Конечные автоматы

Абстрактные автоматы.
Структурные автоматы.
Синтез конечных автоматов.
Синтез МПА.

Определение

Абстрактным автоматом называют модель, описываемую пятиместным кортежем:

A = (X, Y, S, fy, fs),

где первые три компонента – непустые множества:

X – множество входных сигналов АА,

Y – множество выходных сигналов АА,

S – множество состояний АА.

Два последних компонента кортежа – характеристические функции:

fy – функция выходов;

fs – функция переходов АА из одного состояния в другое.

Если множества X, Y, S – конечные, то такой АА называют **конечным автоматом (КА)**.

Классификация

I. По определенности характеристических функций.

В автоматах *полностью определенных* областью определения функций fs и fy является множество всех пар (si, xk) S ϵ X, где si ϵ S, xk ϵ X. В автоматах *частично определенных* либо обе характеристические функции определены не для всех пар (si, xk).

II. По однозначности функции переходов.

В *детерминированных* автоматах выполняется условие однозначности переходов: если АА находится в некотором состоянии si ϵ S, то под воздействием произвольного входного сигнала xk ϵ X автомат может перейти в одно и только одно состояние sj ϵ S, причем ситуация si = sj вовсе не исключается. В автоматах *вероятностных* при воздействии одного и того же входного сигнала возможны переходы из состояния si в различные состояния из множества S с заданной вероятностью.

III. По устойчивости состояний:

В *устойчивых* автоматах выполняется условие устойчивости: если автомат под воздействием входного сигнала xk ϵ X оказался в состоянии si ϵ S, то выход из него и переход в иное состояние возможен только при поступлении на вход автомата другого сигнала xz ϵ X, xz ≠ xk. Если условие устойчивости не выполняется хотя бы для одного состояния sj S, то такой автомат называют *неустойчивым*.

Дальнейшее изложение будем вести, исходя из практических соображений, применительно к **полностью определенным, детерминированным и устойчивым конечным автоматам**.

Классификация

- **Автоматы → удобный язык для описывания законов взаимодействия сложных систем → метаязык кибернетики (фон Нейман)**

- **Можно выделить два основных аспекта «работы» автомата:**

- **а) *<u>автоматы распознают входные слова</u>*, т. е. отвечают на вопрос, принадлежит ли поданное на вход слово данному множеству (*<u>это автоматы- распознаватели</u>*);**

- **б) автоматы *<u>преобразуют входные слова в выходные, т.е. реализуют автоматные отображения (это автоматы - преобразователи).</u>***

Классификация

Детерминированные автоматы

1 тип
Автоматы с неизменным внутренним состоянием.

Комбинационные (логические схемы)

2 тип
Автомат, выходной сигнал которого определяется поступившим входным сигналом и его внутренним состоянием.

Последовательностные.

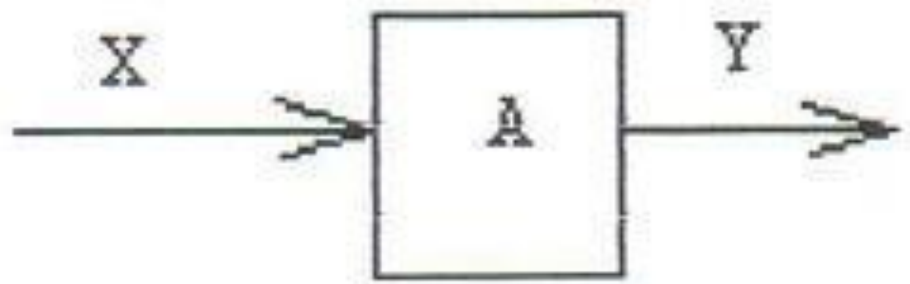
3 тип Автомат с внешней неограниченной памятью.

Реализовать любой алгоритм преобразования информации

Машина Тьюринга.

Теория автоматов
Абстрактный автомат

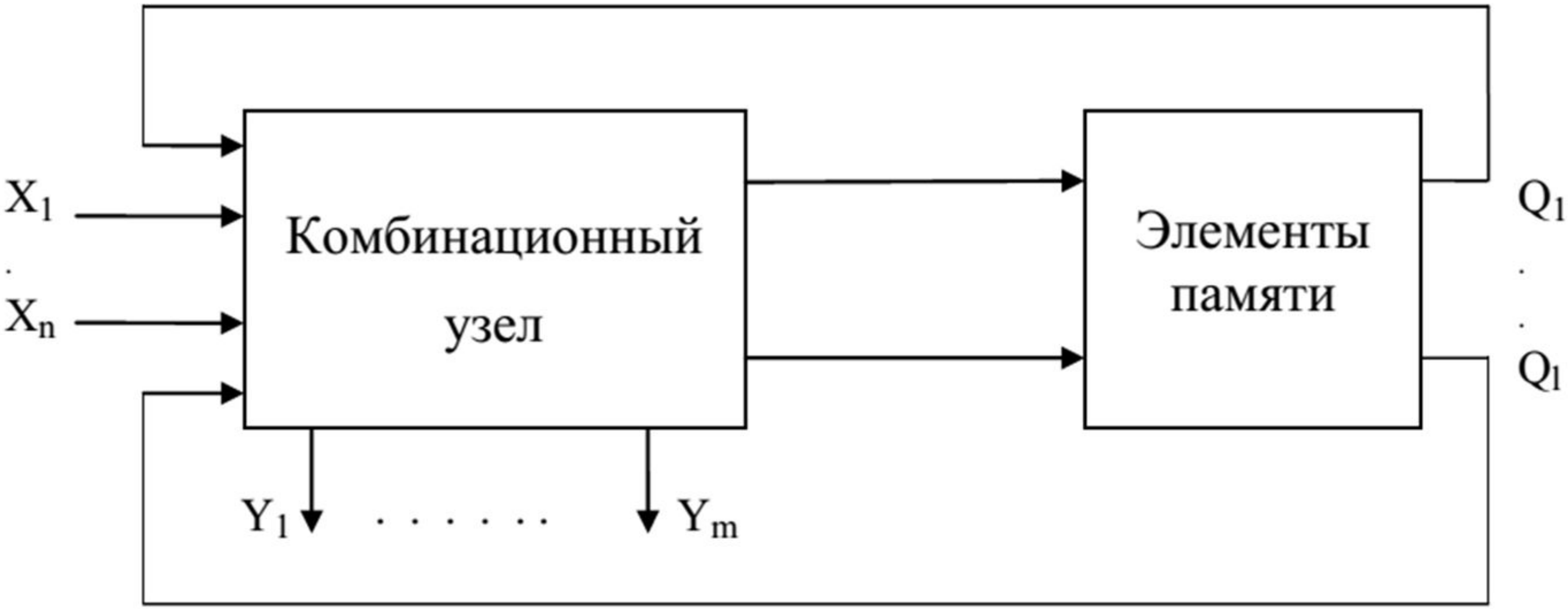
- ***Абстрактный автомат*** *– позволяет абстрагироваться от конкретной схемы, можно рассматривать как* ***«черный ящик»***



- ***Для построения УАЖЛ, используется теория абстрактных конечных автоматов (КА). Для построения используется две базовые модели КА, функционально аналогичные: автомат Мура и автомат Мили.***
- ***Любой ЦА описывается следующем кортежем: М = {X, Y, A\S, δ, λ, s 0 }, где X, Y, S – соответственно множества входных, выходных значений ЦА и внутренних***

Теория автоматов
Абстрактный автомат

- ***Абстрактный автомат*** *– обобщенная схема.*



Теория автоматов

<u>Автомат Мили.</u>

В автомате Мили функция выходов λ определяет значение выходного символа по классической схеме абстрактного автомата. Математическая модель автомата Мили и схема рекуррентных соотношений не отличаются от математической модели и схемы рекуррентных соотношений абстрактного автомата.

Законы функционирования:

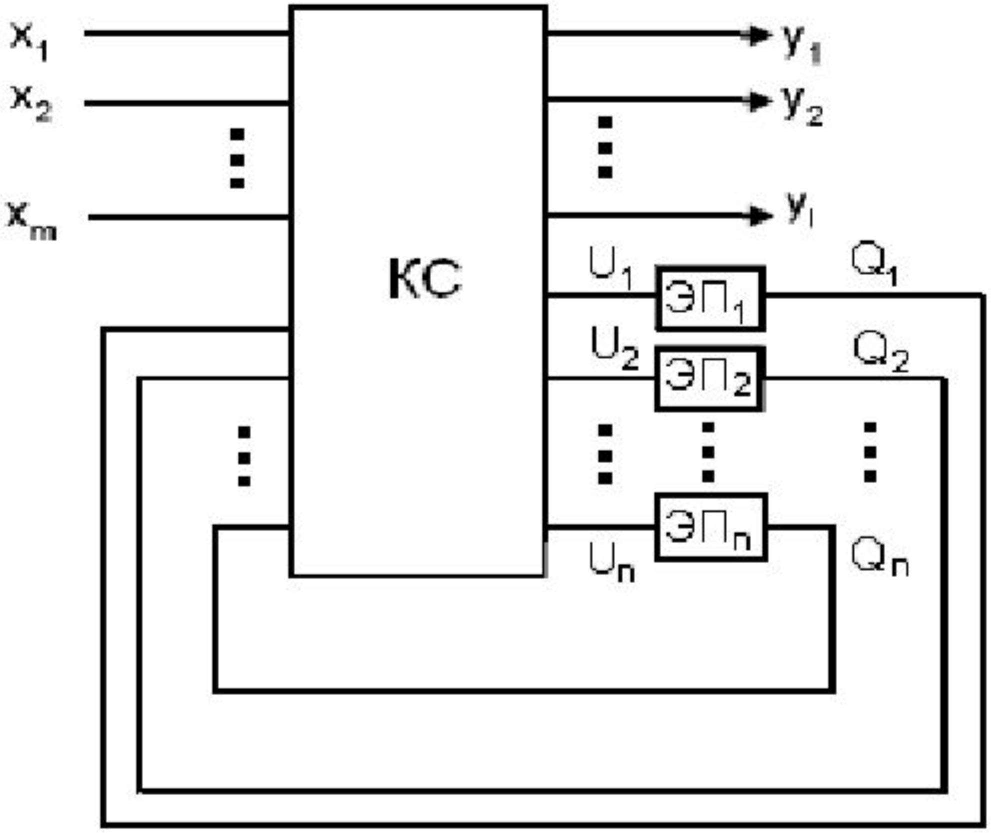
$$\begin{cases} a(t+1) = \delta[a(t), x(t)] \\ y(t) = \lambda\,[a(t), x(t)] \end{cases}$$

Отображения δ и *λ* получили названия, соответственно, ***функции перехода*** и ***функции выхода*** автомата.

Особенностью автомата Мили является то, что функция выходов является двухаргументной и символ в выходном канале y(t) обнаруживается только при наличии символа во входном канале x(t). Функциональная схема не отличается от схемы абстрактного автомата.

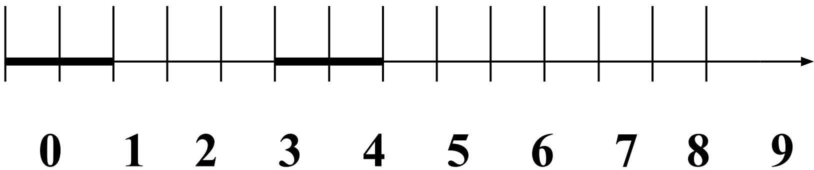
Теория автоматов

Автомат Мили.



(t), x(t)]

y(t) = λ [a(t), x(t)]



Теория автоматов

***Автомат Мура*.**

Зависимость выходного сигнала ***только от состояния автомата*** представлена в автоматах Мура. В автомате Мура функция выходов определяет значение выходного символа только по одному аргументу — состоянию автомата. Эту функцию называют также функцией меток, так как она каждому состоянию автомата ставит метку на выходе.

Законы функционирования:

$$\begin{cases} a(t+1) = \delta[a(t), x(t)] \\ y(t) = \lambda\,[a(t)] \end{cases}$$

Пример автомата Мура:

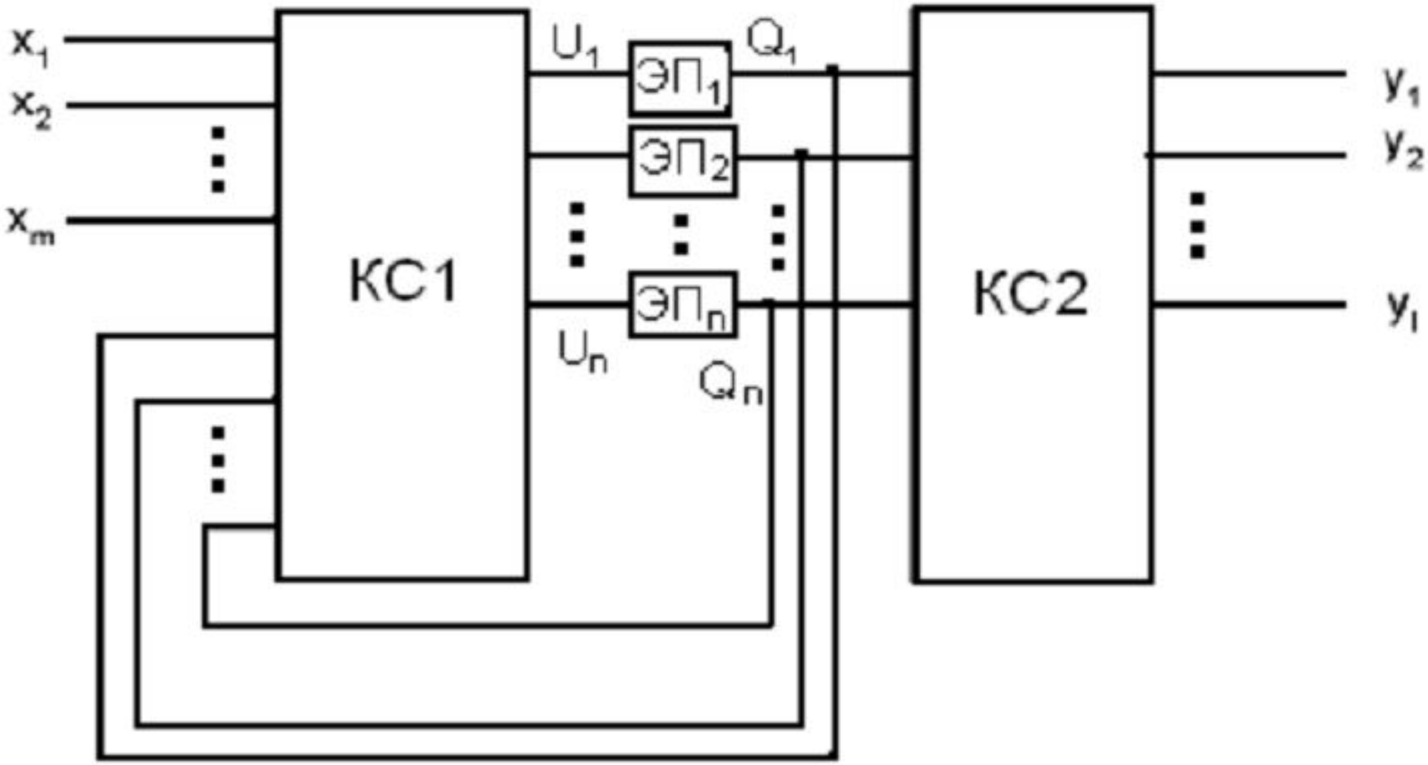
Очевидно, что автомат Мура можно рассматривать как частный случай автомата Мили.

Теория автоматов

Автомат Мура.

$a(t+1) = \delta[a(t), x(t)]$

$y(t) = \lambda[a(t)]$



Теория автоматов

Автомат Мили

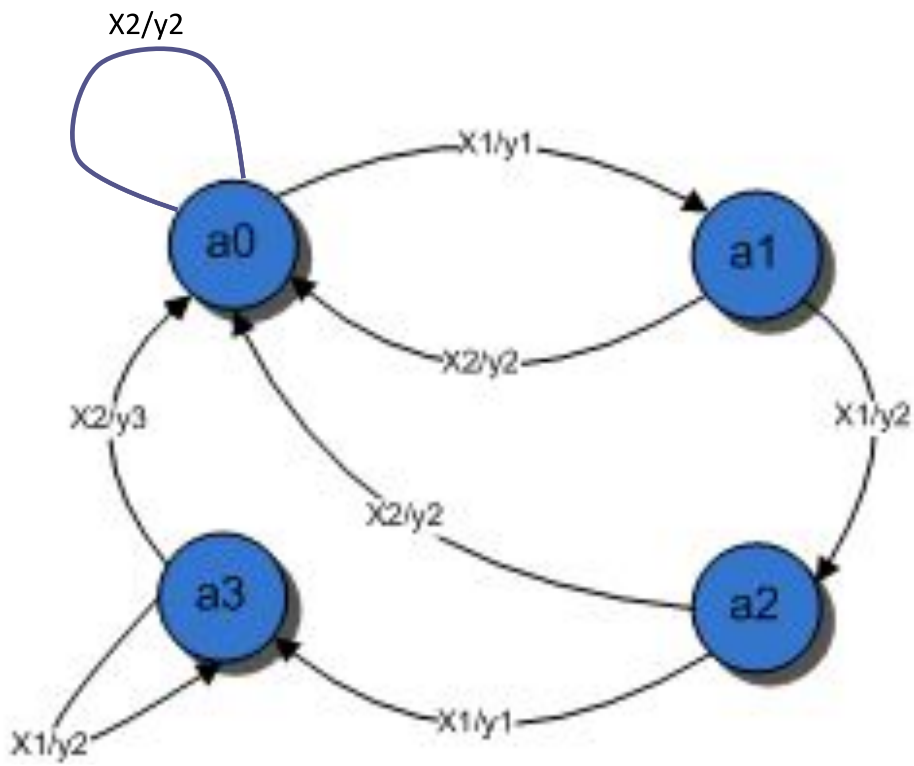
Граф автомата, заданного приведенными таблицами, переходов и выходов будет иметь вид:

δ

вх	a_0	a_1	a_2	a_3
x_1	a_1	a_2	a_3	a_3
x_2	a_0	a_0	a_0	a_0

λ

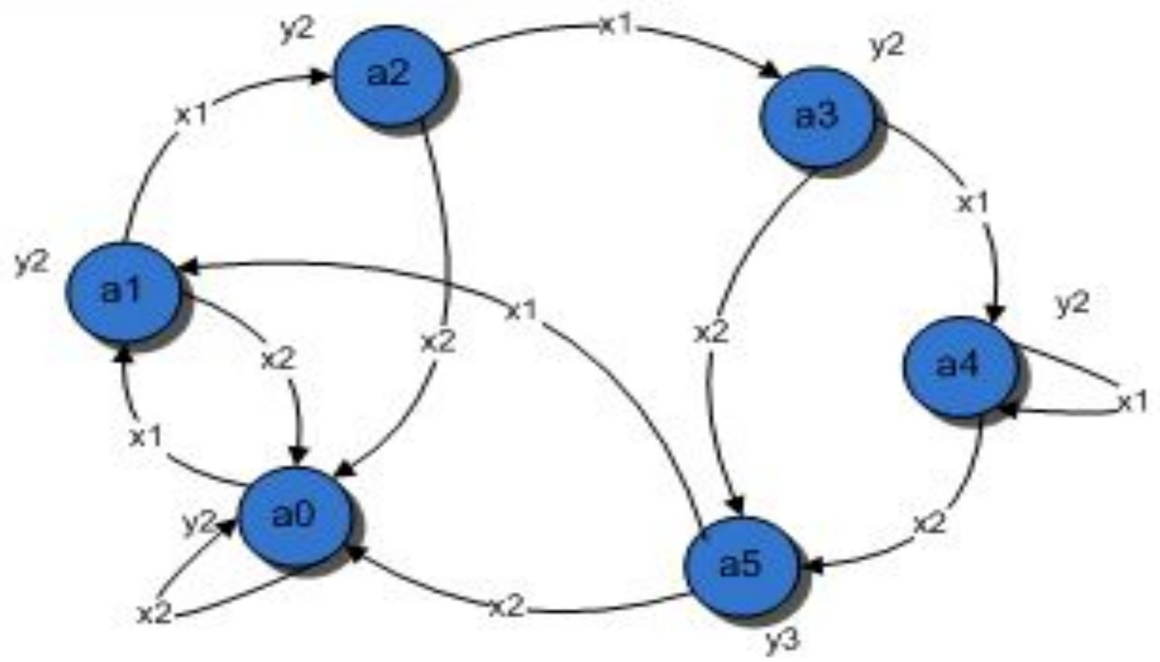
вх	a_0	a_1	a_2	a_3
x_1	y_2	y_2	y_1	y_2
x_2	y_2	y_2	y_2	y_3



Теория автоматов

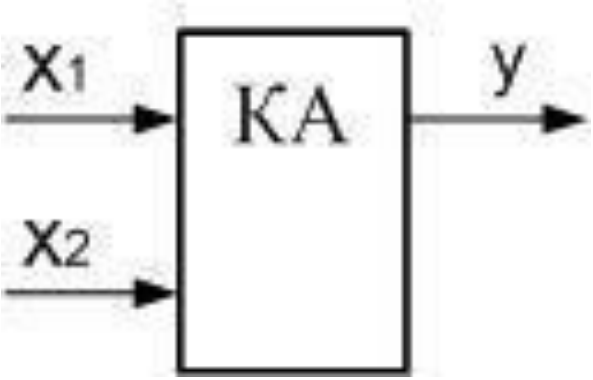
Автомат Мура

	y_2	y_2	y_2	y_2	y_2	y_3
	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$X1$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_4	a_1
$X2$	a_0	a_0	a_0	a_5	a_5	a_0



Пример

«Автомат имеет два входа x1, x2 и один выход y. В начальный момент времени y = 0. На вход подаются сигналы: (x1, x2) = (0,0), (0,1), (1,0) и (1,1). В случае входной комбинации (1,0) на выходе формируется значение 1; если (x1, x2) = (0,1), то выдается y = 2. В остальных случаях y = 0».



Зададим множества, входящие в описание модели.

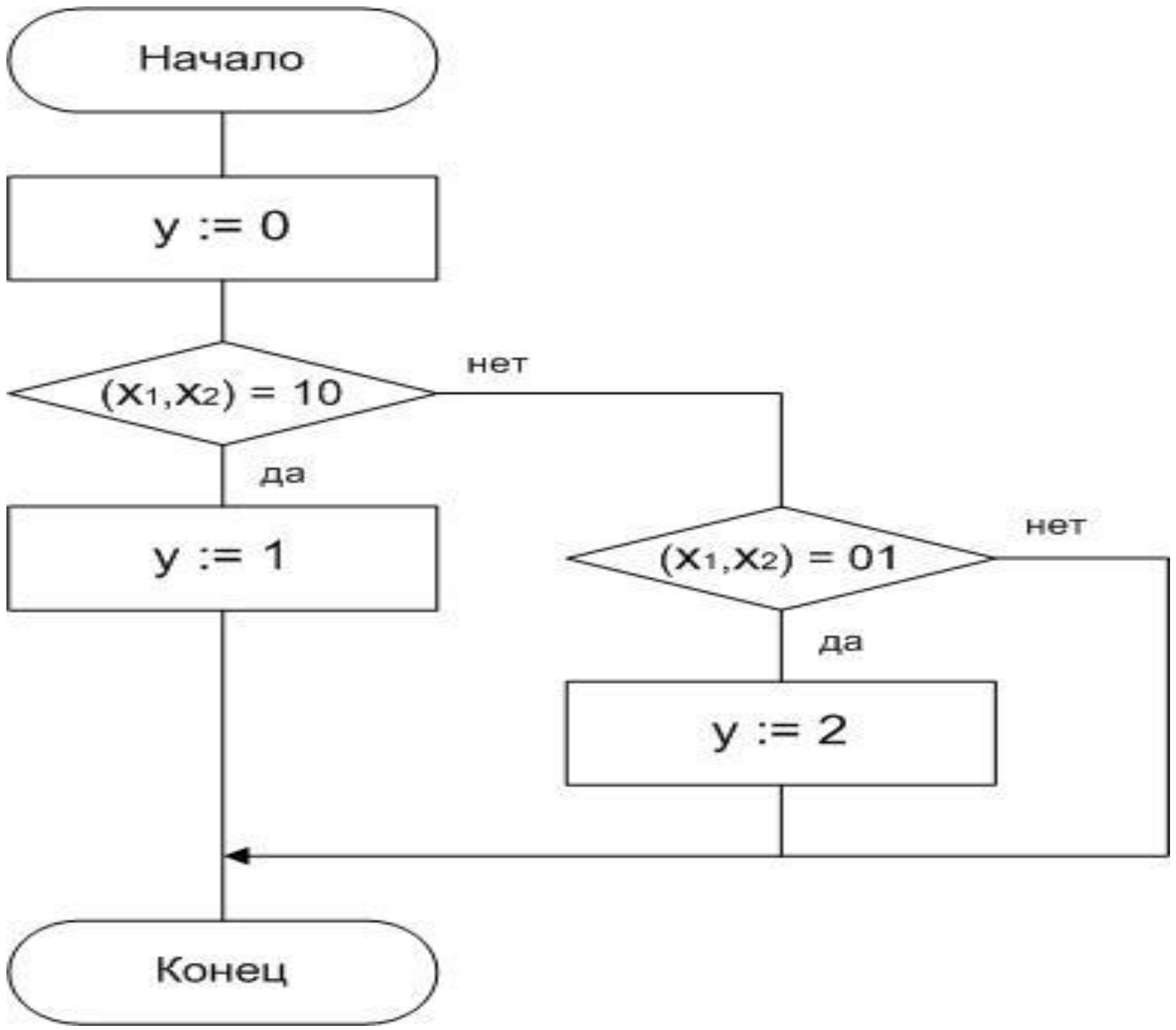
X = {(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)}, где первый элемент каждой пары соответствует x1, второй элемент – x2. Для краткости запишем: X = {00, 01, 10, 11}.

Y = {0, 1, 2}.

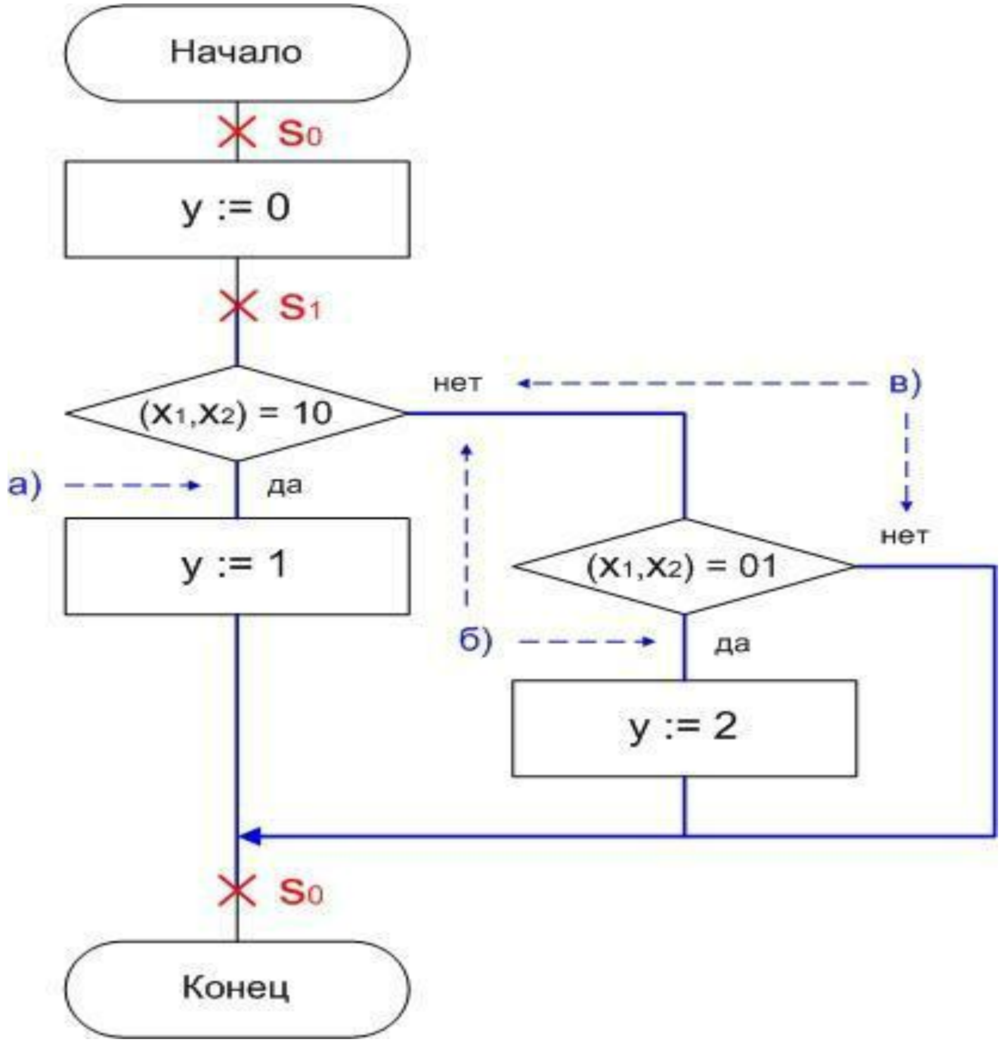
Множество состояний S видно наглядно, если алгоритм представить в виде *граф-схемы алгоритма*. Если каждый шаг алгоритма принять за *микрокоманду*, то схема алгоритма является наглядным изображением *микропрограммы*

автомата как последовательности микрокоманд. Схема алгоритма заданного автомата представлена на рис.

Граф-схема алгоритма



Разметка схемы алгоритма для модели Мили

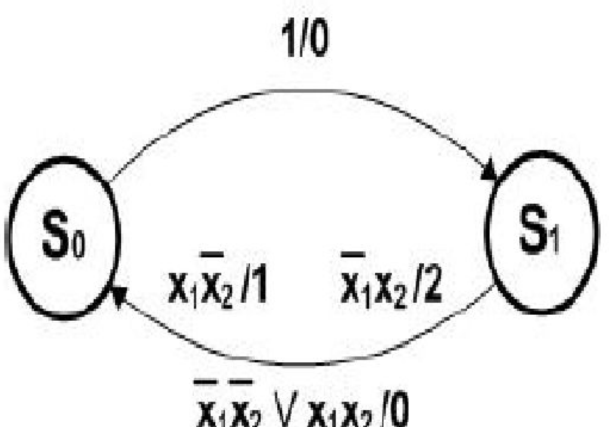


Результат абстрактного синтеза автомата Мили:

а) $x_1\bar{x}_2$ – истинно первое условие $(x_1, x_2) = 10$, выдается выходной сигнал $y = 1$;

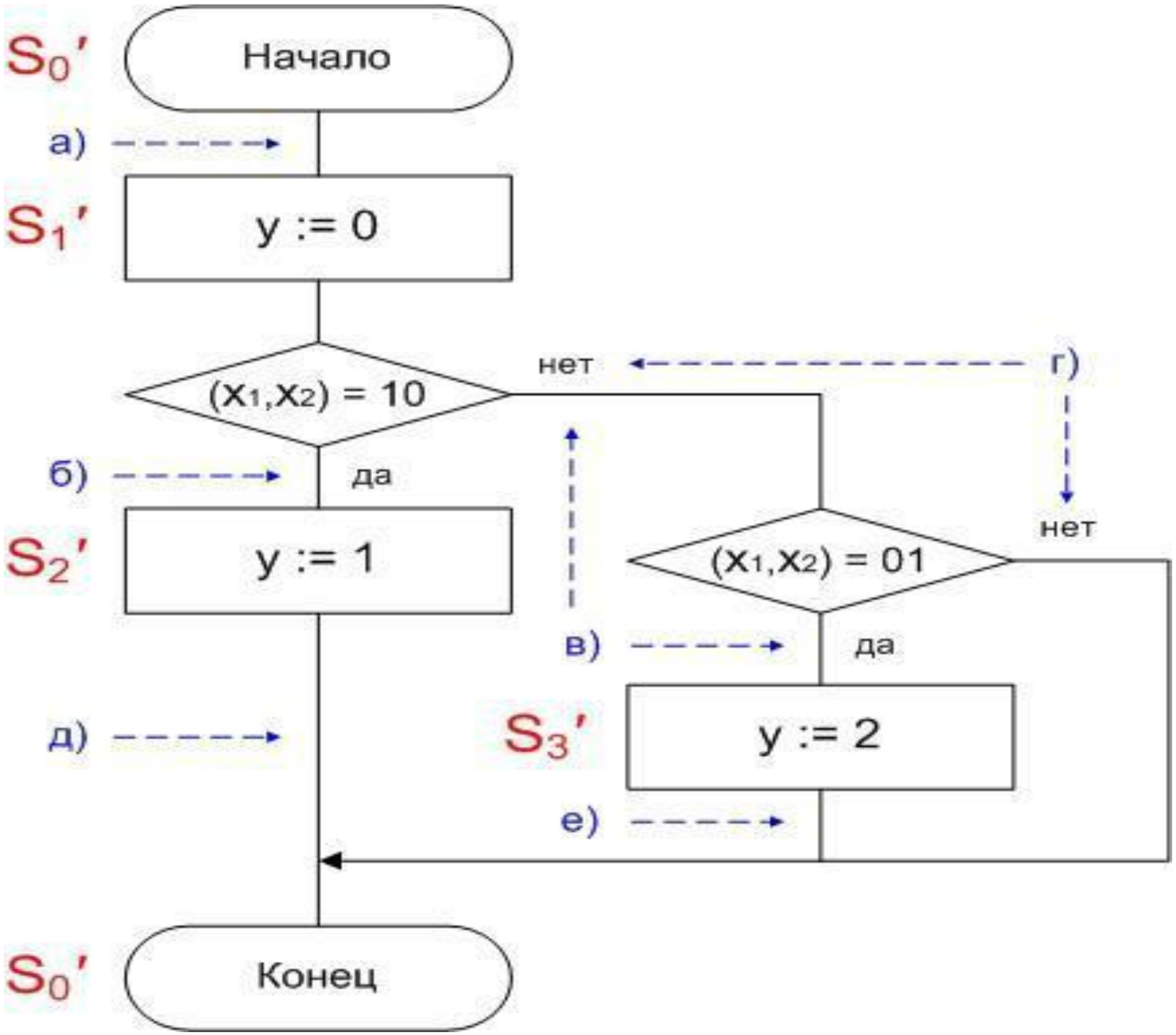
б) $\overline{x_1\bar{x}_2} \wedge \bar{x}_1 x_2 = (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge \bar{x}_1 x_2 = \bar{x}_1 x_2$ – ложно первое условие, истинно второе условие $(x_1, x_2) = 01$, $y = 2$;

в) $\overline{x_1\bar{x}_2} \wedge \overline{\bar{x}_1 x_2} = (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2) = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1 x_2$ – ложны оба условия, на данной ветви алгоритма операторные блоки отсутствуют, на выходе автомата сохраняется прежний сигнал $y = 0$.



	y(t)				s(t+1)			
x(t) / s(t)	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_2$	$x_1\bar{x}_2$	$x_1 x_2$	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_2$	$x_1\bar{x}_2$	$x_1 x_2$
s_0	0	0	0	0	s_1	s_1	s_1	s_1

Разметка схемы алгоритма для случая КА Мура



Условия переходов КА Мура

а) $s_0 \quad s_1$ – безусловно;

б) $s_1' \quad s_2' - x_1\bar{x}_2$;

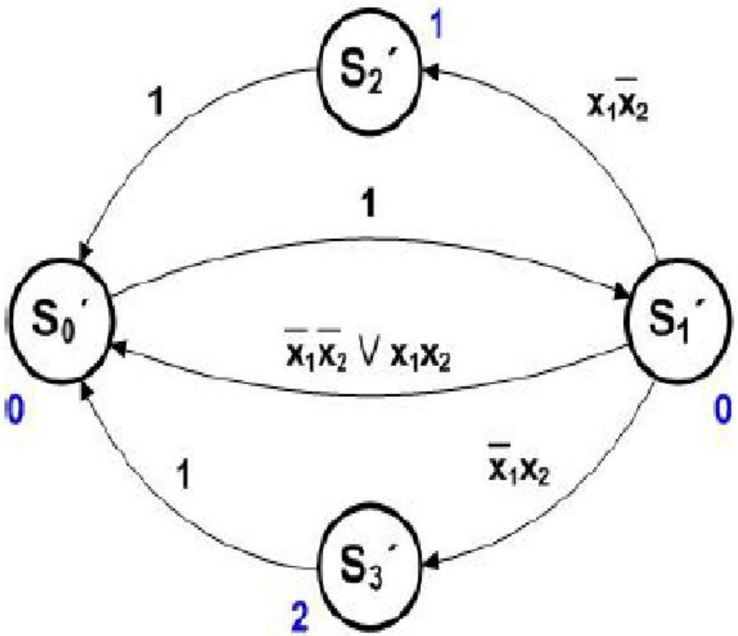
в) $s_1' \quad s_3' - \overline{x_1\bar{x}_2} \wedge \bar{x}_1 x_2 = \bar{x}_1 x_2$;

г) $s_1' \quad s_0' - \overline{x_1\bar{x}_2} \wedge \overline{\bar{x}_1 x_2} = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1 x_2$;

д) s2’ s0’ – безусловно;

е) s3’ s0’ – безусловно.

Результат абстрактного синтеза автомата Мура



а

y(t)	0	0	1	2
x(t) \ s′(t)	s_0'	s_1'	s_2'	s_3'
$\bar{x}_1\bar{x}_2$	s_1'	s_0'	s_0'	s_0'
$\bar{x}_1x_2$	s_1'	s_3'	s_0'	s_0'
$x_1\bar{x}_2$	s_1'	s_2'	s_0'	s_0'
x_1x_2	s_1'	s_0'	s_0'	s_0'

s'(t+1)

б

Абстрактный синтез автоматов

Задача структурного синтеза состоит в построении схемы автомата минимальной сложности. ***На первом этапе необходимо получить минимальную структуру абстрактного автомата.***

Минимизация

Будем рассматривать в качестве примера следующий автомат:

Входные сигналы: **0, 1**.

Таблица переходов:

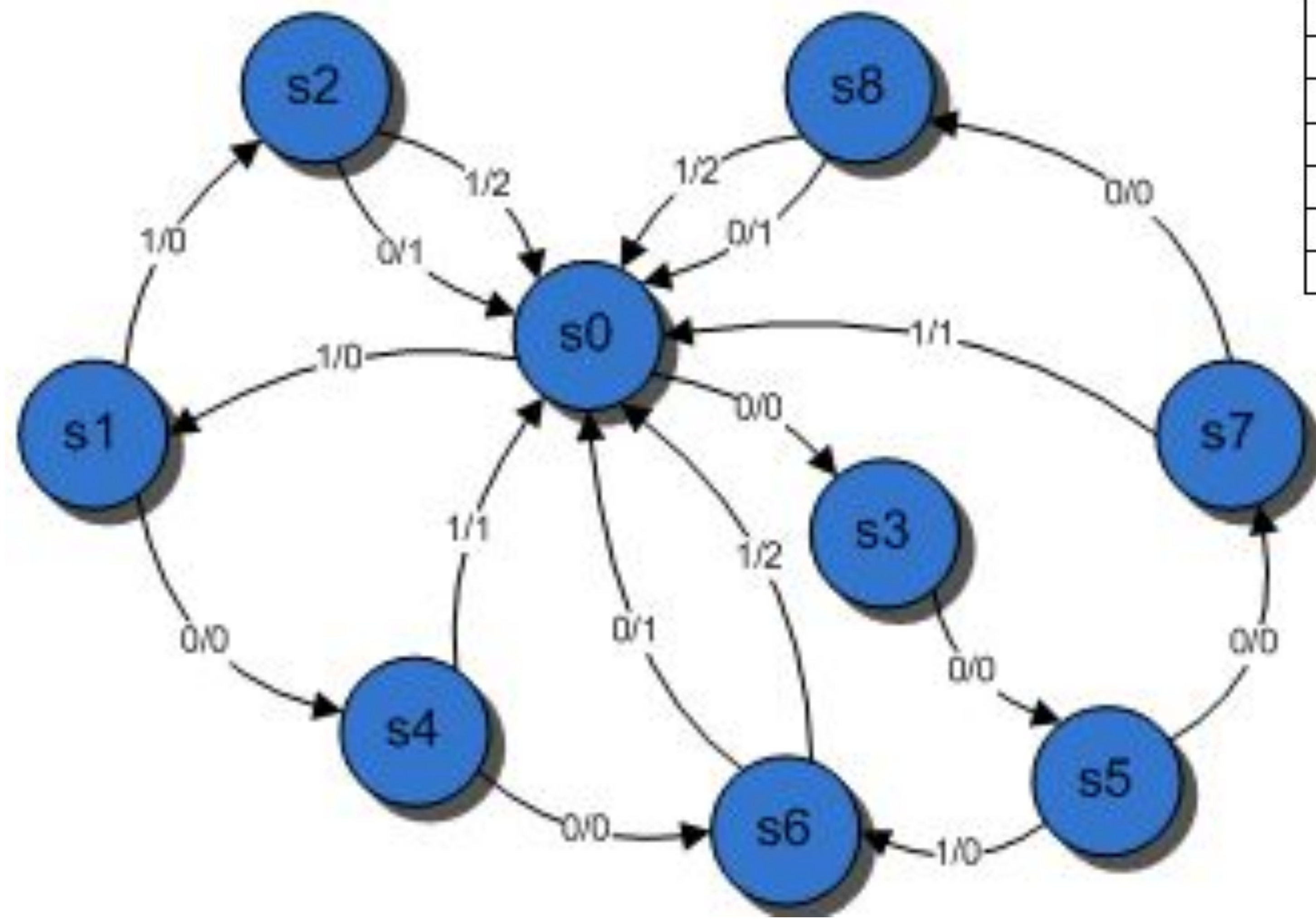
Сост.	0	1
a_0	0/ a_3	0/ a_1
a_1	0/ a_4	0/ a_2
a_2	1/ a_0	2/ a_2
a_3	0/ a_5	0/ a_4
a_4	0/ a_6	1/ a_0
a_5	0/ a_7	0/ a_6
a_6	1/a_0	2/a_0
a_7	0/ a_8	1/ a_0
a_8	1/ a_0	2/a_0

Выходные сигналы: **0, 1, 2.**

S_0 – начальное состояние.:

Абстрактный синтез автома

Сост.	0	1
a_0	$0/a_3$	$0/a_1$
a_1	$0/a_4$	$0/a_2$
a_2	$1/a_0$	$2/a_2$
a_3	$0/a_5$	$0/a_4$
a_4	$0/a_6$	$1/a_0$
a_5	$0/a_7$	$0/a_6$
a_6	$1/a_0$	$2/a_0$
a_7	$0/a_0$	$1/a_0$
a_8	$1/a_0$	$2/a_0$



Теория автоматов

Абстрактный синтез автоматов

Для упрощения автомата в первую очередь необходимо выделить эквивалентные состояния.

Условия эквивалентности Колдуэлла:

1. *Необходимое условие*: внутренние состояния a_i и a_j называются ***эквивалентными***, если при подаче произвольной входной последовательности с начальными состояниями a_i и a_j образуются одинаковые выходные последовательности.

2. Достаточное условие: если две одинаковые строки выходят в следующее состояние, то эти состояния ***эквивалентны***.

Условия эквивалентности Колдуэлла состоит из 2 условий:

- ***Условие совпадения выходов (необходимое)***
- ***Условие совпадения следующих состояний (достаточное)***

Для нашего примера:

$$G_1 = \{(a_0,a_1,a_3,a_5),(a_2,a_6,a_8),(a_4,a_7)\}$$

Абстрактный синтез автоматов

Далее необходимо рассмотреть все возможные пары состояний для каждого из классов и отбросить те из них, которые переводятся по какому-либо символу входного алфавита за пределы этого класса. Эту процедуру нужно повторять до тех пор, пока следующее множество классов эквивалентности не совпадёт с предыдущем. В нашем примере окончательным будет уже второе разбиение:

$G_2 = \{(a_0),(a_1,a_5)(a_3),(a_2,a_6,a_s),(a_4,a_7)\}$

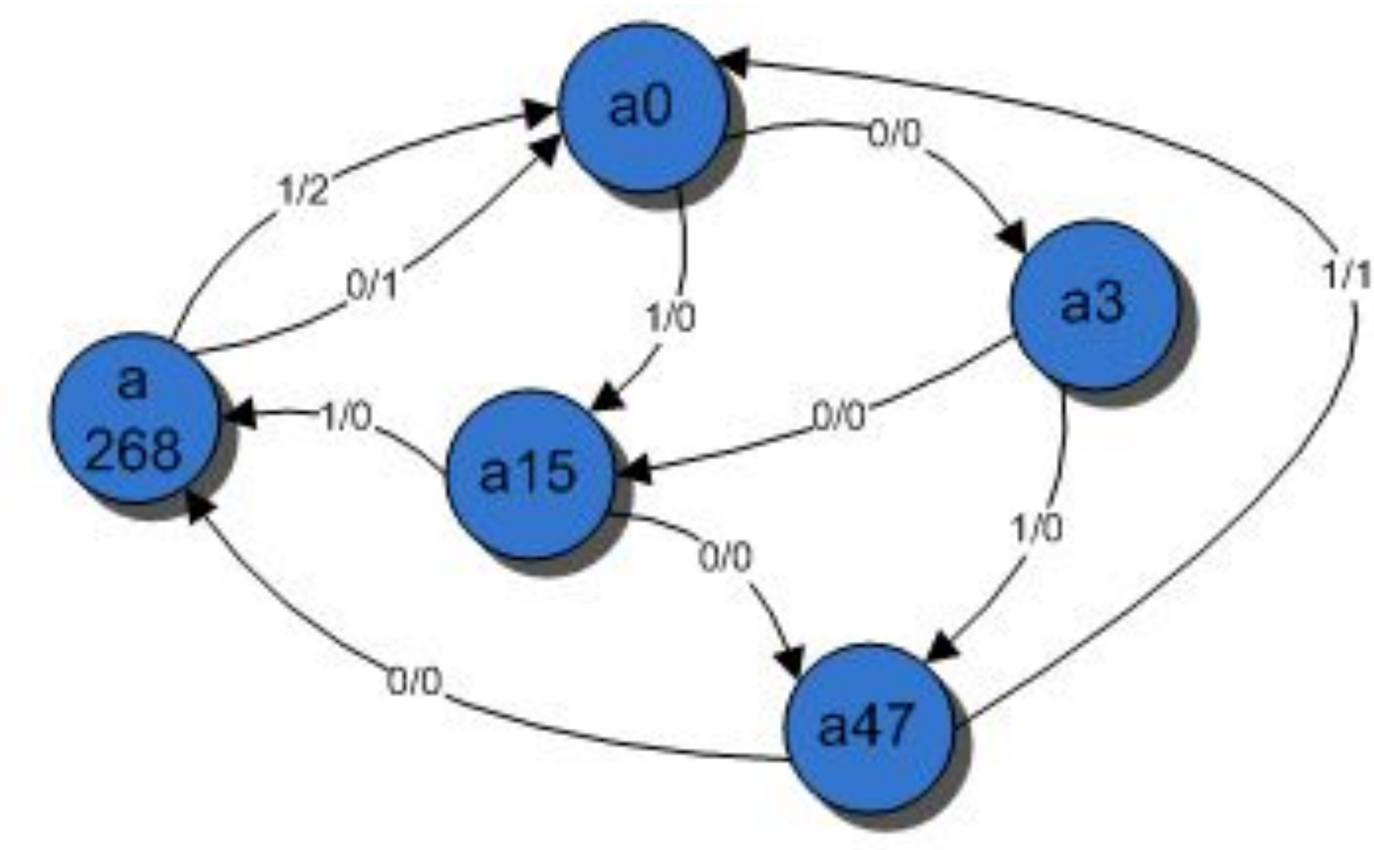
Новая таблица переходов:

	0	*1*
a_0	0/a3	0/a15
a_{15}	0/a47	0/a268
a_3	0/a15	0/a47
a_{268}	1/a0	2/a0
a_{47}	0/a268	1/a0

Теория автоматов

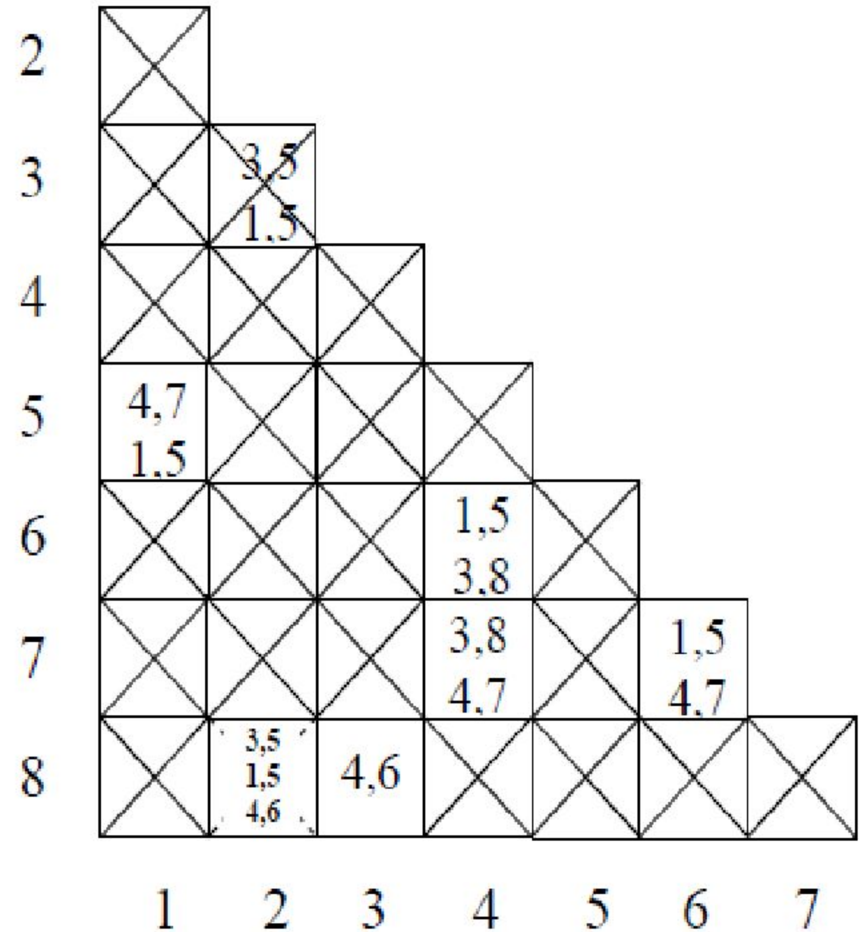
Абстрактный синтез автоматов

Граф минимизированного автомата:



Метод треугольной матрицы

P_k / S_i	a	b	c
1	4 / 1	2 / 2	5 / 1
2	5 / 2	1 / 1	4 / 2
3	3 / 2	5 / 1	4 / 2
4	5 / 1	8 / 2	4 / 2
5	7 / 1	2 / 2	1 / 1
6	1 / 1	3 / 2	4 / 2
7	5 / 1	3 / 2	7 / 2
8	3 / 2	5 / 1	6 / 2



Результат

p_k / s_i	a	b	c
1'	4'/ 1	2'/ 2	1'/ 1
2'	1'/ 2	1'/ 1	4'/ 2
3'	3'/ 2	1'/ 1	4'/ 2
4'	1'/ 1	3'/ 2	4'/ 2
1'	4'/ 1	2'/ 2	1'/ 1
4'	1'/ 1	3'/ 2	4'/ 2
4'	1'/ 1	3'/ 2	4'/ 2
3'	3'/ 2	1'/ 1	4'/ 2

Таблица 2.9

p_k / s_i	a	b	c
1'	4'/ 1	2'/ 2	1'/ 1
2'	1'/ 2	1'/ 1	4'/ 2
3'	3'/ 2	1'/ 1	4'/ 2
4'	1'/ 1	3'/ 2	4'/ 2

Автомат Мура Автомат Мили

Автомат Мура и соответствующий ему автомат Мили:

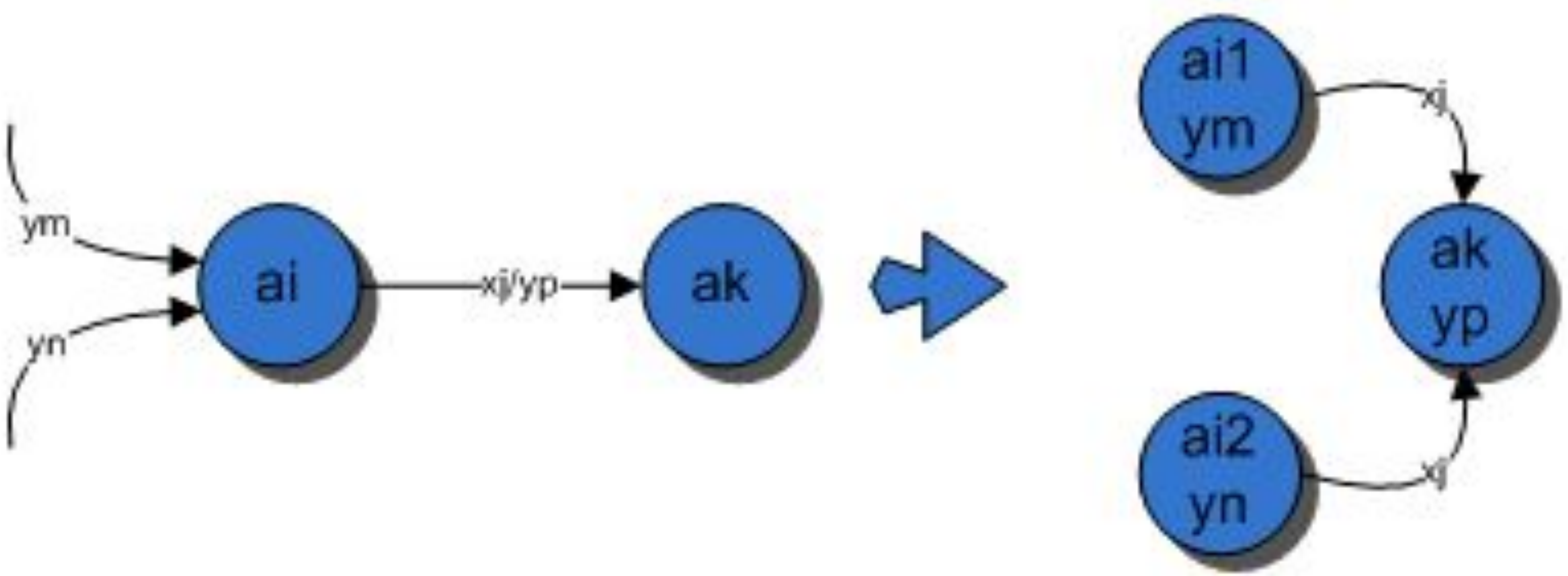
Переход от автомата Мили к автомату Мура:

*От каждого автомата **Мили** можно перейти к эквивалентному ему автомату **Мура**. Если к одной вершине подходят дуги, отмеченные разными выходными сигналами, то производится разбиение на несколько вершин, каждая из которых отмечается своим выходным сигналом, и от каждой из этих вершин выводятся все дуги, существующие в графе автомата Мили.*

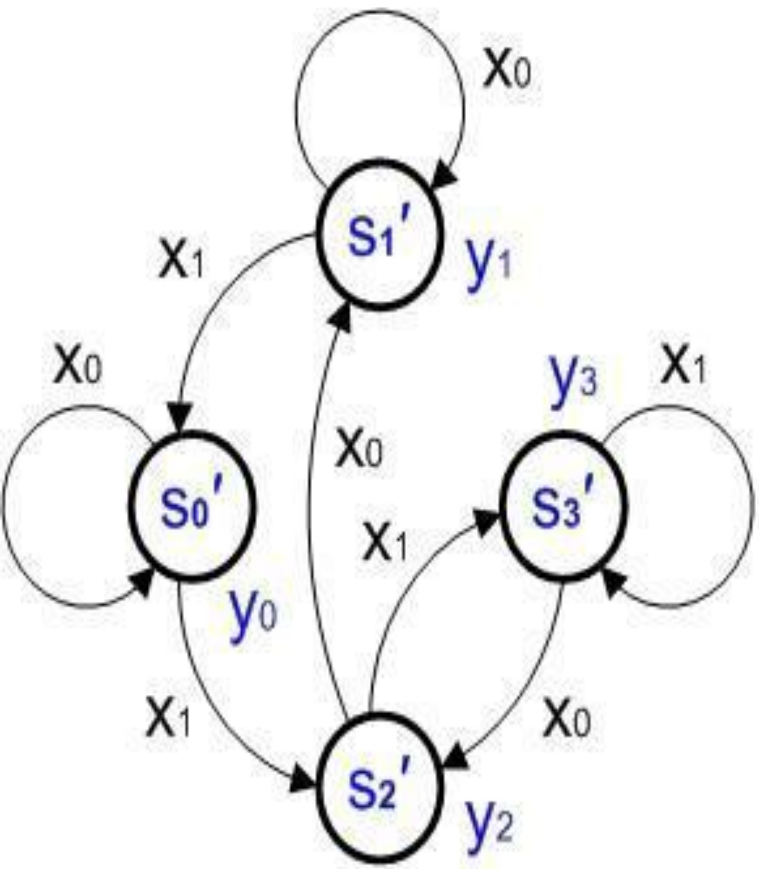
Теория автоматов

Автомат Мили Автомат Мура

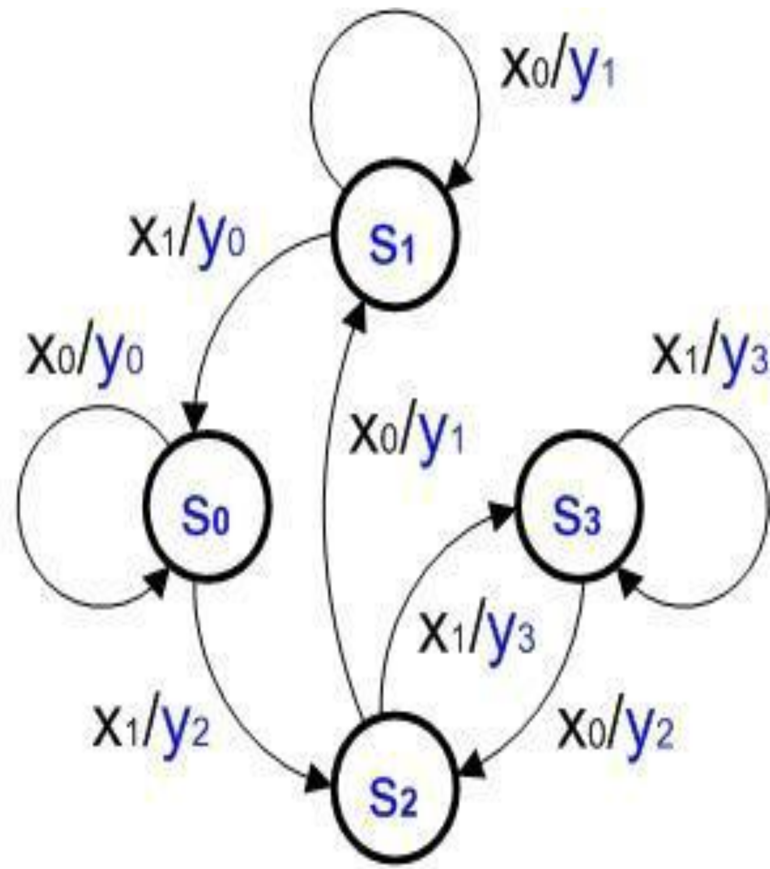
Переход от автомата Мили к эквивалентному автомату Мура:



Переход от автомата Мура к автомату Мили



Автомат Мура



Автомат Мили

Алгоритм синтеза конечных автоматов

Автомат Мили

1 шаг. Построение диаграммы переходов (графа конечного автомата).

2 шаг. Для заданной ДС составляем таблицы переходов и выходов.

3 шаг. Определяем количество ЭП, количество входов и выходов.

4 шаг. Кодируем состояния, входы и выходы конечного автомата.

5 шаг. Составляем по таблице выходов - минимальные функции выходов.

6 шаг. Составляем таблицу возбуждения памяти и функции ВП (миним.)

7 шаг. Все логические функции приводим к единому базису И-НЕ.

8 шаг. Составляем логическую функцию КА в базисе И-НЕ

Функциональные схемы

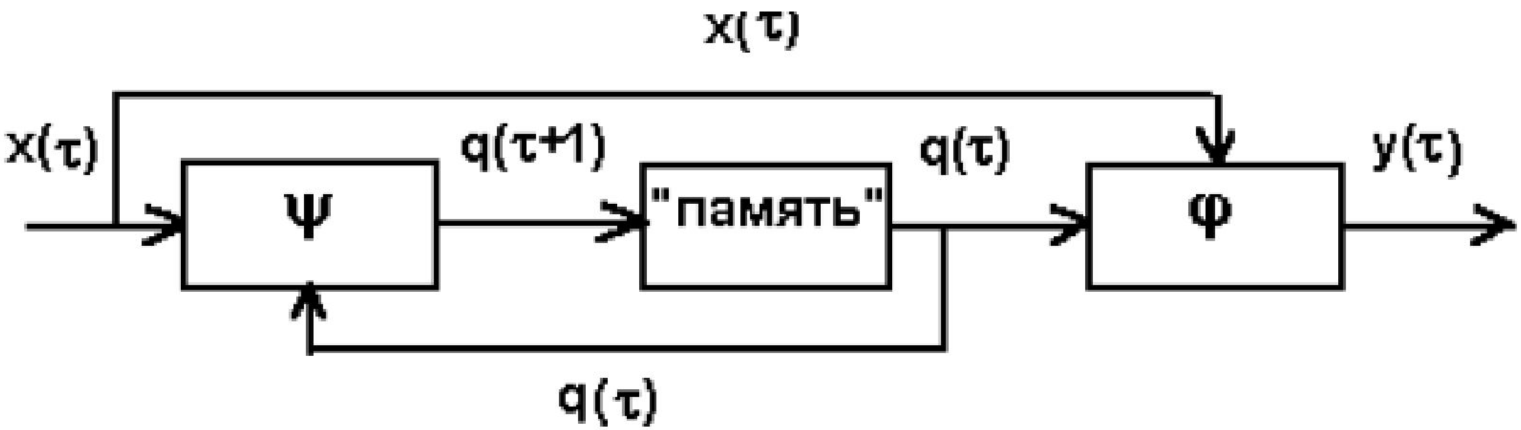


Рис. 1.3. Функциональная схема автомата Мили.

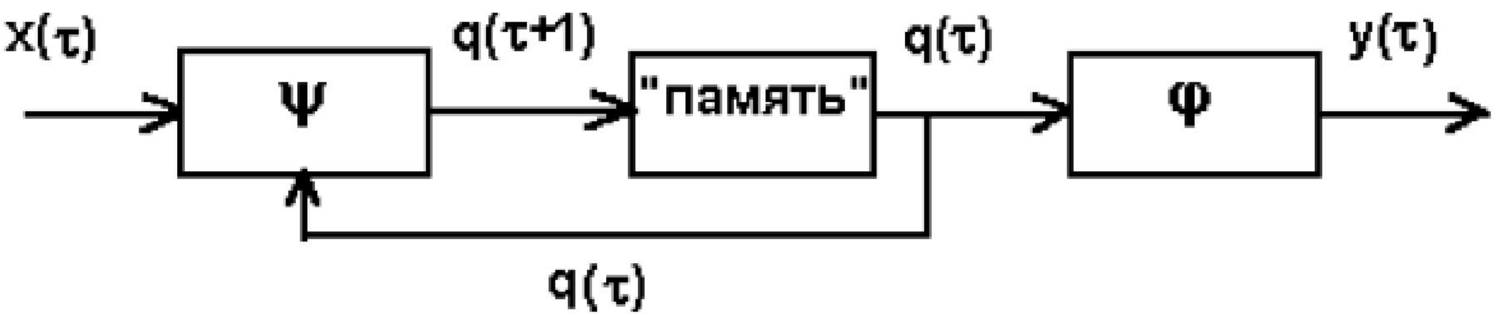
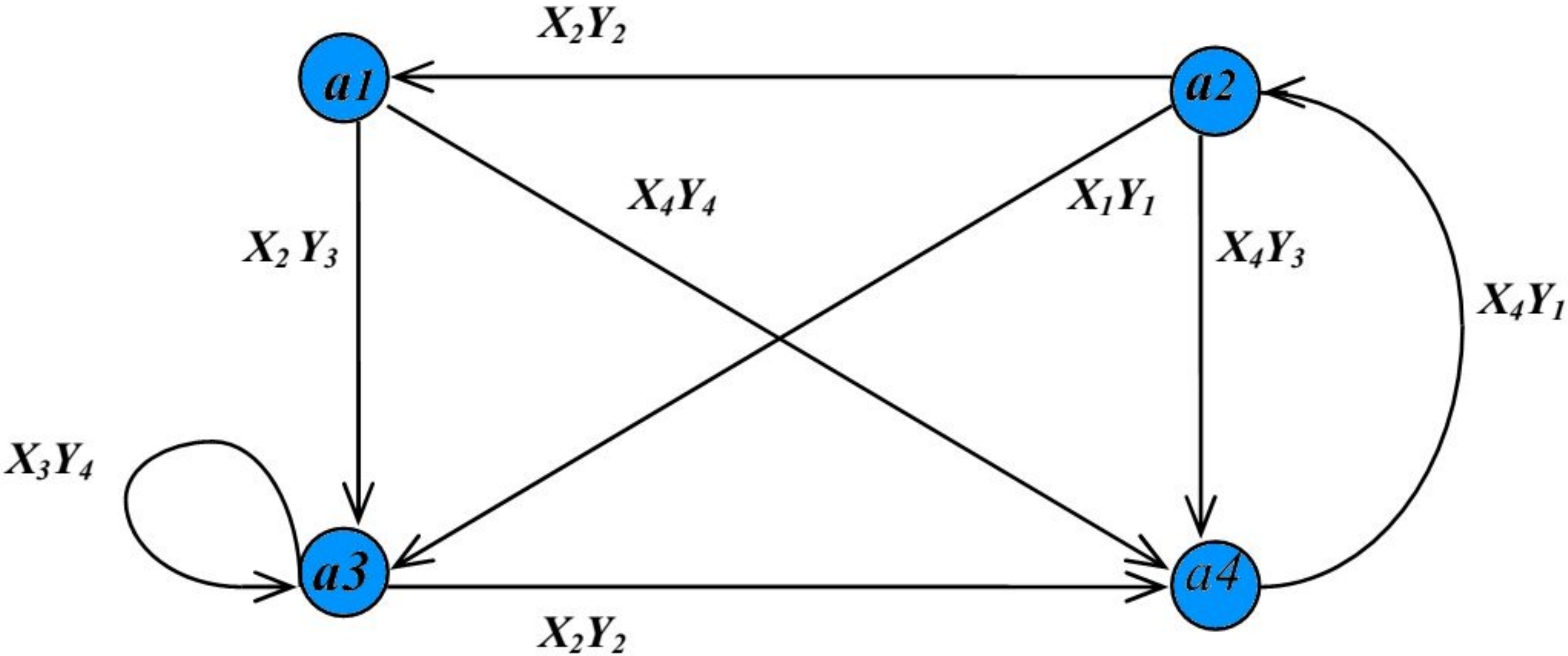


Рис. 1.4. Функциональная схема автомата Мура.

Теория автоматов

Синтез конечных автоматов (v.1)

1 шаг. Построение диаграммы переходов.



Автомат Мили

Синтез конечных автоматов (v.1)

2 шаг. Таблицы переходов и выходов.

$a(t+1)=\delta[a(t); X(t)]$

Сост. вх.	a_1	a_2	a_3	a_4
X_1	—	a_3	—	—
X_2	a_3	a_1	a_4	—
X_3	—	—	a_3	—
X_4	a_4	a_4	—	a_2

$Y(t)=\lambda[a(t); X(t)]$

Сост. вх.	a_1	a_2	a_3	a_4
X_1	—	Y_1	—	—
X_2	Y_3	Y_2	Y_2	—
X_3	—	—	Y_4	—
X_4	Y_4	Y_3	—	Y_1

Автомат Мили

Синтез конечных автоматов (v.1)

3 шаг. Определение входных данных

Для этого используем

K=4 $[a_k]$

P=4 $[X_i]$

A=4 $[Y_j]$

Определяем число элементов памяти:

$$r \geq \log_2 K = 2$$

Число разрядов входной шины:

$$n \geq \log_2 P = 2$$

Число разрядов выходной шины:

$$m \geq \log_2 S = 2$$

Автомат Мили

Синтез конечных автоматов (v.1)

4 шаг. Кодируем состояния, входы и выходы.

Внутреннее состояние		**Входные шины**		**Выходные шины**	
$a_1=$	*00*	$X_1=$	*00*	$Y_1=$	*00*
$a_2=$	*01*	$X_2=$	*01*	$Y_2=$	*01*
$a_3=$	*10*	$X_3=$	*10*	$Y_3=$	*10*
$a_4=$	*11*	$X_4=$	*11*	$Y_4=$	*11*
	Q_1Q_2		x_1x_2		y_1y_2

Автомат Мили

Синтез конечных автоматов (v.1)

4 шаг. Кодируем переходы и выходы.

Таблица переходов

x1x2 \ Q1Q2	00	01	10	11
00	—	10	—	—
01	10	00	11	—
10	—	—	10	—
11	11	11	—	01

Таблица выходов

x1x2 \ Q1Q2	00	01	10	11
00	—	00	—	—
01	10	01	01	—
10	—	—	11	—
11	11	10	—	00

Автомат Мили

Синтез конечных автоматов (v.1)

5 шаг. Минимизация функций выходов.

$$y_1 = \overline{x_1}x_2\overline{Q_1}\,\overline{Q_2} \vee x_1x_2\overline{Q_1}\,\overline{Q_2} \vee x_1x_2\overline{Q_1}Q_2 \vee x_1\overline{x_2}Q_1\overline{Q_2}; \quad \textbf{(1)}$$

$$y_2 = x_1x_2\overline{Q_1}\,\overline{Q_2} \vee \overline{x_1}x_2\overline{Q_1}Q_2 \vee \overline{x_1}x_2Q_1\overline{Q_2} \vee x_1\overline{x_2}Q_1\overline{Q_2}. \quad \textbf{(2)}$$

x1x2 \ Q1Q2	00	01	11	10
00	X		X	X
01	1			X
11	1	1		X
10			X	1

x1x2 \ Q1Q2	00	01	11	10
00	X		X	X
01		1		1
11	1	X		X
10			X	1

$$y_1 = Q_1\overline{Q_2} \vee x_2\overline{Q_2} \vee \overline{Q_1}x_1x_2;$$

$$y_2 = Q_1\overline{Q_2} \vee \overline{Q_1}x_1x_2 \vee x_2\overline{Q_1}Q_2.$$

Автомат Мили

Синтез конечных автоматов (v.1)

***6 шаг. Функции возбуждения памяти (ВП)* строятся на основе таблицы переходов и таблицы истинности триггеров различных типов, которые являются основой элементов памяти (ЭП) конечного автомата .**

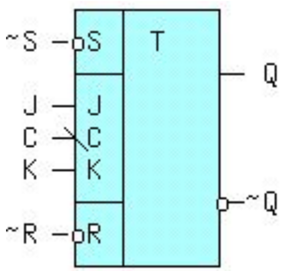
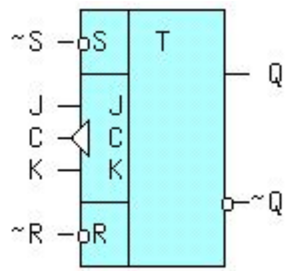


Рис.45.



$Q(t)$	$Q(t+1)$	S	R	D	J	K
0	0	0	X	0	0	X
0	1	1	0	1	1	X
1	0	0	1	0	X	1
1	1	X	0	1	X	0

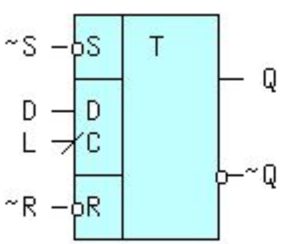
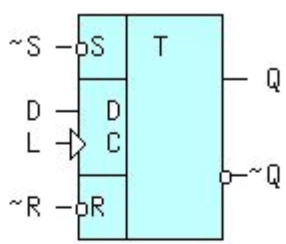
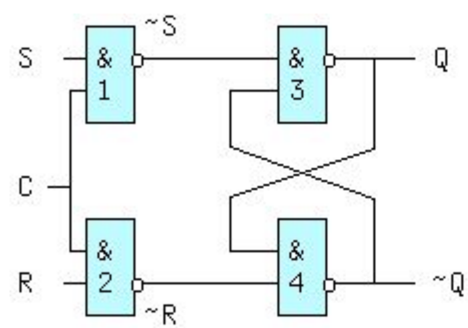
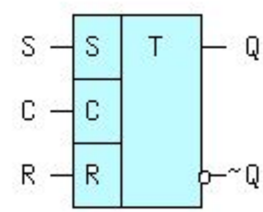


Рис.43.







Автомат Мили

Синтез конечных автоматов (v.1)

6 шаг. Таблица функций ВП.

вх. сигн	Q_1	0	Q_2	0	Q_1	0	Q_2	1	Q_1	1	Q_2	0	Q_1	1	Q_2	1
x_1,x_2	R_1	S_1	R_2	S_2	R_1	S_1	R_2	S_2	R_1	S_1	R_2	S_2	R_1	S_1	R_2	S_2
00					0	1	1	0								
01	0	1	–	0	–	0	1	0	0	–	0	1				
10									0	–	–	0				
11	0	1	0	1	0	1	0	–					1	0	0	–

$$\begin{cases} R_1 = x_1 x_2 Q_1 Q_2 \\ S_1 = \overline{x_1} x_2 \overline{Q_1}\,\overline{Q_2} \vee x_1 x_2 \overline{Q_1}\,\overline{Q_2} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{Q_1} Q_2 \vee x_1 x_2 \overline{Q_1} Q_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_2 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{Q_1} Q_2 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{Q_1} Q_2 \\ S_2 = x_1 x_2 \overline{Q_1}\,\overline{Q_2} \vee \overline{x_1} x_2 Q_1 \overline{Q_2} \end{cases}$$

Автомат Мили

Синтез конечных автоматов (v.1)

6 шаг. Минимизация функций ВП.

x1x2 \ Q1Q2	00	01	11	10
00				
01		X		
11			1	
10				

$$R_{1\,min} = x_1 x_2 Q_1 Q_2$$

x1x2 \ Q1Q2	00	01	11	10
00		1		
01	1			X
11	1	1		
10				X

$$S_{1min} = x_2 \overline{Q_1}\,\overline{Q_2} \vee x_1 x_2 \overline{Q_1} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{Q_1} Q_2$$

x1x2 \ Q1Q2	00	01	11	10
00		1		
01	X	1		
11				
10				X

$$R_{2min} = \overline{x_1}\,\overline{Q_1} Q_2$$

x1x2 \ Q1Q2	00	01	11	10
00				
01				1
11	1	X	X	
10				

$$S_{2min} = x_1 x_2 \overline{Q_1} \vee \overline{x_1} x_2 Q_1 \overline{Q_2}$$

Автомат

Синтез конечных автоматов (v.1)

7 шаг. Система уравнений (И-НЕ) – структура КА

$$R_1 = x_1 x_2 Q_1 Q_2$$

$$S_1 = \overline{\left(\overline{x_2 \overline{Q_1}\,\overline{Q_2}}\right)\left(\overline{x_1 x_2 \overline{Q_1}}\right)\left(\overline{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{Q_1} Q_2}\right)}$$

$$R_2 = \overline{x_1}\,\overline{Q_1} Q_2$$

$$S_2 = \overline{\left(\overline{x_1 x_2 \overline{Q_1}}\right)\left(\overline{\overline{x_1} x_2 Q_1 \overline{Q_2}}\right)}$$

$$y_1 = \overline{\left(\overline{Q_1 \overline{Q_2}}\right)\left(\overline{x_2 \overline{Q_2}}\right)\left(\overline{x_1 x_2 \overline{Q_1}}\right)}$$

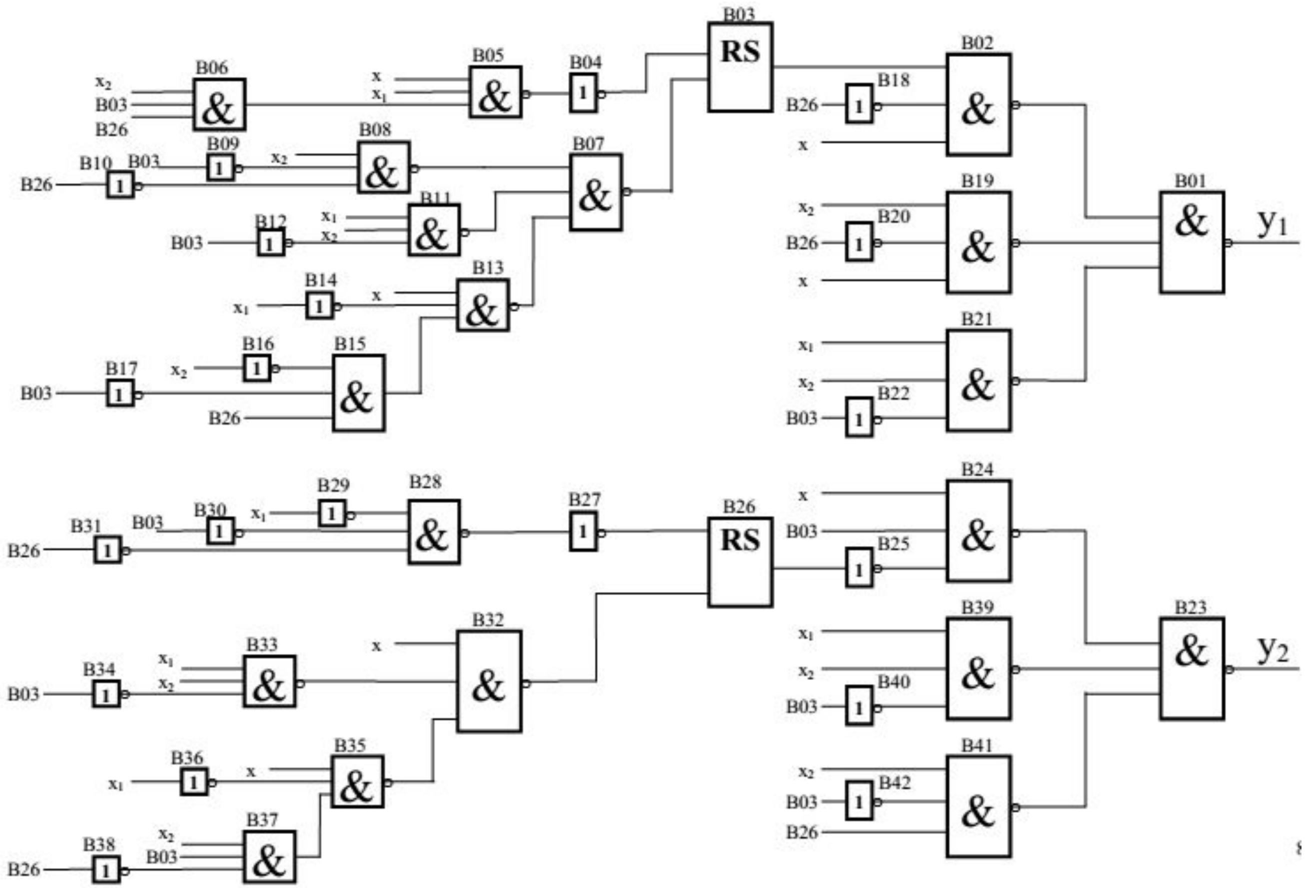
$$y_2 = \overline{\left(\overline{Q_1 \overline{Q_2}}\right)\left(\overline{x_1 x_2 \overline{Q_1}}\right)\left(\overline{x_2 \overline{Q_1} Q_2}\right)}$$

Автомат

Теория автоматов

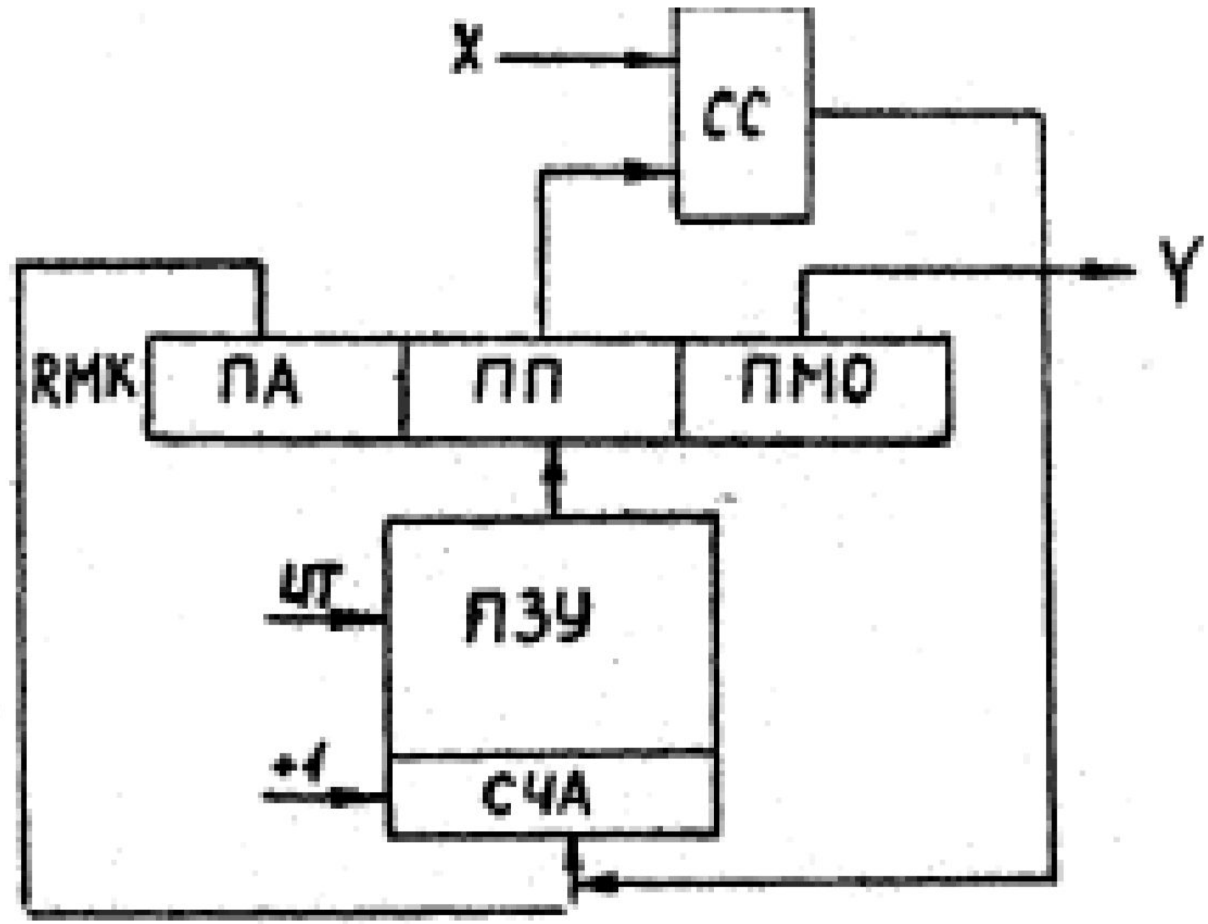
Синтез конечных автоматов (v.1)

7 шаг. Логическая структура КА

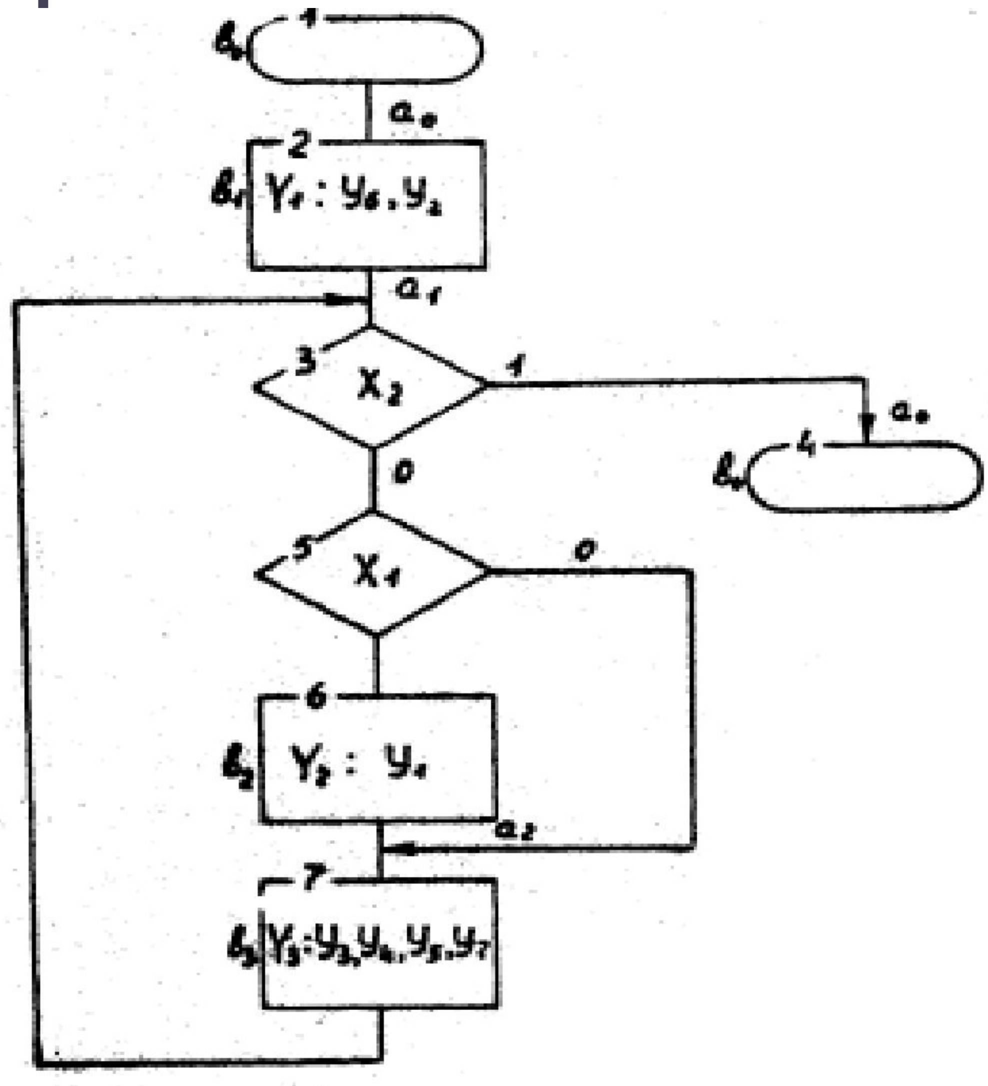


Автомат Мили

Реализация с программируемой логикой



Микропрограмма автомата



Содержимое ПЗУ

Адрес ПЗУ	$A_3A_2A_1A_0$	П $\lambda_1\lambda_2$	$y_7y_6y_5y_4y_3y_2y_1$	Номер опе,ра-тора на рис.4.
0 0 0 0		0 * *	0 1 0 0 0 1 0	2
0 0 0 1	0 0 0 0	1 * 1	0 0 0 0 0 0 0	3
0 0 1 0	0 1 0 0	1 0 1	0 0 0 0 0 0 0	5
0 0 1 1		0 * *	1 0 0 0 0 0 0	6
0 1 0 0		0 * *	0 0 1 1 1 0 1	7
0 1 0 1	0 0 0 1	1 * *	0 0 0 0 0 0 0	