ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СЛАР

- *Ітераційні* методи полягають в тому, що розв'язок $\mathbf{x}$ системи знаходиться як границя послідовних наближень $\mathbf{x}^{(k)}$ при $k \to \infty$, де k номер ітерації (Якобі, Зейделя, варіаційного типу).

$$\mathbf{x}_{розв'язок} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)}.$$

Правило зупинки
$$\frac{\| \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} \|}{\|\mathbf{x}^{(k)}\|} \le \varepsilon_{зад}$$

або
$$\| \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} \| \le \varepsilon_{зад}$$

або
$$\frac{\| \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} \|}{\| \mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^{(k)} \|} \le \varepsilon_{зад}$$

МЕТОД ПРОСТОЇ ІТЕРАЦІЇ

Припустимо, що $a_{ii} \neq 0,\ i = \overline{1, n}$ і перетворимо систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

до вигляду

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1, \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1} + \beta_n, \end{cases}$$

де

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, i \neq j \\ \alpha_{ij} = 0, i = j \end{cases}, \beta = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}\ \alpha_{12} \ldots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\ \alpha_{22} \ldots \alpha_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}\ \alpha_{n2} \ldots \alpha_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \alpha \mathbf{x}^{(k)} + \beta, \ \ k=0,1,2\ldots$$

або у розгорнутому вигляді

$$x_i^{(0)} = \beta_i,$$

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)} + \beta_i, \qquad i = \overline{1, n}, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

$$
\begin{aligned}
20{,}9x_1 + 1{,}2x_2 + 2{,}1x_3 + 0{,}9x_4 &= 21{,}70,\\
1{,}2x_1 + 21{,}2x_2 + 1{,}5x_3 + 2{,}5x_4 &= 27{,}46,\\
2{,}1x_1 + 1{,}5x_2 + 19{,}8x_3 + 1{,}3x_4 &= 28{,}76,\\
0{,}9x_1 + 2{,}5x_2 + 1{,}3x_3 + 32{,}1x_4 &= 49{,}72.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{20{,}9}(21{,}70 - 1{,}2x_2 - 2{,}1x_3 - 0{,}9x_4),\\
x_2 &= \frac{1}{21{,}2}(27{,}46 - 1{,}2x_1 - 1{,}5x_3 - 2{,}5x_4),\\
x_3 &= \frac{1}{19{,}8}(28{,}76 - 2{,}1x_1 - 1{,}5x_2 - 1{,}3x_4),\\
x_4 &= \frac{1}{32{,}1}(49{,}72 - 0{,}9x_1 - 2{,}5x_2 - 1{,}3x_3).
\end{aligned}
$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1,04 \\ 1,30 \\ 1,45 \\ 1,55 \end{pmatrix}.$$

при $k = 1$

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{20,9}(21,70 - 1,560 - 3,045 - 1,395) = 0,75,$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{21,2}(27,46 - 1,248 - 2,175 - 3,875) = 0,95,$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{19,8}(28,76 - 2,184 - 1,950 - 2,015) = 1,14,$$

$$x_4^{(1)} = \frac{1}{32,1}(49,72 - 0,936 - 3,250 - 1,885) = 1,36;$$

при $k = 2$

$$x_1^{(2)} = \frac{16,942}{20,9} = 0,8106, \qquad x_3^{(2)} = \frac{23,992}{19,8} = 1,2117,$$

$$x_2^{(2)} = \frac{21,450}{21,2} = 1,0118, \qquad x_4^{(2)} = \frac{45,188}{32,1} = 1,4077;$$

при $k=3$

$$x_1^{(3)} = \frac{16,67434}{20,9} = 0,7978, \qquad x_3^{(3)} = \frac{23,71003}{19,8} = 1,1975,$$

$$x_2^{(3)} = \frac{21,15048}{21,2} = 0,9977, \qquad x_4^{(3)} = \frac{44,88575}{32,1} = 1,3983;$$

при $k=4$

$$x_1^{(4)} = \frac{16,7295}{20,9} = 0,8004, \qquad x_3^{(4)} = \frac{23,7703}{19,8} = 1,2005,$$

$$x_2^{(4)} = \frac{21,2106}{21,2} = 1,0005, \qquad x_4^{(4)} = \frac{44,9510}{32,1} = 1,4003.$$

$$|x_1^{(3)} - x_1^{(4)}| = 0,0026, \qquad |x_3^{(3)} - x_3^{(4)}| = 0,0030,$$
$$|x_2^{(3)} - x_2^{(4)}| = 0,0028, \qquad |x_4^{(3)} - x_4^{(4)}| = 0,0020.$$

ЗБІЖНІСТЬ МЕТОДУ ПРОСТОЇ ІТЕРАЦІЇ

Для збіжності процесу обчислень необхідно, щоб виконувалась умова

$$\|\alpha\| < 1.$$

Відповідно для різних матричних норм:

$$l_2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha^2{}_{ij} < 1,$$

$$l_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1,$$

$$l_0 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1.$$

Теорема

Якщо матриця *α* системи рівнянь $\mathbf{x}^{(k+1)} = \alpha\mathbf{x}^{(k)} + \beta$ задовольняє одну із умов

$$l_2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha^2{}_{ij} < 1,$$

$$l_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1,$$

$$l_0 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1.$$

то ця система рівнянь має єдиний розв'язок

$\mathbf{x}^* = (x^*_1, x^*_2 \ldots, x^*_n)$, який можна обчислити як границю послідовності $\{\mathbf{x}^{(k+1)}\}$, починаючи з довільного початкового вектора $\mathbf{x}^{(0)} = (x^{(0)}_1, x^{(0)}_2 \ldots, x^{(0)}_n)$

ПОХИБКИ МЕТОДУ ПРОСТОЇ ІТЕРАЦІЇ

Глобальна похибка розв'язку на двох сусідніх ітераціях

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^*\| = \|\alpha\|\,\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\|$$

Локальні похибки, що отримані на двох сусідніх ітераціях

$$\left\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^*\right\| \le \frac{\|\alpha\|}{1-\|\alpha\|}\left\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\right\|.$$

$$\left\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^*\right\| \le \frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1-\|\alpha\|}\left\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\right\|.$$

Метод простої ітерації слід завершити, якщо стане справедливою нерівність:

$$\max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \le \frac{1-l_\infty}{l_\infty}\varepsilon.$$

де ε – наперед задана точність обчислень.

Аналогічні умови дійсні і для інших матричних норм.

МЕТОД ЯКОБІ

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right], \quad i = \overline{1,n}, \quad k = 0,1,2,....$$

Запишемо метод Якобі в матричній формі. Для цього запишемо матрицю $\mathbf{A}$ як:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}.$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ a_{21} & 0 & & \\ ... & ... & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ & 0 & ... & a_{2n} \\ & & ... & ... \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

МЕТОД ЯКОБІ

Запишемо СЛАР як:

$$(\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

або

$$\mathbf{Dx} = \mathbf{b} - (\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}.$$

Тоді у матричній формі метод Якобі має вид:

$$\mathbf{Dx}^{(k+1)} = \mathbf{b} - (\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}^{(k)}$$

З

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

видно, що матриця перетворення ітераційного методу $\mathbf{x}^{(k+1)} = \alpha\mathbf{x}^{(k)} + \beta$ має вид:

$$\alpha = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}).$$

МЕТОД ЯКОБІ

При цьому

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} -a_{ij}/a_{ii}, & i \neq j, \\ 0, & i = j. \end{cases}$$

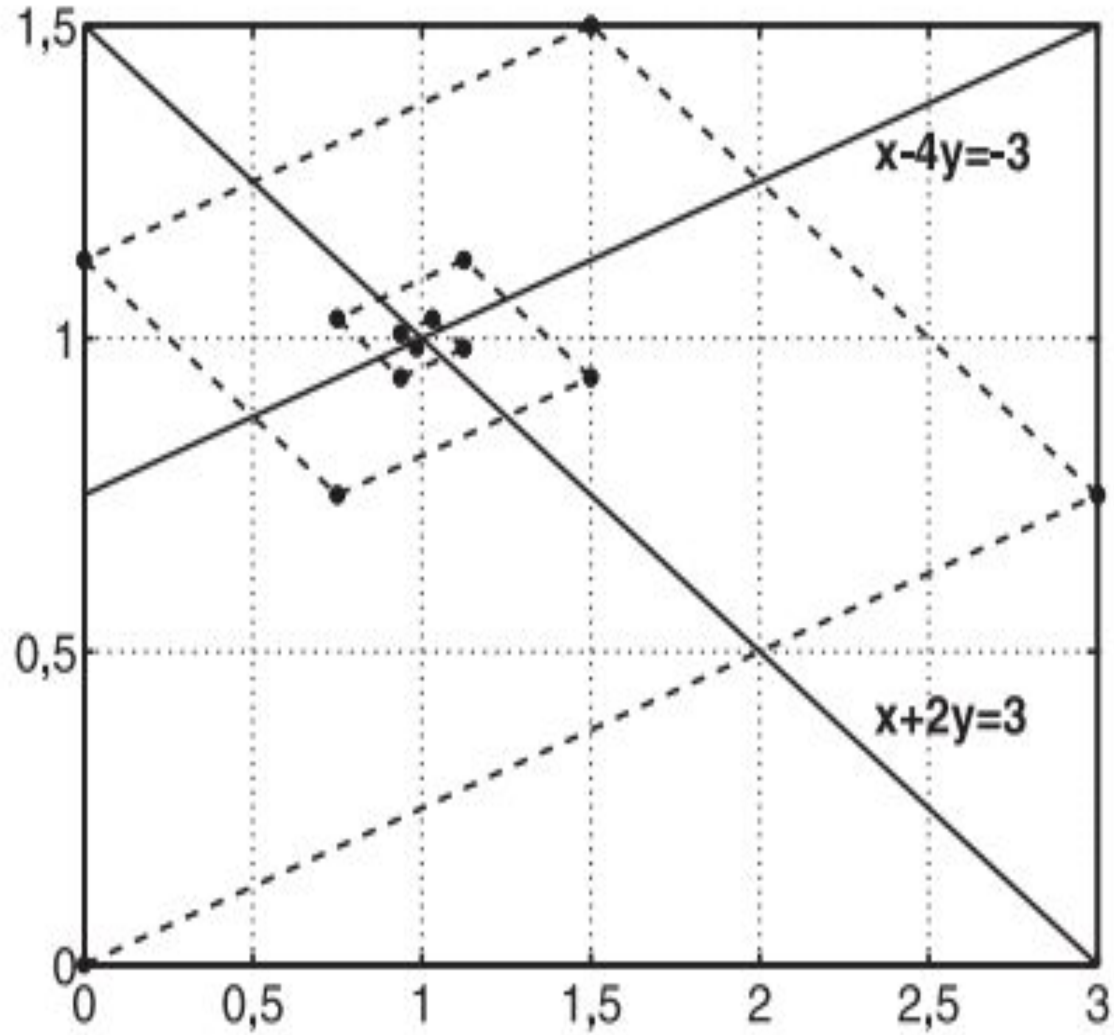
Для збіжності методу Якобі достатньо, щоб матриця α мала домінуючу головну діагональ:

$$\| \alpha \|_\infty = \max_i \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1$$

тобто

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, i = 1, n.$$

МЕТОД ЯКОБІ



$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - 4y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = 3 - 2y^{(k)} \\ y^{(k+1)} = \dfrac{x^{(k)} + 3}{4} \end{cases}$$

МЕТОД ГАУССА-ЗЕЙДЕЛЯ

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right], \quad i = \overline{1,n}, \quad k = 0,1,2,\dots.$$

Маємо $\quad (\mathbf{L} + \mathbf{D})\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{U}\mathbf{x}$

У матричній формі метод Гаусса-Зейделя записується як:

$$(\mathbf{L} + \mathbf{D})\, \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{b} - \mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)}.$$

де матриця перетворення має вигляд

$$\boldsymbol{\alpha} = -(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}$$

Умови збіжності методів Якобі і Гаусса-Зейделя ідентичні.

$k=1$

$$x_1^{(1)}=\frac{1}{20,9}(21,70-1,560-3,045-1,395)=0,7512.$$

При вычислении $x_2^{(1)}$ используем уже полученное значение $x_1^{(1)}$:

$$x_2^{(1)}=\frac{1}{21,2}(27,46-0,900-2,175-3,875)=0,9674.$$

При вычислении $x_3^{(1)}$ используем значения $x_1^{(1)}$ и $x_2^{(1)}$:

$$x_3^{(1)}=\frac{1}{19,8}(28,76-1,575-1,455-2,015)=1,1977.$$

Наконец, используя значения $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$, получаем

$$x_4^{(1)}=\frac{1}{32,1}(49,72-0,675-2,425-1,560)=1,4037.$$

Аналогичным образом ведем вычисления при $k=2$ и $k=3$.

при $k=2$

$$x_1^{(2)}=\frac{16,76062}{20,9}=0,8019,\qquad x_3^{(2)}=\frac{23,75180}{19,8}=1,9996,$$

$$x_2^{(2)}=\frac{21,19202}{21,2}=0,9996,\qquad x_4^{(2)}=\frac{44,93981}{32,1}=1,4000;$$

при $k=3$

$$x_1^{(3)}=\frac{16,72132}{20,9}=0,80006,\qquad x_3^{(3)}=\frac{23,759844}{19,8}=1,19999,$$

$$x_2^{(3)}=\frac{21,200528}{21,2}=1,00002,\qquad x_4^{(3)}=\frac{44,939909}{32,1}=1,40000.$$

ПОХИБКИ МЕТОДУ ГАУССА-ЗЕЙДЕЛЯ

Локальна похибка за наближеннями, що отримані на двох сусідніх ітераціях

$$\left\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^{*}\right\| \le \frac{\|\mathbf{U}\|}{1-\|\alpha\|}\left\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^{(k-1)}\right\|.$$

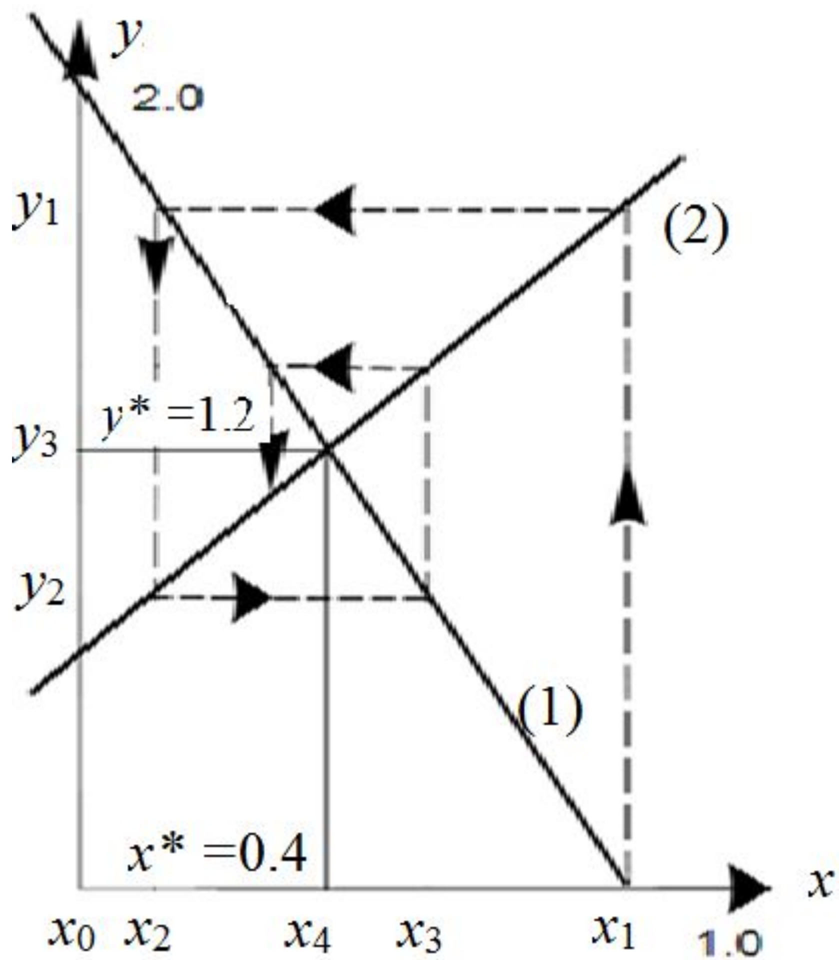
Метод Гаусса-Зейделя слід завершити, якщо стане справедливою нерівність:

$$\left\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^{(k-1)}\right\| \le \frac{\|\mathbf{U}\|}{1-\|\alpha\|} < \varepsilon,$$

де ε – наперед задана точність обчислень.

Аналогічні умови дійсні і для інших матричних норм.

$$\begin{cases} 2x + y = 2, \\ x - 2y = -2, \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad x^{(k)} = \frac{1}{2}(2 - y^{(k-1)}), \quad y^{(k)} = \frac{1}{2}(x^{(k)} + 2).$$

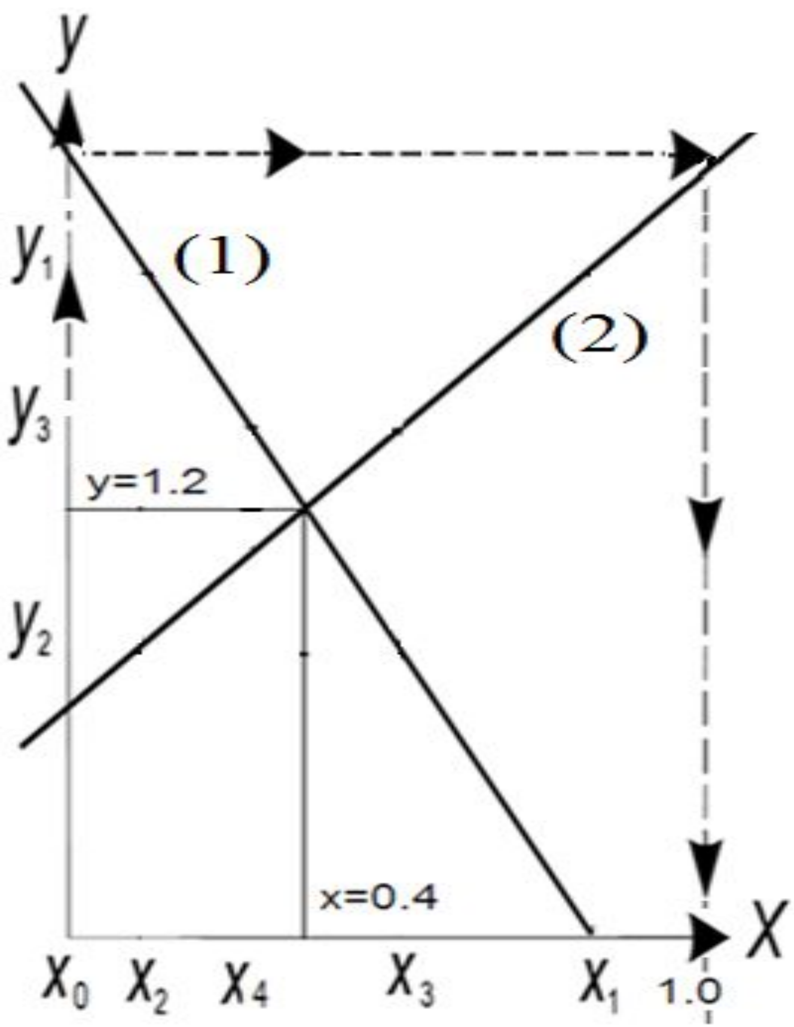


$x^* = 0.4$; $y^* = 1.2$

k	x_k	y_k
0	0	0
1	1	3/2
2	1/4	9/8
3	7/16	39/32

$$\begin{cases} 2x + y = 2, \\ x - 2y = -2, \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad y^{(k)} = (-2x^{(k-1)} + 2), x^{(k)} = (-2 + 2y^{(k)}).$$

x=0,4; y=1,2



k	$\boldsymbol{y_k}$	$\boldsymbol{x_k}$
0	0	0
1	2	2
2	-2	-6
3	14	26
4	-50	-102

КАНОНІЧНА ФОРМА ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ

Канонічною формою однокрокових ітераційних методів розв'язування СЛАР називається їх запис у вигляді:

$$\frac{\mathbf{B}_{k+1}(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)})}{\tau_{k+1}} + \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b}$$

де $\mathbf{B}_{k+1}$ − матриця, яка задає ітераційний метод; τ_{k+1}− ітераційний параметр, що задає швидкість збіжності методу.

Якщо $\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{E}$ метод називається явним (інакше неявним).

Якщо $\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}$ та $\tau_{k+1} = \tau$, метод називається стаціонарним (нестаціонарним в іншому випадку).

Канонічна форма методів Якобі та Зейделя

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b}$$

$$(\mathbf{D} + \mathbf{L})(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b}$$

МЕТОД РЕЛАКСАЦІЇ

- Умови збіжності можна покращити, якщо ввести коефіцієнт демпфірування для врахування нев’язки

$$0 < \omega < 2$$

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right], \quad k = 0,1,2,....$$

Тоді метод простої ітерації перетворюється на *метод верхньої релаксації* (якщо вибрати для прискорення збіжності $1 < \omega < 2$), який застосовується для розв’язання систем лінійних рівнянь великої розмірності , або *метод нижньої релаксації* ($1 < \omega < 2$) .

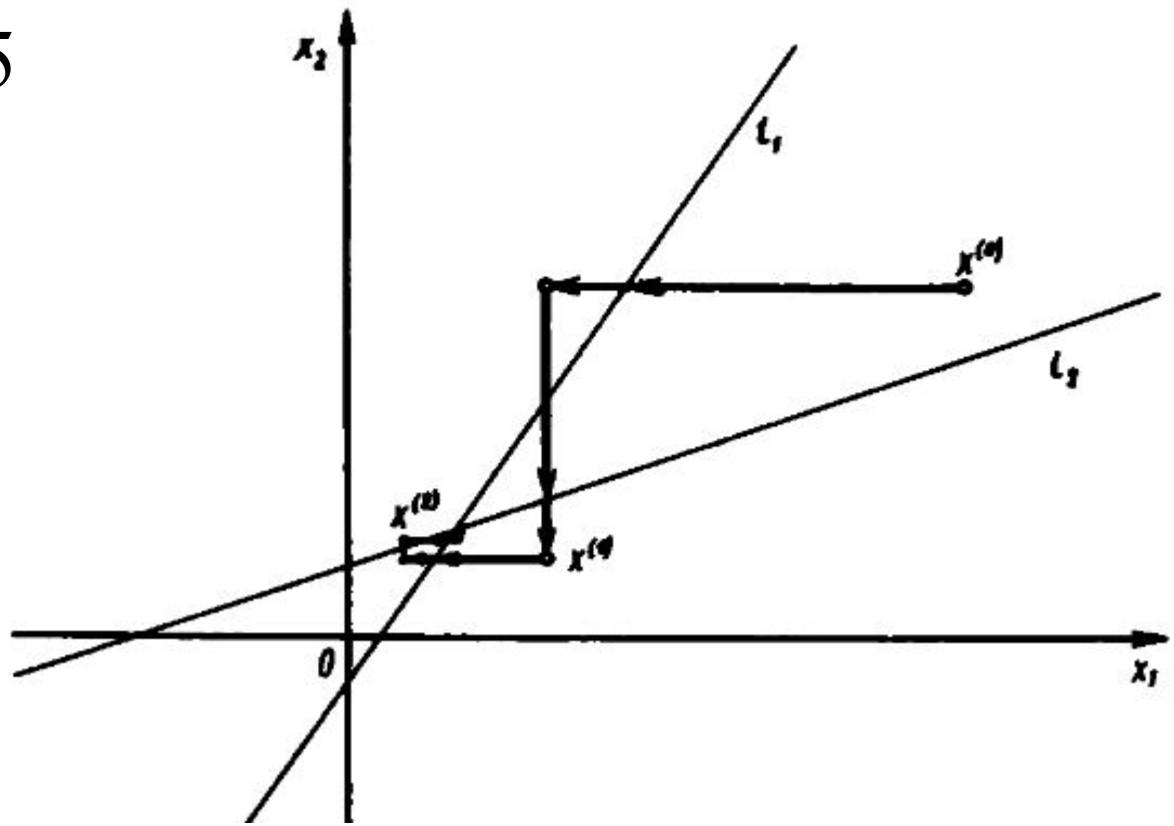
$$(\omega\mathbf{L} + \mathbf{D})\mathbf{x}^{(k+1)} = [(1-\omega)\mathbf{D} - \omega\mathbf{U}]\mathbf{x}^{(k)} \ \omega\mathbf{b}$$

$$\tilde{x}_i^{(k+1)} = b_{i1}x_1^{(k+1)} + b_{i2}x_2^{(k+1)} + \ldots + b_{i,i-1}x_{i-1}^{(k+1)} + b_{i,i+1}x_{i+1}^{(k)} +$$

$$+ \ldots + b_{im}x_m^{(k)} + c_i$$

$$x_i^{(k+1)} = \tilde{x}_i^{(k+1)} + (\omega - 1)(\tilde{x}_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}) = \omega\tilde{x}_i^{(k+1)} + (1 - \omega)x_i^{(k)}.$$

$\omega = 1.25$



$$
\begin{aligned}
6.25x_1 - x_2 + 0.5x_3 &= 7.5,\\
-x_1 + 5x_2 + 2.12x_3 &= -8.68,\\
0.5x_1 + 2.12x_2 + 3.6x_3 &= -0.24.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0.16x_2 - 0.08x_3 + 1.2,\\
x_2 &= 0.2x_1 - 0.424x_3 - 1.736,\\
x_3 &= -0.1389x_1 - 0.5889x_2 - 0.0667.
\end{aligned}
$$

$$
B = \begin{bmatrix} 0 & 0.16 & -0.08 \\ 0.2 & 0 & -0.424 \\ -0.1389 & -0.5889 & 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1.2 \\ -1.736 \\ -0.0667 \end{bmatrix}.
$$

$$
\|B\|_\infty = \max\{0.24,\ 0.624,\ 0.7278\} = 0.7278 < 1.
$$

n	0	1	2	3	4
$x_1^{(n)}$	0.0000	1.2000	0.9276	0.9020	0.8449
$x_2^{(n)}$	0.0000	−1.7360	−1.4677	−1.8850	−1.8392
$x_3^{(n)}$	0.0000	−0.0667	0.7890	0.6688	0.9181

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \qquad\qquad\qquad 0.16x_2^{(k)} - 0.08x_3^{(k)} + 1.2,\\
x_2^{(k+1)} &= 0.2x_1^{(k+1)} \qquad\qquad - 0.424x_3^{(k)} - 1.736,\\
x_3^{(k+1)} &= -0.1389x_1^{(k+1)} - 0.5889x_2^{(k+1)} \qquad\qquad - 0.0667.
\end{aligned}
$$

n	0	1	2	3	4
$x_1^{(n)}$	0.0000	1.2000	0.9088	0.8367	0.8121
$x_2^{(n)}$	0.0000	−1.4960	−1.8288	−1.9435	−1.9813
$x_3^{(n)}$	0.0000	0.6476	0.8841	0.9616	0.9873
$\Vert x^{(n)} - x^{(n-1)}\Vert_\infty$	–	1.4960	0.3328	0.1147	0.0378

Метод релаксації

$$x_1^{(k+1)} = (1-\omega)x_1^{(k)} + \omega\,(0.16x_2^{(k)} - 0.08x_3^{(k)} + 1.2),$$

$$x_2^{(k+1)} = \omega\cdot 0.2x_1^{(k+1)} + (1-\omega)x_2^{(k)} + \omega\,(-0.424x_3^{(k)} - 1.736),$$

$$x_3^{(k+1)} = \omega\,(-0.1389x_1^{(k+1)} - 0.5889x_2^{(k+1)}) + (1-\omega)\,x_3^{(k)} - \omega\cdot 0.6667.$$

n	0	1	2	3	4	5
$x_1^{(n)}$	0.0000	1.3440	0.8186	0.8094	0.7995	0.8001
$x_2^{(n)}$	0.0000	−1.6433	−1.9442	−1.9973	−1.9998	−2.0000
$x_3^{(n)}$	0.0000	0.8001	0.9846	0.9986	1.0001	1.0000

РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

У загальному випадку система нелінійних рівнянь записується у вигляді

$$
\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,\\
&f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,\\
&\quad ... \quad ... \quad ...\\
&f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,
\end{aligned}
$$

де $f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, $i = 1, 2, ..., n$ − функції дійсних змінних $x_1, x_2, ..., x_n$.

Систему можна записати у вигляді

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0,$$

де

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^{\mathrm{T}};$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), ..., f_n(\mathbf{x}))^{\mathrm{T}}.$$

Для методу простої ітерації можна записати:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{\Psi}(\mathbf{x}^{(k)}),$$

де $\quad \mathbf{\Psi}(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x))^{\mathrm{T}}.$

На першій ітерації на основі початкового наближення наступне знаходять за формулами:

$$x_i^{(1)} = \varphi_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}), \quad i = 1, 2, ..., n.$$

У загальному вигляді, якщо знайдене k-е наближення $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}$, то k *+1* знаходять за формулами:

$$x_i^{(k+1)} = \varphi_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}), \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Збіжність забезпечується, якщо:

$$\|\mathbf{J}(\mathbf{x})\| \leq M < 1,$$

де $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{\Psi}'$ – матриця Якобі,

$$\mathbf{\Psi}'(\mathbf{x}) = \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Одним із серйозних недоліків методу простих ітерацій є складність вибору функцій φ_i, які б задовольняли достатню умову збіжності.

Узагальнений метод Ньютона:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})}{\mathbf{W}(\mathbf{x}^{(k)})}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots ,$$

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}) = \mathbf{W}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

$$x_1^{(k)} = x_1^{(k-1)} + \Delta x_1,$$
$$x_2^{(k)} = x_2^{(k-1)} + \Delta x_2,$$
$$x_n^{(k)} = x_n^{(k-1)} + \Delta x_n.$$

$$f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \approx f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\Delta x_n,$$

$$f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \approx f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\Delta x_n,$$

...

$$f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \approx f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\Delta x_n,$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}\Delta x_n = -F_1,\\
&\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial x_n}\Delta x_n = -F_2,\\
&\cdot\ \cdot\\
&\frac{\partial F_n}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial F_n}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}\Delta x_n = -F_n.
\end{aligned}
$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$x = a - \frac{1}{J}\left(f_1 \frac{\partial f_2}{\partial y} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial y} \right),$$

$$y = b + \frac{1}{J}\left(f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x} \right).$$

Щоб уникнути процедури обертання матриці Якобі, метод Ньютона реалізують у вигляді:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{b}(\mathbf{x}^{(k)}),$$

де

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{W}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad \mathbf{b}(\mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{W}(\mathbf{x}^{(k)})\,\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$