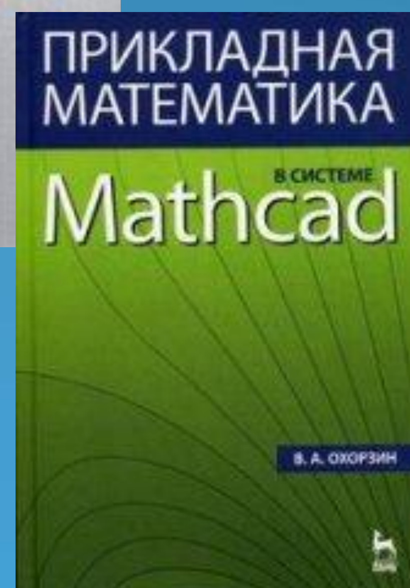
МТИ

МОСКОВСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Компьютерное моделирование



Бужинский В.А., ктн доцент
bva2516@mail.ru

Москва
2014

Как известно, величины могут быть двух типов — дискретные, т. е. принимающие «оторванные» друг от друга значения, допускающие естественную нумерацию, и непрерывные, принимающие все значения из некоторого интервала. Возможен также смешанный случай, например, когда величина на каком-то интервале своих значений ведет себя, как дискретная, а на другом — как непрерывная. (Эти определения не являются исчерпывающими, но для нас они достаточны.)

Тема № 1. Основные понятия компьютерного моделирования.
Тема № 2. Построение моделирующих алгоритмов: формализация и алгоритмизация процессов.
Тема № 3. Универсальность математических моделей.
Тема № 4. Математические модели сложных систем.
Тема № 5. Непрерывно-детерминированные, дискретно-детерминированные, дискретно-вероятностные и непрерывно-вероятностные модели.
Тема № 6. Агрегативные модели (А – модели).
Тема № 7. Имитационное моделирование сложных систем.
Тема № 8. Методы имитации на ЭВМ случайных элементов.
Тема № 9. Статистический анализ результатов моделирования.
Тема № 10. Моделирование многомерных дискретных динамических стохастических систем с резервированием.

Вебинар № 5

Непрерывно-детерминированные, дискретно-детерминированные, дискретно-вероятностные и непрерывно-вероятностные модели.

1. Непрерывные модели.
2. Дискретные модели.
3. Стохастические модели

Модели — как содержательные, так и математические — могут быть либо дискретными, либо непрерывными, либо смешанными. Между этими типами нет принципиального барьера и при уточнении или видоизменении модели дискретная картина может стать непрерывной и обратно; то же может произойти в процессе решения математической задачи.

Таким образом, во многих задачах при составлении математической модели, а также при выборе метода ее исследования надо учитывать возможность применения как «дискретного», так и «непрерывного» аппаратов (например, для дискретных моделей характерно применение сумм, а для непрерывных — производных и интегралов) независимо от характера исходной картины.

Будем предполагать, что возможно, хотя бы в принципе, установить и на некотором языке описания (например, средствами математики) охарактеризовать зависимость каждой из выходных переменных от входных. Связь между входными и выходными переменными моделируемого объекта в принципе может характеризоваться графически, аналитически, т.е. посредством некоторой формулы общего вида, или алгоритмически. Независимо от формы представления конструкта, описывающего эту связь, будем именовать его оператором вход-выход и обозначать через B.

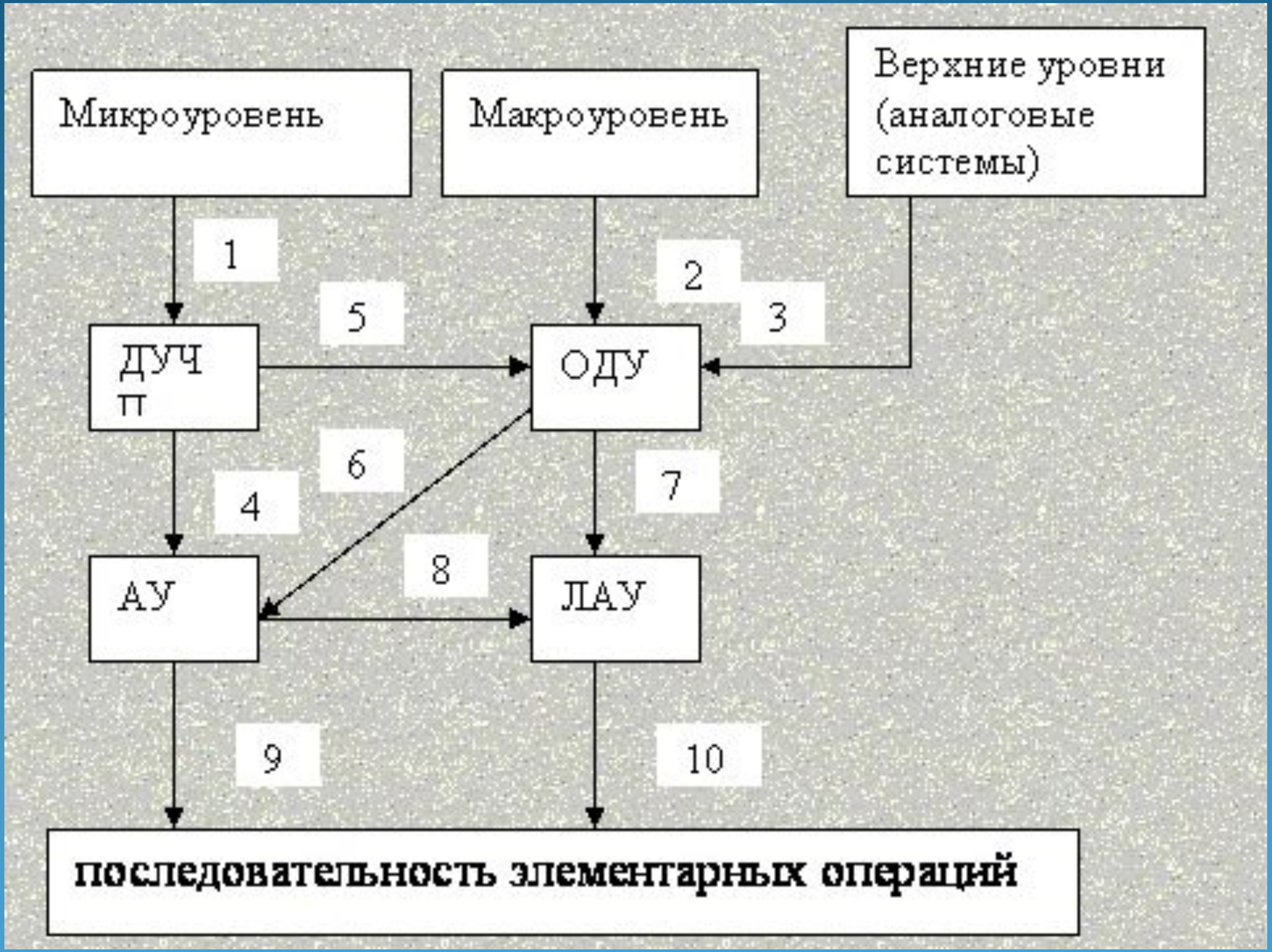
Пусть M=M(X,Y,Z), где X – множество входов, Y – выходов, Z – состояний системы. Схематически можно это изобразить: X Z Y.
Рассмотрим теперь наиболее существенные с точки зрения моделирования внутренние свойства объектов разного класса. При этом придется использовать понятие структура и параметры моделируемого объекта. Под структурой понимается совокупность учитываемых в модели компонентов и связей, содержащихся внутри объекта, а после формализации описания объекта – вид математического выражения, которое связывает его входные и выходные переменные (например: y=au+bv). Параметры представляют собой количественные характеристики внутренних свойств объекта, которые отражаются принятой структурой, а в формализованной математической модели они суть коэффициенты (постоянные переменные), входящие в выражения, которыми описывается структура (a и b).

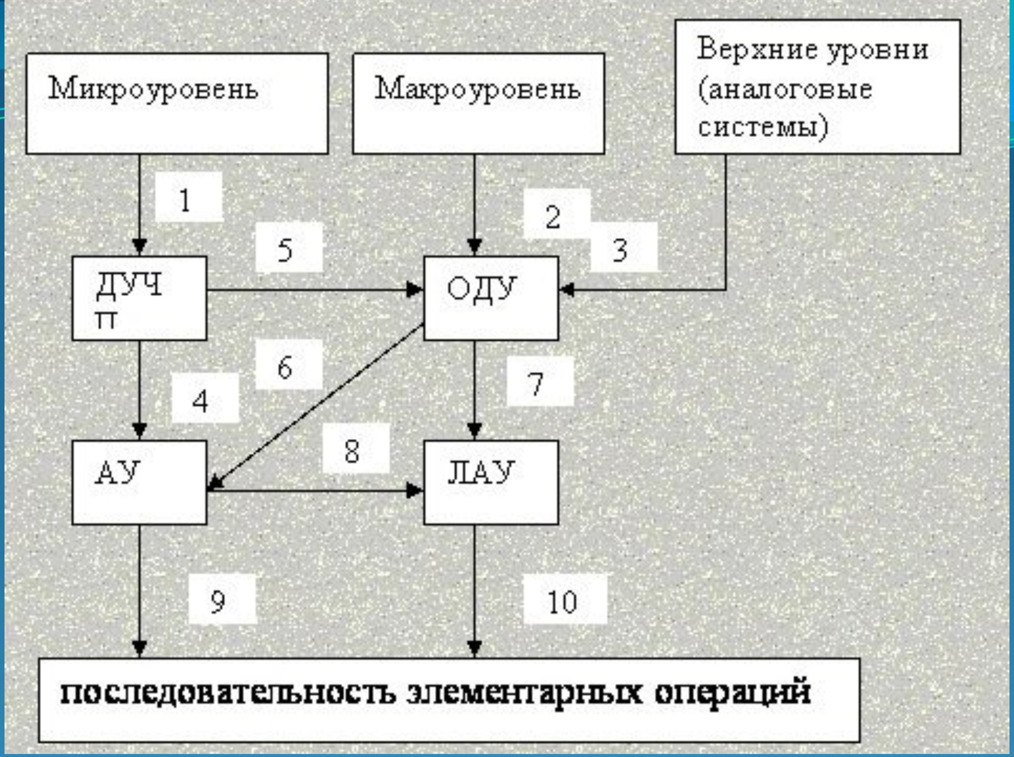
Непрерывность и дискретность. Все те объекты, переменные которых (включая, при необходимости, время) могут принимать несчетное множество сколь угодно близких друг к другу значений называются непрерывными или континуальными. Подавляющее большинство реальных физических и теоретических объектов, состояние которых характеризуется только макроскопическими физическими величинами (температура, давление, скорость, ускорение, сила тока, напряженность электрического или магнитного полей и т.д.) обладают свойством непрерывности. Математические структуры, адекватно описывающие такие объекты, тоже должны быть непрерывными. Поэтому при модельном описании таких объектов используется главным образом, аппарат дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Объекты, переменные которых могут принимать некоторое, практически всегда конечное число наперед известных значений, называются дискретными. Примеры: релейно-контактные переключательные схемы, коммутационные системы АТС. Основой формализованного описания дискретных объектов является аппарат математической логики (логические функции, аппарат булевой алгебры, алгоритмические языки). В связи с развитием ЭВМ дискретные методы анализа получили широкое распространение также для описания и исследования непрерывных объектов.

Свойство непрерывности и дискретности выражается в структуре множеств (совокупностей), которым принадлежат параметры состояния, параметр процесса и входы, выходы системы. Таким образом, дискретность множеств Z, T, X, Y ведет к модели, называемой дискретной, а их непрерывность — к модели с непрерывными свойствами. Дискретность входов (импульсы внешних сил, ступенчатость воздействий и др.) в общем случае не ведет к дискретности модели в целом. Важной характеристикой дискретной модели является конечность или бесконечность числа состояний системы и числа значений выходных характеристик. В первом случае модель называется дискретной конечной. Дискретность модели также может быть как естественным условием (система скачкообразно меняет свое состояние и выходные свойства), так и искусственно внесенной особенностью. Типичный пример последнего – замена непрерывной математической функции на набор ее значений в фиксированных точках.

Непрерывные математические модели и методы их формирования

Для реализации ММ, представляемых ДУЧП или системами ОДУ, используются численные методы непрерывной математики, поэтому рассмотренные ММ называют *непрерывными.*

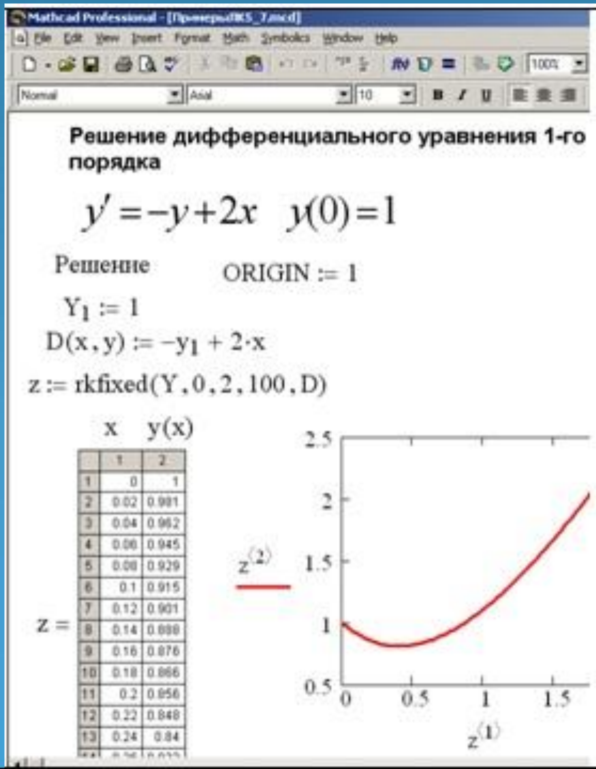


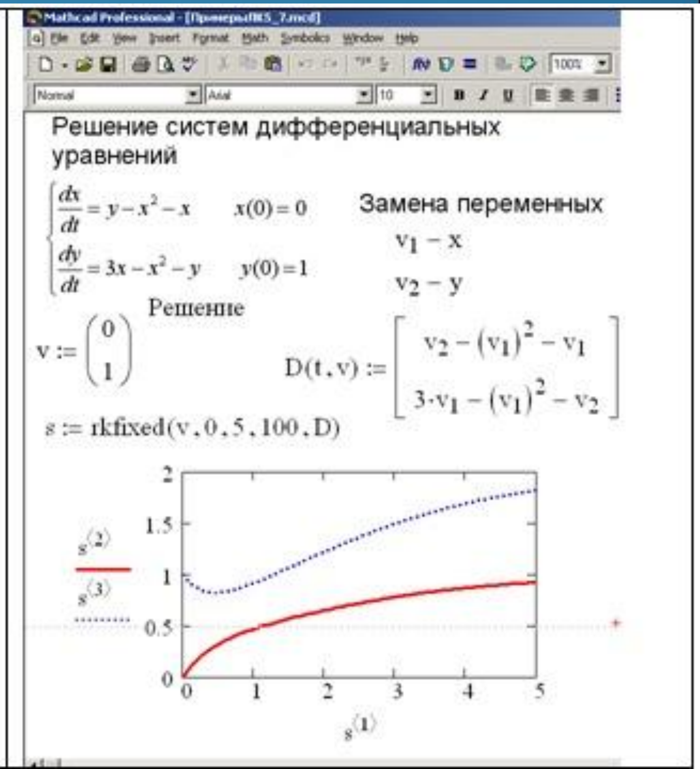


На рис. оказаны *преобразования непрерывных ММ в процессе перехода от исходных формулировок задач к рабочим программам,* представляющим собой последовательности элементарных арифметических и логических операций. Стрелками *1, 2* и *3* показаны переходы от описания структуры объектов на соответствующем иерархическом уровне к математической формулировке задачи. Дискретизация *(4)* и алгебраизация *(5)* ДУЧП по пространственным переменным осуществляются методами конечных разностей (МКР) или конечных элементов (МКЭ). Применение МКР или МКЭ к стационарным ДУЧП приводит к системе алгебраических уравнений (АУ), а к нестационарным ДУЧП—к системе ОДУ. Алгебраизация и дискретизация системы ОДУ по переменной t осуществляются методами численного интегрирования. Для нелинейных ОДУ *(6)* это преобразование приводит к системе нелинейных АУ, для линейных ОДУ (7) — к системе линейных алгебраических уравнений (ЛАУ). Нелинейные АУ решаются итерационными методами. Стрелка *8* соответствует решению методом Ньютона, основанному на линеаризации уравнений, стрелка *9*—методами Зейделя, Якоби, простой итерации и т. п. Решение системы ЛАУ сводится к последовательности элементарных операций *(10)* с помощью методов Гаусса или LU-разложения.

Непрерывные ММ и используемые для их анализа методы вычислительной математики получили широкое распространение в САПР различных отраслей промышленности.

Создание методики автоматического формирования математических моделей систем позволило автоматизировать процедуры анализа и верификации широкого класса технических объектов. Инвариантный характер этой методики обусловил разработку на ее основе методов и алгоритмов, реализованных во многих ПМК проектирования электронных, механических, гидравлических, теплоэнергетических устройств и систем. Известны такие методы формирования ММ как узловой метод, контурный метод, метод переменных состояния.





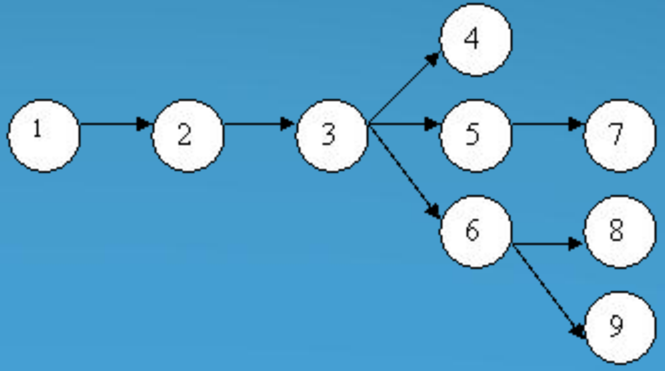
Дискретные **математические модели.**

Дискретной математической моделью называется модель, в которой выполнена дискретизация тех или иных переменных. Рассмотрим ММ, в которых дискретными являются зависимые переменные, характеризующие состояние моделируемого объекта.

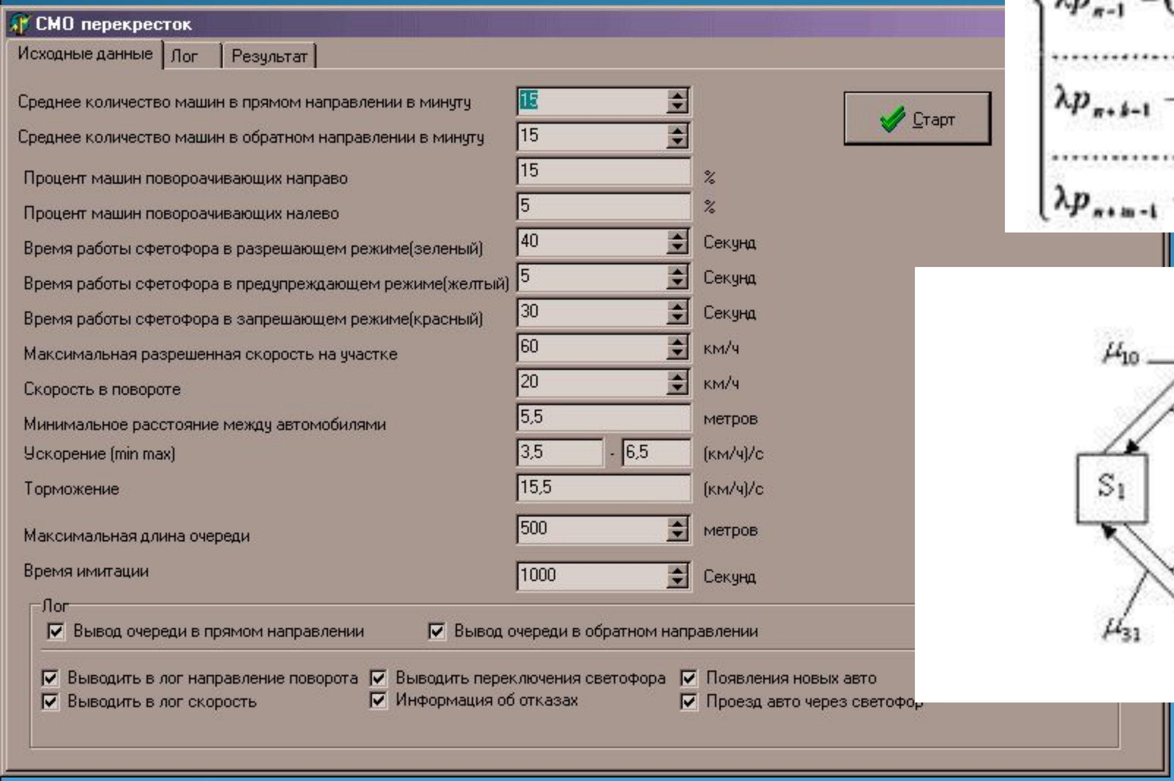
Проектирование систем на функционально-логическом и системном уровнях основано на применении дискретных ММ. При моделировании в подсистемах функционально-логического проектирования принимаются те же допущения, что и при моделировании аналоговых систем на верхних уровнях. Кроме того, моделируемый объект представляется совокупностью взаимосвязанных логических элементов, состояния которых характеризуются переменными, принимающими значения в конечном множестве. В простейшем случае это множество {0, 1}. Непрерывное время *t* заменяется дискретной последовательностью моментов времени $t_к$, при этом длительность такта *.*

Следовательно, математической моделью объекта является *конечный автомат (КА).* Функционирование КА описывается *системой логических уравнений КА*

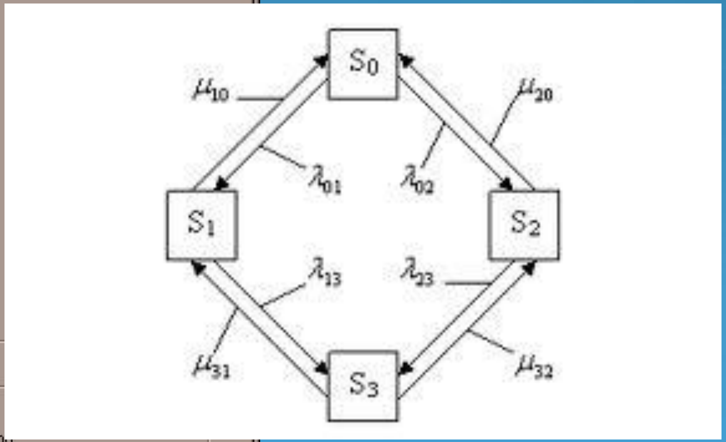
На системном уровне проектирования систем преимущественно распространены *модели систем массового обслуживания (СМО).* Для таких моделей характерно то, что в них отображаются объекты двух типов—заявки на обслуживание и обслуживающие аппараты (ОА). При проектировании ВС заявками являются решаемые задачи, а обслуживающими аппаратами—оборудование ВС. Заявка может находиться в состоянии «обслуживание» или «ожидание», а обслуживающий аппарат—в состоянии «свободен» или «занят». Состояние СМО характеризуется состояниями ее ОА и заявок. Смена состояний называется *событием.* Модели СМО используются для исследования процессов, происходящих в этой системе при подаче на входы потоков заявок. Эти процессы представляются последовательностями событий. По результатам исследования определяются наиболее важные выходные параметры системы: производительность, пропускная способность, вероятность и среднее время решения задач, коэффициенты загрузки оборудования.



Пример 2. Построение стохастической ММСС с применением аппарата СМО



$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu)p_k + (k+1)p_{k+1} = 0,\ k = 2,\ \dots,\ n-1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \lambda p_{n-1} - (\lambda + n\mu)p_n + n\mu p_{n+1} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \lambda p_{n+k-1} - (\lambda + n\mu)p_{n+k} + n\mu p_{n+k+1} = 0,\ k = 1,\ \dots,\ m-1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \lambda p_{n+m-1} - n\mu p_{n+m} = 0. \end{cases}$$



Появление параллельных и конвейерных систем, необходимость моделировать процессы функционирования не только аппаратных, но и программных средств привело к появлению класса дискретных ММ, называемых *сетями Петри.* Сети Петри можно использовать для моделирования на функционально-логическом и системном уровнях проектирования широкого круга систем и сетей.

Сети Петри и СМО широко используются для описания функционирования производственных участков, линий и цехов, ориентиро ванных на многономенклатурное производство изделий. Сети Петри — эффективный инструмент разработки самих САПР. Эти сети могут служить моделями алгоритмов функционирования различных устройств дискретной автоматики.

В комбинированных дискретно-непрерывных моделях неза висимые переменные могут изменяться как дискретно, так и непрерывно. В рамках методологии комбинированного моделирования исследуемая система описывается с помощью элементов, их атрибутов и переменных состояния. Поведение системы имитируется путем вычисления значений переменных состояния через небольшие отрезки времени и значений атри бутов элементов в моменты свершения событий.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ [stochastic model] — такая *экономико-математическая модель*, в которой *параметры*, условия функционирования и характеристики *состояния* моделируемого *объекта* представлены *случайными величинами* и связаны стохастическими (т. е. случайными, нерегулярными) зависимостями, либо исходная *информация* также представлена случайными величинами. Следовательно, характеристики состояния в модели определяются не однозначно, а через законы *распределения* их *вероятностей*. Моделируются, напр., стохастические процессы в *теории массового обслуживания*, в *сетевом планировании и управлении* и в других областях. При построении С. м. применяются методы *корреляционного* и *регрессионного анализов*, другие статистические методы. Другие названия С. м. — **недетерминированная, вероятностная модель** (см. также *Вероятностная система*).

Пример 1.

- *Логарифмическое блуждание* определяется уравнением:

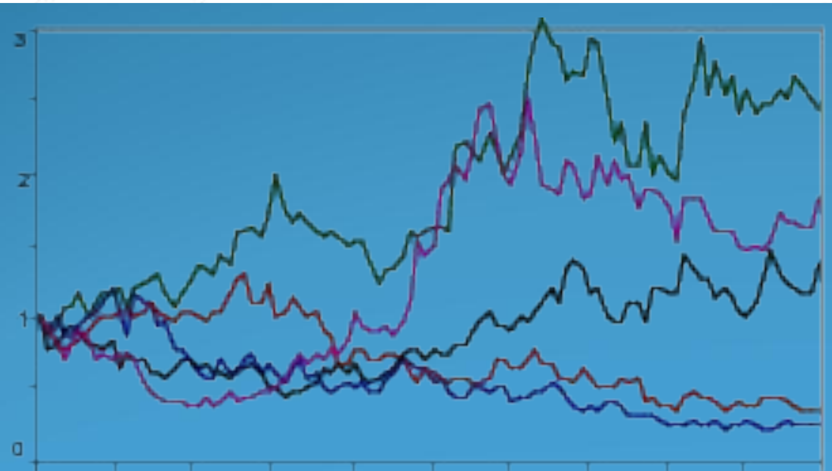
$$dx = \mu\, x\, dt + \sigma\, x\, \delta W\ ,$$

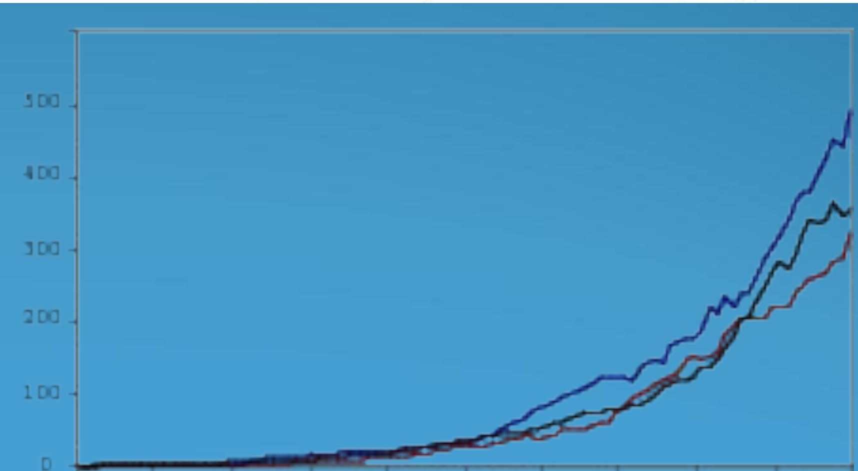
где μ и σ — константы модели. Часто (2.24) называют геометрическим или экспоненциальным броуновским блужданием.

Если стохастического члена нет ($\sigma = 0$), то это обычное уравнение экспоненциального роста ($\mu > 0$) или снижения ($\mu < 0$

$$\frac{dx}{dt} = \mu\, x \qquad => \qquad x(t) = x_0\, e^{\mu t}.$$

Подобная зависимость возникает во многих физических, биологических и социальных системах, от радиоактивного распада до ро
экономики.





В.В. Васильев, Л.А. Симак, А.М. Рыбникова. Математическое и компьютерное моделирование процессов и систем в среде MATLAB/SIMULINK. Учебное пособие для студентов и аспирантов. 2008 год. 91 стр.

Компьютерное моделирование физических задач в Microsoft Visual Basic. Учебник Author: Алексеев Д.В. СОЛОН-ПРЕСС, 2009 г

Автор: Орлова И.В., Половников В.А.
Издательство: Вузовский учебник
Год: 2008

Анфилатов, В. С. Системный анализ в управлении [Текст]: учеб.пособие / В. С. Анфилатов, А. А. Емельянов, А. А. Кукушкин; под ред. А. А. Емельянова. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 368 с.
Веников, В.А.. Теория подобия и моделирования [Текст] / В. А. Веников, Г. В. Веников.- М.: Высш.шк., 1984. – 439 с.
Евсюков, В. Н. Анализ автоматических систем [Текст]: учебно-методическое пособие для выполнения практических заданий / В. Н. Евсюков, А. М. Черноусова. – 2-е изд., исп. – Оренбург: ИПК ГОУ ОГУ, 2007. - 179 с.
Зарубин, В. С. Математическое моделирование в технике [Текст]: учеб. для вузов / Под ред. В. С.Зарубина, А. П. Крищенко. - М.: Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2001. – 496 с.
Колесов, Ю. Б. Моделирование систем. Динамические и гибридные системы [Текст]: уч. пособие / Ю.Б. Колесов, Ю.Б. Сениченков. - СПб. : БХВ-Петербург, 2006. - 224 с.
Колесов, Ю.Б. Моделирование систем. Объектно-ориентированный подход [Текст] : Уч. пособие / Ю.Б. Колесов, Ю.Б. Сениченков. - СПб. : БХВ-Петербург, 2006. - 192 с.
Норенков, И. П. Основы автоматизированного проектирования [Текст]: учеб.для вузов / И. П. Норенков. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000. – 360 с.
Скурихин, В.И. Математическое моделирование [Текст] / В. И. Скурихин, В. В. Шифрин, В. В. Дубровский. - К.: Техника, 1983. – 270 с.
Черноусова, А. М. Программное обеспечение автоматизированных систем проектирования и управления: учебное пособие [Текст] / А. М. Черноусова, В. Н. Шерстобитова. - Оренбург: ОГУ, 2006. - 301 с.