МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СЛАР

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

або

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = 1,\ldots,n.$$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь у матричній формі $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$,
де

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СЛАР

Методи чисельного розв'язування СЛАР діляться на дві групи: *прямі* та *ітераційні*.

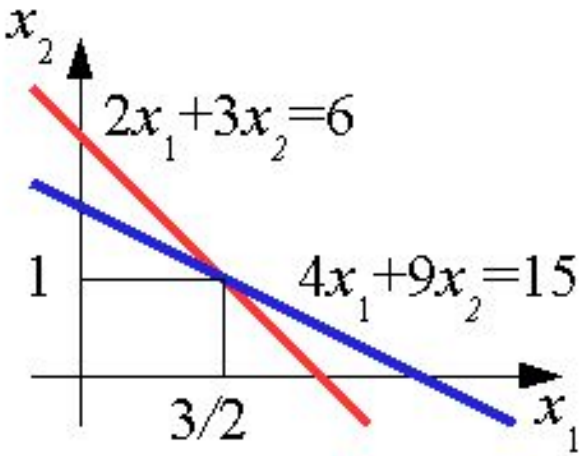
В *прямих* (або точних) методах розв'язок $\mathbf{x}$ системи знаходиться за скінчену кількість арифметичних дій (методи Гаусса, $\mathbf{LU}$-розкладання, прогонки, Халецького и т.д). Якщо матриця неособлива, тобто

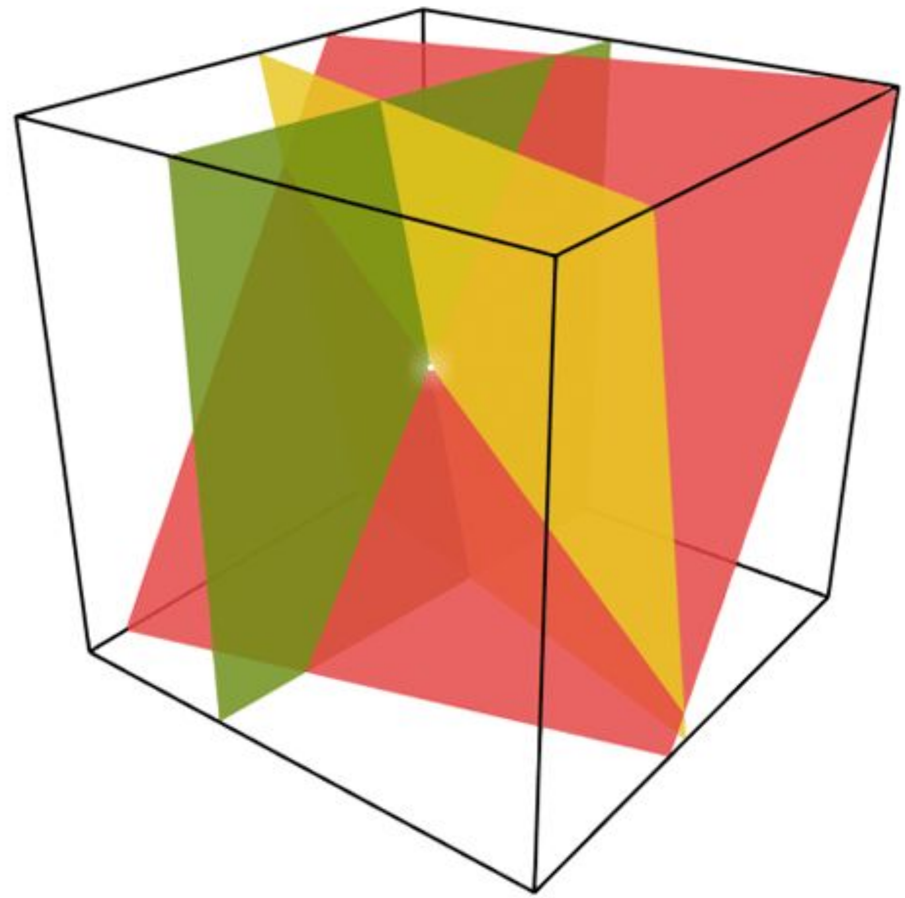
$$det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, де $\mathbf{A}^{-1}$ − обернена матриця.

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A} = \mathbf{E}$$

Ітераційні методи полягають в тому, що розв'язок $\mathbf{x}$ системи знаходиться як границя послідовних наближень $\mathbf{x}^{(k)}$ при $k \to \infty$, де k − номер ітерації (Якобі, Зейделя, варіаційного типу).


x_2
$2x_1+3x_2=6$
1
$4x_1+9x_2=15$
3/2
x_1



ПРЯМІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СЛАР МЕТОД ГАУССА

Прямий хід методу Гаусса полягає в послідовному виключенні невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з системи. Якщо $a_{11} \neq 0$, то поділивши перше рівняння системи на a_{11}, отримаємо:

$$x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = y_1,$$

де

$$c_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \quad j = 2, 3, \ldots, n, \quad y_1 = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

Помножимо це рівняння на a_{i1} і відніматимемо отримане рівняння від i-го рівняння системи. Після виключення x_1 з решти рівнянь отримаємо:

$$x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1j}x_j + \ldots + c_{1n}x_n = y_1,$$

$$a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2j}^{(1)}x_j + \ldots + a_{2n}^{(1)} = b_2^{(1)},$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{nj}^{(1)}x_j + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}.$$

МЕТОД ГАУССА

Коефіцієнти системи обчислюються за формулами:

$$a_{kj}^{(0)} = a_{kj}, \quad k, j = 1, , 2, \ldots, n,$$

$$c_{ki} = \frac{a_{k\ j}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad j = k+1, k+2, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} c_{kj}, \quad i, j = k+1, k+2, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Обчислення правих частин системи здійснюється за формулами:

$$b_k^{(0)} = b_k, \quad y_k = \frac{b_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} y_k, \quad i = k+1, k+2, \ldots, n.$$

МЕТОД ГАУССА

Виключаючи послідовно невідомі із початкової системи отримуємо систему рівнянь $\mathbf{Cx} = \mathbf{y}$:

$$\begin{aligned} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1n}x_n &= y_1, \\ x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n &= y_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \\ x_{n-1} + c_{n-1,n}x_n &= y_{n-1}, \\ x_n &= y_n. \end{aligned}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & c_{12} \ldots \ldots & c_{1n} \\ 0 & 1 \ldots \ldots & c_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ 0 & 0 \ldots\ldots 1 & c_{n-1,n} \\ 0 & 0 \ldots \ldots 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ .. \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Зворотній хід полягає в знаходженні невідомих :

$$x_n = y_n, \quad x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij}x_j,$$

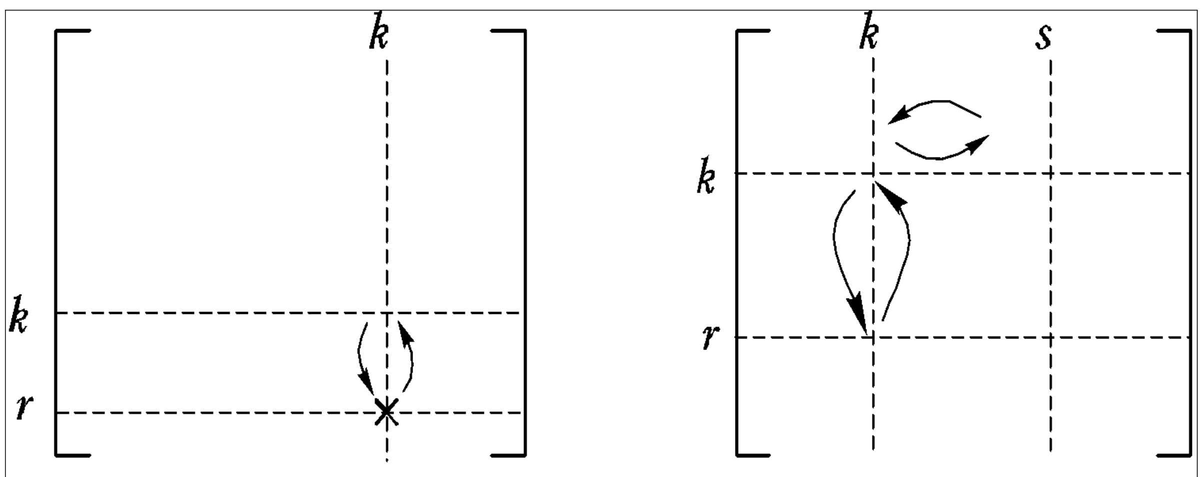
$$i = n-1, n-2, \ldots, 1.$$

МЕТОД ГАУССА

Метод Гаусса має сигнальну функцію виду (поліноміальний):

$$f_A(n) = n^3/3 + n^2 = O(n^3).$$

Елемент $a_{kk}^{(k-1)}$, називається ведучим елементом на k-му кроці виключення. Основним обмеженням методу є припущення, що всі елементи $a_{kk}^{(k-1)}$ відмінні від нуля. Щоб зменшити похибку ведучим необхідно вибирати найбільшим за модулем елемент.



а б

Матрицею перестановок $\mathbf{P}$ називається квадратна матриця, у якої в кожному рядку і в кожному стовпці наявний лише один відмінний від нуля і рівний одиниці елемент.

Елементарною матрицею перестановок $\mathbf{P}_{ki}$ називається матриця, отримана з одиничної матриці перестановкою k-го і i-го рядків. Наприклад, елементарними матрицями перестановок третього порядку є матриці:

$$\mathbf{P}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Добуток двох (а отже, і будь-якої кількості) елементарних матриць перестановок є матрицею перестановок (не обов'язково елементарною).
2. Матрицю $\mathbf{P}_{ki}\mathbf{A}$ отримують із матриці $\mathbf{A}$ перестановкою k-го і i-го рядків.
3. Матрицю $\mathbf{AP}_{ki}$ отримують із матриці $\mathbf{A}$ перестановкою k-го і i-го стовпців.

Метод Гаусса з вибором головного елемента по стовпцю еквівалентний звичайному методу Гаусса, який застосовують до системи

$$\mathbf{PAx} = \mathbf{Pb}$$

З системи $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ маємо $\mathbf{Cx} = \mathbf{y}$

Можна показати $\mathbf{b}$ та $\mathbf{y}$ пов'язані між собою як $\mathbf{Dy} = \mathbf{b}$, де матриця $\mathbf{D}$ має вигляд:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22}^{(1)} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(2)} & 0 \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(2)} & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

З $\mathbf{y} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$

Маємо $\mathbf{Cx} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{DCx} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{DC}$

Метод Гаусса відповідає розкладанню матриці $\mathbf{A}$ на добуток двох трикутних матриць:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} \qquad (\mathbf{L} = \mathbf{D},\ \mathbf{U} = \mathbf{C})$$

тобто

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & & \dots & u_{1,n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \dots & u_{2,n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & u_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

Якщо $\det \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, то існує матриця перестановок $\mathbf{P}$ така, що справедливе розкладання

$$\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$$

LU-розкладання матриці A

$$l_{i1} = a_{i1}, i = \overline{1,n}, \qquad u_{1j} = a_{1j} / a_{11}, j = \overline{1,n},$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} u_{kj}, \quad i, j = \overline{1,n}$$

Для матриці L

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} u_{kj}, \quad i \geq j,$$

$$a_{ij} = l_{ij} u_{jj} + \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}, \text{ звідки } \quad l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}.$$

Для матриці U

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik} u_{kj}, \quad i < j,$$

$$a_{ij} = l_{ii} u_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}, \text{ звідки } \quad u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}}{l_{ii}}.$$

Приклад

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 12 & 17 \\ 3 & 10 & 22 & 34 \\ 4 & 13 & 28 & 50 \end{pmatrix};$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}; U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A_{LU} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix};$$

Схема Холецького

Метод Холецького використовується для розв’язування СЛАР з симетричними матрицями ($a_{ij} = a_{ji}, i, j = 1, n$*).*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & \dots & u_{1,n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2,n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{n,n} \end{bmatrix}$$

Самостійно: розглянути метод Холецького.

Обчислення det($\mathbf{A}$) та розв’язування СЛАР

I. Обчислення det($\mathbf{A}$) на основі $\mathbf{LU}$-розкладу матриці

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{LU}) = \det(\mathbf{L})\,\det(\mathbf{U}) = l_{11} l_{22} \ldots l_{n,n}.$$

II. Розв’язування СЛАР на основі $\mathbf{LU}$-розкладу матриці

1. Розкладання матриці $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$
2. Розв’язування системи $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$
3. Розв’язування системи $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$

Обернена матриця − це матриця, для якої

$$\mathbf{AA^{-1} = E}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & . & z_{1,n-1} & z_{1,n} \\ z_{21} & z_{22} & . & z_{2,n-1} & z_{2,n} \\ z_{31} & z_{32} & . & z_{3,n-1} & z_{3,n} \\ . & . & . & \vdots & \\ z_{n1} & z_{n2} & . & z_{n,n-1} & z_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ . & . & . & 1 & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Для обчислення оберненої матриці необхідно розв’язати n систем лінійних алгебраїчних рівнянь виду:

$$\mathbf{A\,Z^{(j)} = \delta^{(j)}},\ j=1,n$$

де

$\mathbf{Z}^{(j)} - j$-й стовпчик оберненої матриці,

$\boldsymbol{\delta}^{(j)} - j$-й стовпчик одиничної матриці.

Обчислення A^{-1}

Знаючи розклад $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$, обернену матрицю легко обчислити як

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}.$$

$$l_{ij}^{(\mathrm{L}^{-1})} = \frac{\delta_{ij} - \sum_{k=j}^{i-1} l_{ik} k_{kj}}{l_{ii}}, \quad i = j, \ldots, n,$$

$$u_{ij}^{(\mathrm{U}^{-1})} = \frac{\delta_{ij} - \sum_{k=i+1}^{j} u_{ik} k_{kj}}{u_{ii}}, \quad i = j, \ldots, 1.$$

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ПЕРЕВИЗНАЧЕНИХ СИСТЕМ РІВНЯНЬ

Припустимо, що система

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

має матрицю $\mathbf{A}$ розмірністю $m\times n\ (m > n)$.

Така система має безліч розв’язків, але можна вибрати серед них таке, що мінімізує нев’язку розв’язку $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}$.

Початкова перевизначена система зводиться до так званої нормальної форми

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{Cx} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$$

Звідки

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$$

Матриця $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ розмірністю $(n \times n)$ неособлива, якщо стовпці матриці $\mathbf{A}$ незалежні.

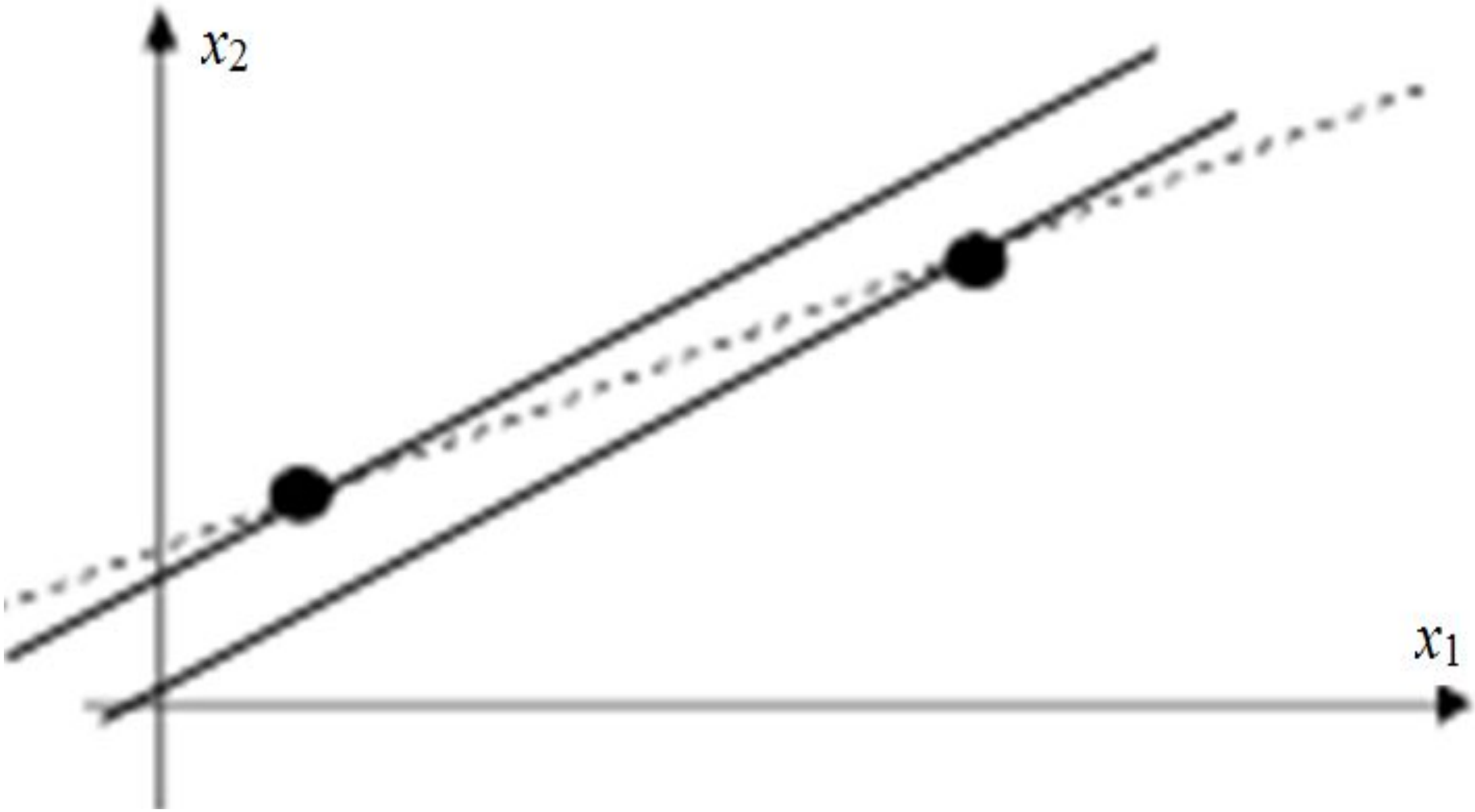
ТОЧНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ СЛАР

- $6{,}1\,x_1 + 3{,}4\,x_2 = 6{,}1$
  $14{,}7\,x_1 + 8{,}2\,x_2 = 14{,}7$
  $x_1 = 1;\ x_2 = 0.$

- $6{,}1\,x_1 + 3{,}4\,x_2 = 6{,}1\mathit{01}$
  $14{,}7\,x_1 + 8{,}2\,x_2 = 14{,}7$
  $x_1 = 1{,}205;\ x_2 = -0{,}3675.$

- $6{,}1\mathit{01}\,x_1 + 3{,}4\,x_2 = 6{,}1$
  $14{,}7\,x_1 + 8{,}2\,x_2 = 14{,}7$
  $x_1 = 0{,}829875;\ x_2 = 0{,}304979.$

Графічна ілюстрація для систем рівнянь з погано обумовленою матрицею



Норми векторів

- Норма l_p

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p} = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$$

- Евклидова норма

$$\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2)^{1/2}$$

- Норма l_1

$$\|x\|_1 = (|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|)$$

- Норма l_∞

$$\|x\|_\infty = \max_i \{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$$

Норми матриць

- Норма l_p

$$\|\mathbf{A}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^p}$$

- Евклидова норма

$$\|\mathbf{A}\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

- Норма l_1

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right), j = 1, n$$

- Норма l_∞

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right), i = 1, n$$

ВЛАСТИВОСТІ НОРМ

векторів:

$\|\mathbf{x}\| \geq 0$

$\|\mathbf{x}\| = 0$ лише для $\mathbf{x} = 0$

$\| c\, \mathbf{x}\| = |c|\, \|\mathbf{x}\|$ для всіх комплексних чисел c

$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

матриць:

$\|\mathbf{A}\| \geq 0$

$\|\mathbf{A}\| = 0$ лише для $\mathbf{A}=0$

$\| c\, \mathbf{A}\| = | c |\, \|\mathbf{A}\|$ для всіх комплексних чисел c

$\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$

$\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\|\, \|\mathbf{B}\|$

ЧИСЛО ОБУМОВЛЕНОСТІ

Нехай $\mathbf{x}^*$ − точний розв'язок,

$\mathbf{x}_н$ − обчислене (наближене) значення розв'язку,

$\delta\mathbf{x} = (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_н)$ − похибка розв'язку.

$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\,\mathbf{x}_н$ − нев'язка розв'язку системи $\mathbf{A}\,\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$.

Розглянемо випадок, коли

$\mathbf{A}(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$,

звідки

$\delta\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{b}$.

Користуючись нормами , запишемо:

$||\delta\mathbf{x}|| \le ||\mathbf{A}^{-1}||\ ||\delta\mathbf{b}||$,

$||\mathbf{b}|| \le ||\mathbf{A}||\ ||\mathbf{x}^*||$

$||\delta\mathbf{x}||\ ||\mathbf{b}|| \le ||\mathbf{A}^{-1}||\ ||\delta\mathbf{b}||\ ||\mathbf{A}||\ ||\mathbf{x}^*||$.

$$\frac{||\delta\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}^*||} \le ||\mathbf{A}||\ ||\mathbf{A}^{-1}||\ \frac{||\delta\mathbf{b}||}{||\mathbf{b}||}$$

ЧИСЛО ОБУМОВЛЕНОСТІ

Припустимо, що $(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

Маємо

$$\mathbf{A}\,\delta\mathbf{x} + \delta\mathbf{A}(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}) = 0$$

$$-\,\delta\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}), \qquad \|\delta\mathbf{x}\| \le \|\mathbf{A}^{-1}\|\,\|\delta\mathbf{A}\|\,\|(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x})\|.$$

Звідки

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}\|} \le \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{A}^{-1}\|\,\frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

Число обумовленості cond $(\mathrm{A}) = \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{A}^{-1}\|$

ОЦІНКА ПОХИБОК

Похибка обчислення оберненої матриці

$$\frac{\|\mathbf{A}^{-1} - (\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})^{-1}\|}{\|\mathbf{A}^{-1}\|} \leq \frac{\text{cond}\,(\mathbf{A})}{1 - \text{cond}\,(\mathbf{A})\,(\|\delta\mathbf{A}\| / \|\mathbf{A}\|)} \frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

якщо $\|\delta\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{A}^{-1}\| < 1.$

Похибка розв’язку системи

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\,\mathbf{x}^*\,\|} \leq \frac{\text{cond}\,(\mathbf{A})}{1 - \text{cond}\,(\mathbf{A})\,(\|\delta\mathbf{A}\| / \|\mathbf{A}\|)} \left(\frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} + \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\delta\mathbf{b}\|}\right)$$

якщо $\|\delta\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{A}^{-1}\| < 1.$

ТОЧНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ СЛАР

- $6{,}1\,x_1 + 3{,}4\,x_2 = 6{,}1$
  $14{,}7\,x_1 + 8{,}2\,x_2 = 14{,}7$
  $x_1 = 1;\ x_2 = 0.$

- $6{,}1\,x_1 + 3{,}4\,x_2 = 6{,}1\mathit{01}$
  $14{,}7\,x_1 + 8{,}2\,x_2 = 14{,}7$
  $x_1 = 1{,}205;\ x_2 = -0{,}3675.$

- $6{,}1\mathit{01}\,x_1 + 3{,}4\,x_2 = 6{,}1$
  $14{,}7\,x_1 + 8{,}2\,x_2 = 14{,}7$
  $x_1 = 0{,}829875;\ x_2 = 0{,}304979.$

- $\mathrm{cond}(\mathbf{A}) = 1.1908 \cdot 10^4 \quad |\mathbf{A}| = 0.04$