнения клетки (31) составим цикл пересчёта (в таблице 2 обозначен пунктиром), по которому переместим в клетку (31) 50 единиц. При этом клетки (12) и (21) опустошаются. В одну из них поставим 0, в другую − прочерк, так как количество прочерков и заполненных клеток должно остаться прежним. При пересчете в клетках с (+) добавляется 50 ед., в клетках с (−) вычитается 50 ед.

Таблица 3

a_i \ b_j	**50**	**120**	**100**	**130**	v_i
100	4 1 -	5 1 -	5 2 -	6 0 **100**	- 3
120	3 0 **0** −	4 0 **120**	6 3 -	5 **-1** - +	- 3
180	3 0 **50** +	5 1 -	3 0 **100**	6 0 **30** −	- 3
u_j	**0**	**-1**	**0**	**-3**	

Имеем новый план (таблица 3). Найдём для него потенциалы и вычислим δ_{ij}

Таблица 3

a_i \ b_j	50	120	100	130	v_i
100	4 | 1 -	5 | 1 -	5 | 2 -	6 | 0 100	- 3
120	3 | 0 0	4 | 0 120	6 | 3 -	5 | -1 -	- 3
180	3 | 0 50	5 | 1 -	3 | 0 100	6 | 0 30	- 3
u_j	0	-1	0	-3	

$$\delta_{11} = 4 + (-3) + 0 = 1 \quad \delta_{12} = 5 + (-3) + (-1) = 1 \quad \delta_{13} = 5 + (-3) + 0 = 2$$

$$\delta_{23} = 6 + (-3) + 0 = 3 \quad \delta_{24} = 5 + (-3) + (-3) = -1 \quad \delta_{32} = 5 + (-3) + (-1) = 1$$

$$\delta_{24} = -1 < 0$$

Составим цикл для клетки (24). В этом цикле перемещается 0 единиц (фактически из клетки (21) в клетку (24)); клетка (21) станет прочёркнутой.

Так как , то составим цикл для клетки (24). В этом цикле перемещается 0 единиц (фактически из клетки (21) в клетку (24)); клетка (21) станет прочёркнутой.

Перейдем к следующему плану (таблица 4).

Таблица 4

a_i \ b_j	50	120	100	130	v_i
100	4 1 -	5 0 -	5 2 -	6 0 **100**	- **3**
120	3 1 -	4 0 **120**	6 4 -	5 0 0	- **2**
180	3 0 **50**	5 0 -	3 0 **100**	6 0 **30**	- **3**
u_j	**0**	**-2**	**0**	**-3**	

Перейдем к следующему плану (таблица 4).
Вычислим потенциалы, а затем оценки . Получили все $\delta_{ij} \geq 0$, следовательно, полученный план оптимален. Стоимость перевозок при этом плане

F = 6·100 + 4·120 + 5·0 + 3·50 + 3·100 + 6·30 = 1710 (ден. ед.).

По этому плану поставщик перевозит 100 ед. потребителю , поставщик − 120 ед. потребителю , поставщик *A3* − 50 ед. потребителю , 100 ед. потребителю и 30 ед. потребителю . Так как среди оценок в прочеркнутых клетках есть нули, это говорит о том, что оптимальный план не единственный.

Таблица 4

a_i \ b_j	50	120	100	130	v_i
100	4 1 -	5 0 -	5 2 -	6 0 **100**	**- 3**
120	3 1 -	4 0 **120**	6 4 -	5 0 0	**- 2**
180	3 0 **50**	5 0 -	3 0 **100**	6 0 **30**	**- 3**
u_j	**0**	**-2**	**0**	**-3**	