Л. А. Янкина, к.п.н., доцент

Числовые функции

Понятие функции

Функцией называется такая зависимость переменной **у** от переменной **х**, при которой каждому значению **х** соответствует ***единственное*** значение **у**.

x - **независимая переменная** или **аргумент**,

y – **зависимая переменная** или **функция от x**.

Значение **y**, соответствующее данному значению **x**, называют **значением функции**.

Область определения функции - множество значений, которые может принимать независимая переменная.

Область значений функции (или **множество значений функции**) - множество значений, которые принимает функция ***y(x)*** (при **x**, принадлежащих области определения).

Способы задания функции

Аналитическое задание функции. Функции задают с помощью формул, указывающих, как по данному значению аргумента найти соответствующее значение функции: $y = f(x)$

где ***f(x)*** – некоторое выражение с переменной **x**.

<u>Примеры</u>: 1) $y = x^2 + 5x - 1$,   2) $y = \sqrt{x - 9}$

$$3)\, y = \begin{cases} x^2 + 3, & если\ x \le 5, \\ 4x - 1, & если\ x > 5. \end{cases}$$

Табличный способ задания функции

$\boldsymbol{x}$	x_1	x_2	…	x_n	…
$\boldsymbol{y}$	y_1	y_2	…	y_n	…

или

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$
x_1	y_1
x_2	y_2
…	…

Можно табулировать одновременно несколько функций

x	x^2	x^3	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{x}$	…
1					
2					
3					
…					

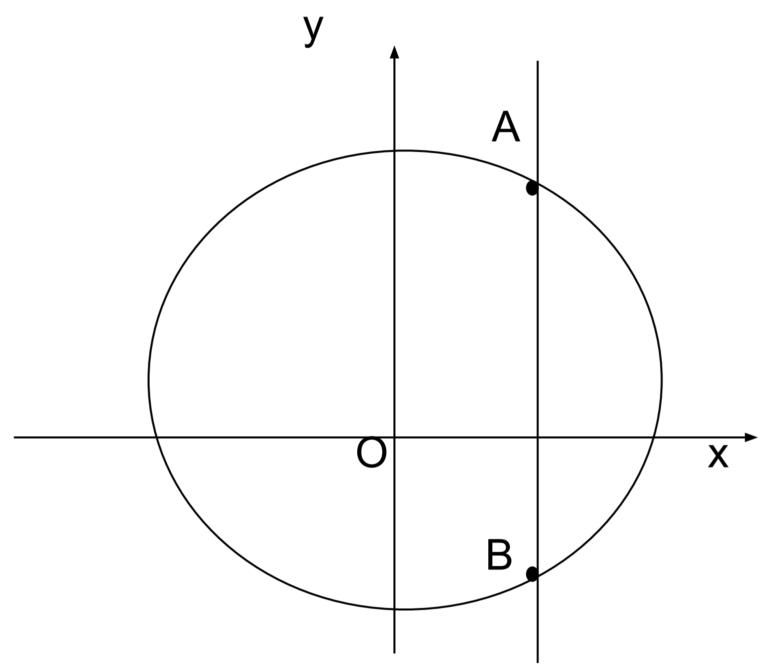
Графический способ задания функции

Графиком функции $y = \mathrm{f}(x)$ называется множество всех точек плоскости, которые имеют координаты ***(x; f(x))***

Обычно график функции изображается в виде некоторой ***линии*** на координатной плоскости.

Однако <u>не всякая</u> линия может служить графиком функции

на каждой прямой, параллельной оси Oy, может лежать ***не более одной*** точки графика функции.



Свойства функции

Четность

Функция $y = f(x)$ называется ***четной***, если для любого **x** из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = f(x)$

Функция $y = f(x)$ называется ***нечетной***, если для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$

<u>Примеры</u>: $y = x^2$, $y = 3 - x^2$, $y = x^4$, $y = x^4 - 4x^2 + 1$,

$y = \sqrt{9 - x^2}$ – четные функции;

$y = 3x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = x^3$, $y = 2x^3 - 5x$ – нечетные функции.

Доказательство

1) $y = x^4 - 4x^2 + 1$

$y\ (-x) = (-x)^4 - 4(-x)^2 + 1 = x^4 - 4x^2 + 1 = y(x) \Rightarrow$
$y = x^4 - 4x^2 + 1$ – четная функция

2) $y = 2x^3 - 5x$

$y(-x) = 2(-x)^3 - 5(-x) = -2x^3 + 5x = -\ y(x) \Rightarrow$
$y = 2x^3 - 5x$ - нечетная функция

График четной функции симметричен относительно оси ординат (Oy).

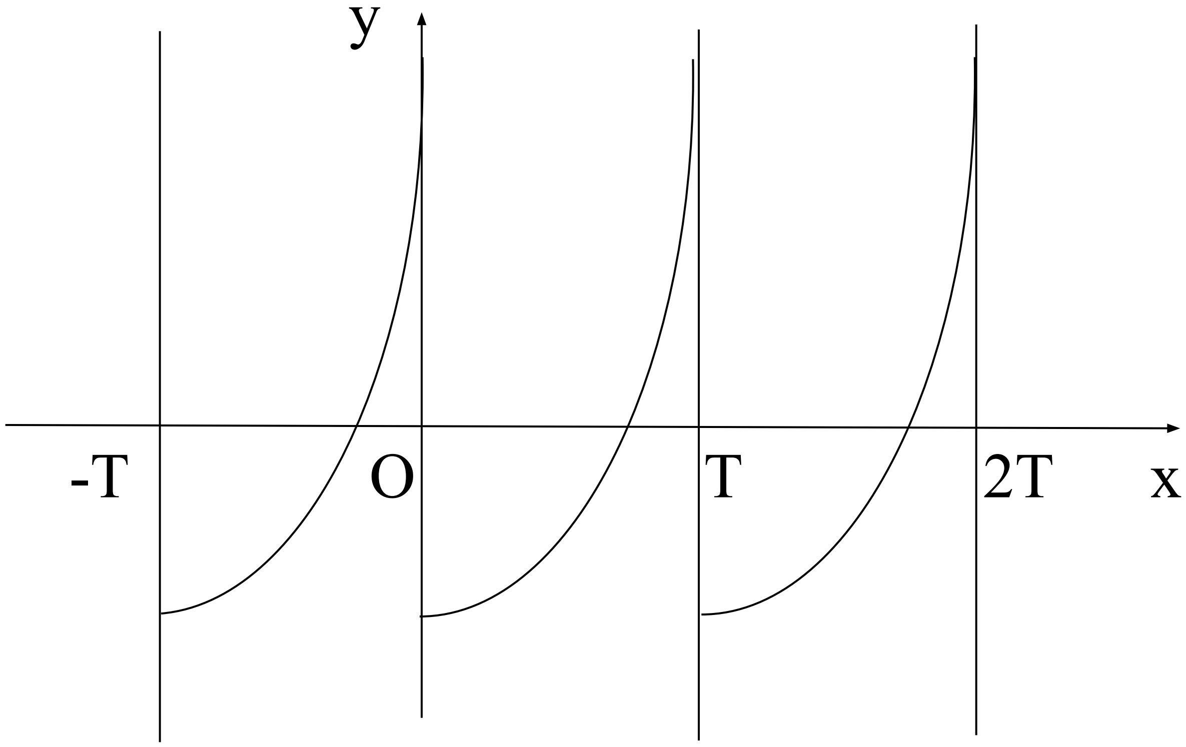
График нечетной функции симметричен относительно начала координат (точки O).

Периодичность

Функция $y = f(x)$ называется ***периодической***, если существует такое отличное от нуля число T, что для любого **x** из области определения функции справедливо равенство $f(x + T) = f(x) = f(x - T)$

Число T называется ***периодом*** функции $y = f(x)$.

Если T – период функции, то и число вида kT, где $k \in Z$, также является периодом функции.



y
-T
O
T
2T
x

Монотонность

Функция y = f(x) называется ***возрастающей на промежутке X***, если для любых x_1 и x_2 из X выполняется условие:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

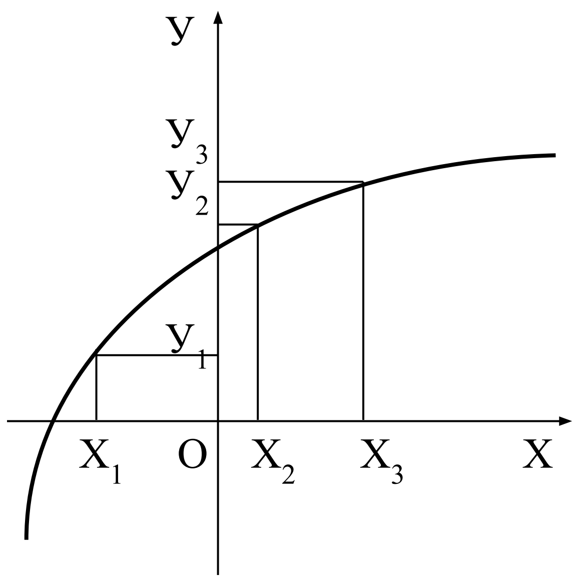
то есть меньшему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

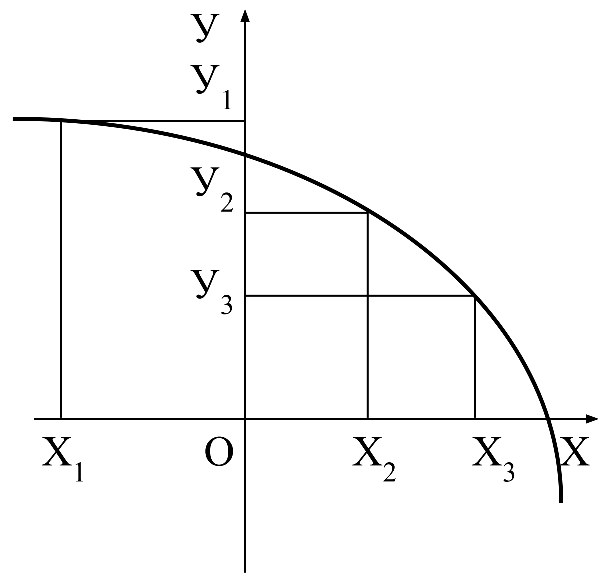
Функция $y = f(x)$ называется ***убывающей на промежутке X***, если для любых x_1 и x_2 из X выполняется условие:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2),$$

то есть меньшему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Функция возрастает   Функция убывает



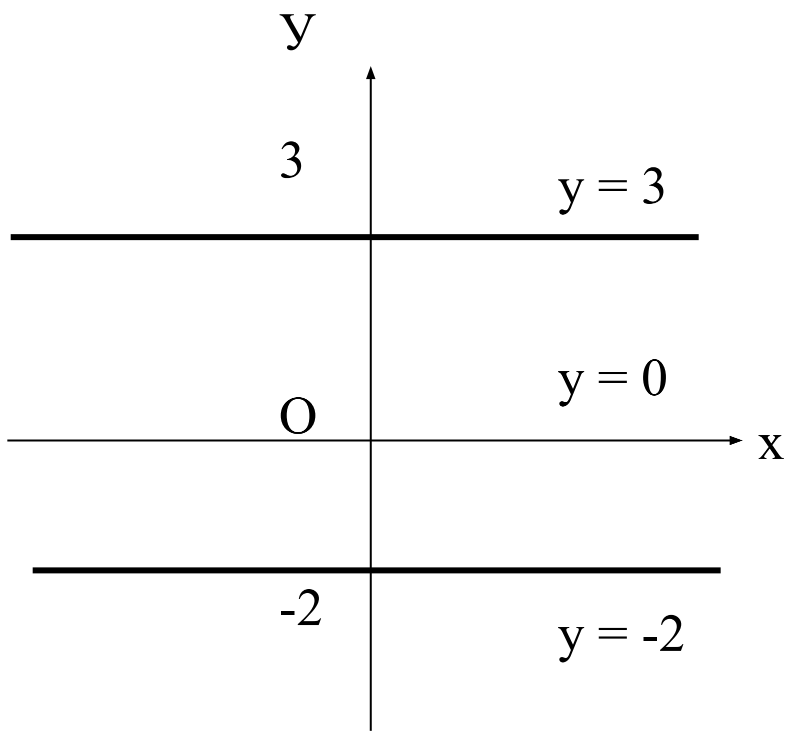


Функция $y = f(x)$ называется **монотонной на промежутке X**, если она на этом промежутке или возрастает, или убывает.

Постоянная функция

Постоянной называется функция, заданная формулой $y = b$, где $b \in R$.

Графиком является ***прямая***, параллельная оси абсцисс и проходящая через точку *(O; b)* на оси ординат.



Прямая пропорциональность

Прямой пропорциональностью называют функцию, заданную формулой

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{k}\mathbf{x},$$

где $k \neq 0$.

k **- коэффициент прямой пропорциональности**

Свойства функции у = kx

1) *Область определения*: X = **R**

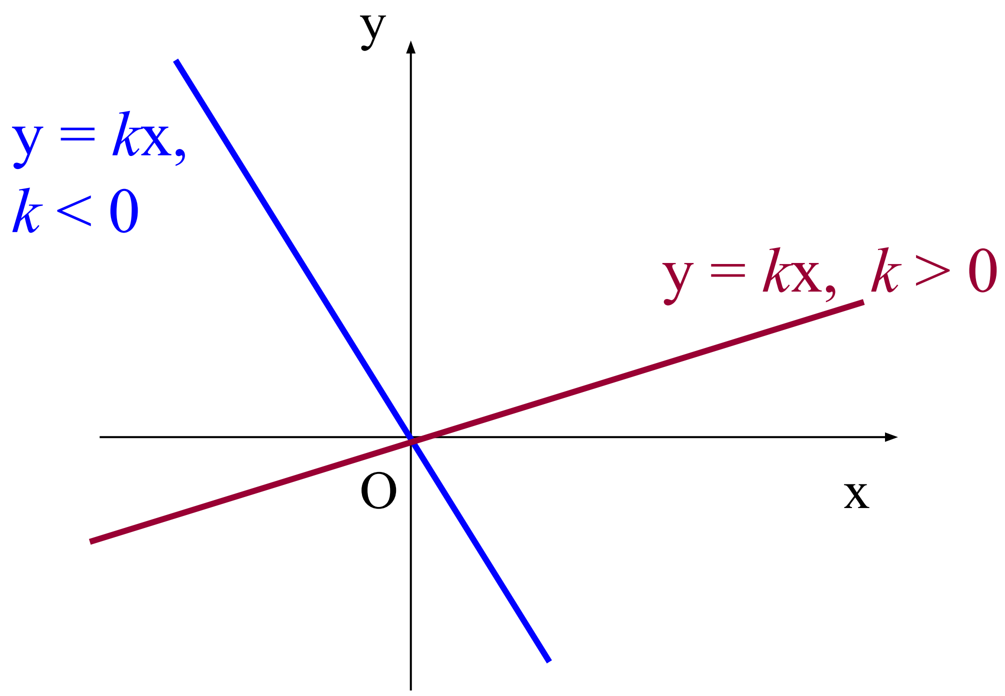
Множество значений: У = **R**

2) функция у = *k*х - *нечетная* $\Rightarrow$ график симметричен относительно начала координат

3) ***k* > 0** $\Rightarrow$ функция у = *k*х ***возрастает***

k* < 0** $\Rightarrow$ функция у = *k*х ***убывает

4) *Графиком* функции $y = k$x является ***прямая***, проходящая через начало координат:



5) $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{кx_1}{кx_2} = \frac{x_1}{x_2}$$

то есть $\boxed{\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}}$

Основное свойство прямой пропорциональности: с *увеличением* (*уменьшением*) значения переменной **x** в несколько раз соответствующее значение переменной **y** *увеличивается* (*уменьшается*) во столько же раз.

Задача. Из куска ткани длиной 24 м сшили 8 одинаковых костюмов. Сколько потребуется ткани на 16 таких же костюмов?

Величины:

Число сшитых костюмов

Количество ткани на один костюм

Количество ткани, израсходованной на костюмы

Решение

1 способ

1) $24 : 8 = 3$ (м) – ткани требуется на 1 костюм;

2) $3 \cdot 16 = 48$ (м) – ткани требуется на 16 костюмов.

$$\boxed{y = kx}$$

$$\boxed{\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}}$$

2 способ

1) $16 : 8 = 2$ (раза) - количество костюмов больше;

2) $24 \cdot 2 = 48$ (м) – ткани требуется на 16 костюмов.

Задача. Из куска ткани длиной 24 м сшили 8 одинаковых костюмов. Сколько потребуется ткани на 16 таких же костюмов?

Ответ: 48 м.

Линейная функция

Линейной функцией называется функция, которую можно задать при помощи формулы вида

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{k}\mathbf{x} + \boldsymbol{b},$$

где x – независимая переменная, $k, b \in \mathbf{R}$.

Если $k = 0$, то $y = b$ - *постоянная функция*

Если $b = 0$, то $y = kx$ - *прямая пропорциональность*

Свойства линейной функции $y = kx + b$ ($k \neq 0$, $b \neq 0$)

1) *Область определения*: $X = \mathbf{R}$

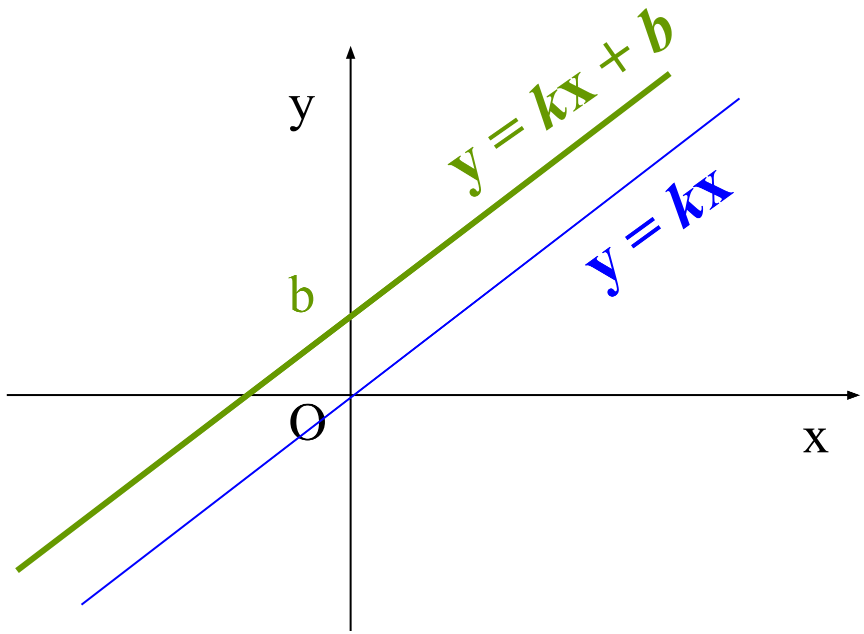
Множество значений: $У = \mathbf{R}$

2) функция $y = kx + b$ *не является ни четной, ни нечетной*

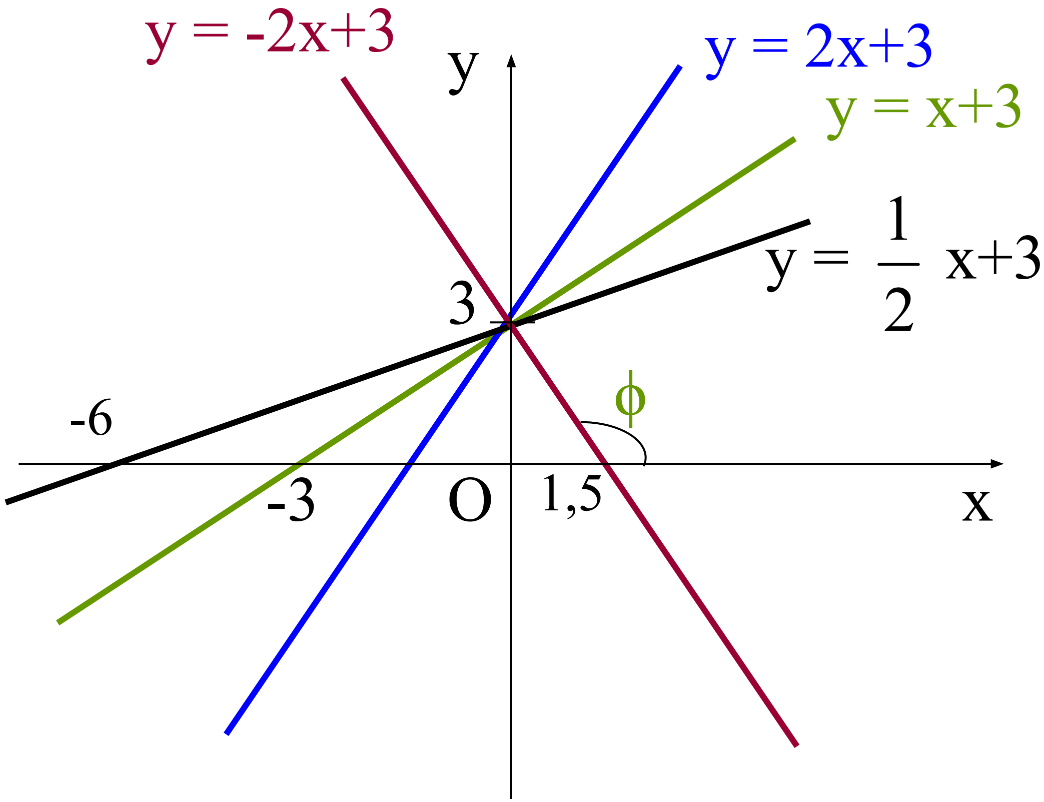
3) $k > 0$ функция *возрастает*

$k < 0$ функция *убывает*

4) *Графиком* функции у = *k*х + *b* является ***прямая***, параллельная прямой, служащей графиком функции у = *k*х, и проходящая через точку (0; b) на оси ординат:



Пример 1. $y = \frac{1}{2}x + 3, \quad y = x + 3, \; y = 2x + 3, \; y = -2x + 3$



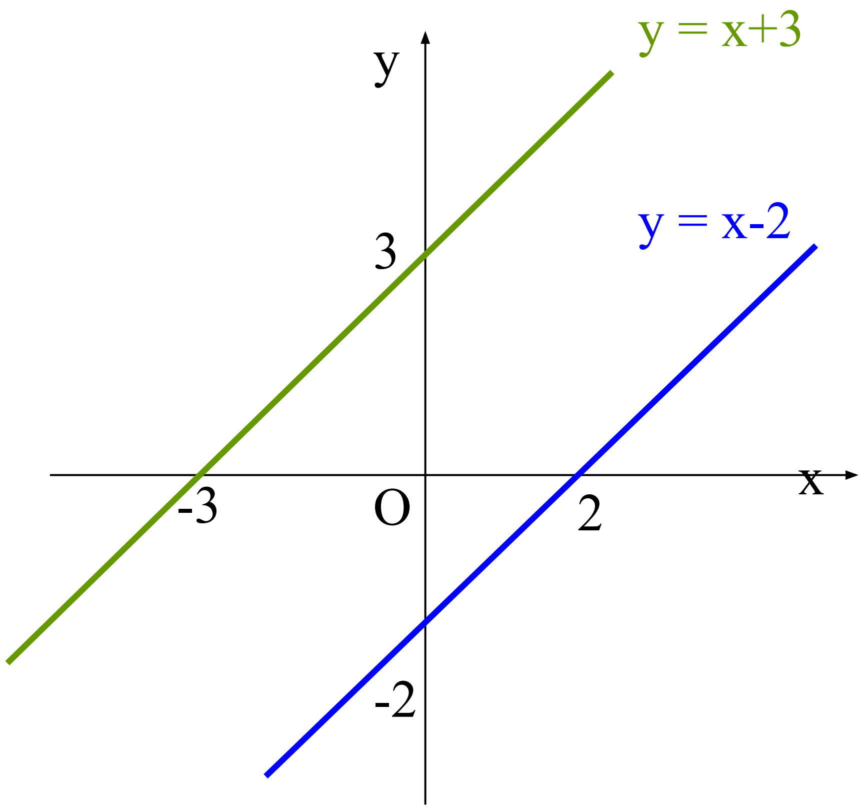
ϕ - угол между прямой $y = kx + b$ и положительным направлением оси Ох.

k > 0 $\Rightarrow$ ϕ - *острый*

k - угловой коэффициент

k < 0 $\Rightarrow$ ϕ - *тупой*

Пример 2. $y = x + 3, \; y = x - 2$



Взаимное расположение графиков линейных функций

$y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$

пересекаются

$k_1 \neq k_2$

не пересекаются

параллельны

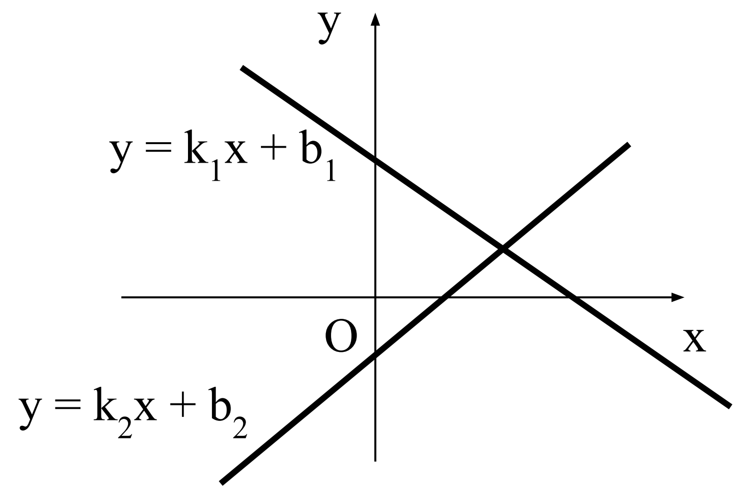
$k_1 = k_2$

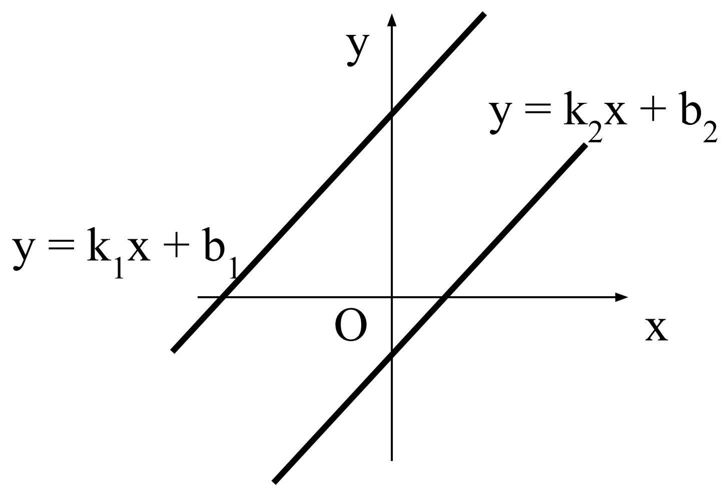
$b_1 \neq b_2$

совпадают

$k_1 = k_2$

$b_1 = b_2$





Обратная пропорциональность

Обратной пропорциональностью называют функцию, заданную формулой

$$\mathbf{y} = \frac{k}{x},$$

где $k \neq 0$.

k **- коэффициент обратной пропорциональности**

Свойства функции $y = \dfrac{k}{x}$

1) *Область определения:* $X = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

Множество значений: $У = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

$X = У =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

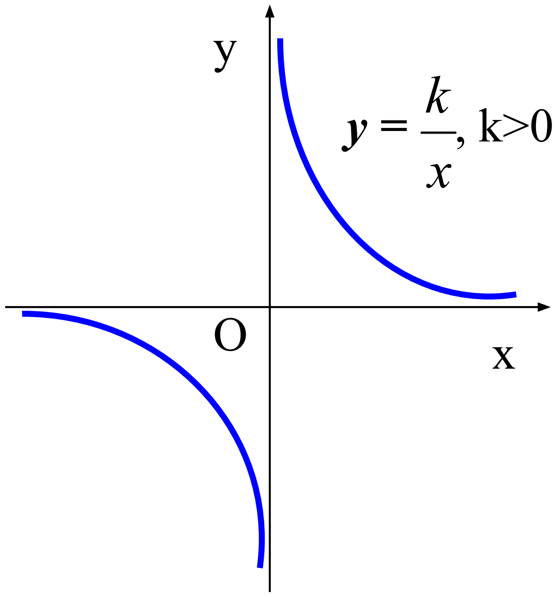
2) Функция *нечетная*

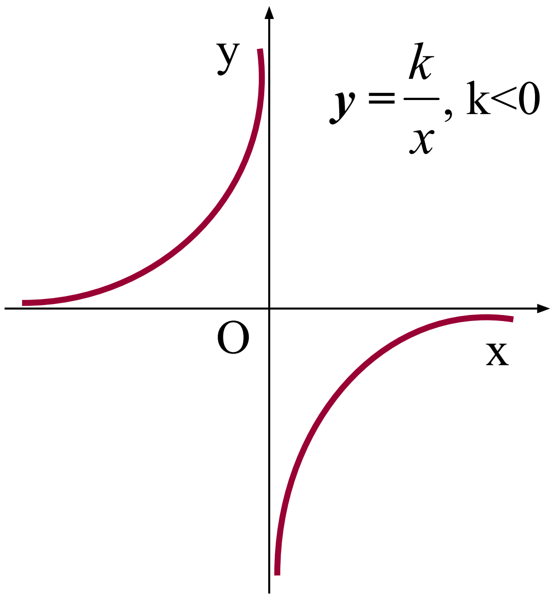
график симметричен относительно начала координат

3) $k > 0 \Rightarrow$ функция ***убывает***

$k < 0 \Rightarrow$ функция ***возрастает***

4) *Графиком* является ***гипербола***





5) $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{к}{x_2} : \frac{к}{x_1} = \frac{к}{x_2} \cdot \frac{x_1}{к} = \frac{x_1}{x_2}$$

то есть $\boxed{\frac{y_2}{y_1} = \frac{x_1}{x_2}}$

Основное свойство обратной пропорциональности: с *увеличением* (*уменьшением*) значения переменной **х** в несколько раз соответствующее значение переменной **у** *уменьшается* (*увеличивается*) во столько же раз.

Задача. С участка собрали 4 мешка картофеля по 40 кг в каждом. Этот картофель разложили для хранения в ящики по 20 кг в каждом. Сколько ящиков потребовалось?

Величины:

Масса всего картофеля

Масса картофеля в некоторой емкости

Количество емкостей

Решение

1 способ

1) 40 · 4 = 160 (кг) – масса собранного картофеля;

2) 160 : 20 = 8 (ящ.) – потребовалось.

$$y = \frac{k}{x}$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{x_1}{x_2}$$

2 способ

1) 40 : 20 = 2 (раза) – масса ящика меньше массы мешка;

2) 4 · 2 = 8 (ящ.) – потребовалось.

Ответ: 8 ящиков.

Задача. С участка собрали 4 мешка картофеля по 40 кг в каждом. Этот картофель разложили для хранения в ящики по 20 кг в каждом. Сколько ящиков потребовалось?