

Черкаський державний  
технологічний університет

# Дисципліна “Інформаційні технології аналізу систем”

## Лекція 6

Тема: “Системи комп’  
ютерної математики”



Викладач: Герасименко І.В.



## **Питання:**

- 1. Вплив інформатики та інформаційних технологій на математичну науку.**
- 2. Задачі лінійної алгебри та їх розв'язування засобами СКМ.**
- 3. Задачі математичного аналізу та їх розв'язування засобами СКМ.**
- 4. Графічна візуалізація обчислень в СКМ.**

# 1. Вплив інформатики та інформаційних технологій на математичну науку.



У доповіді академіка А. П. Єршова "Комп'ютеризація школи і математична освіта" на 6-му Міжнародному конгресі з математичної освіти в Будапешті в серпні 1988р. визначено основні напрями впливу інформатики та інформаційних технологій на математичну науку і освіту, серед яких виділимо наступні:



# 1. Вплив інформатики та інформаційних технологій на математичну науку.

## *Інформатика та ІТ для математики*

*Значне розширення математичної практики*

*Зміна номенклатури математичних знань*

*Обчислювальний експеримент*

*Візуалізація абстракцій*

*Динамізація математичних об'єктів*

*Становлення структур із хаосу*

# 1. Вплив інформатики та інформаційних технологій на математичну науку.



## 1. Значне розширення математичної практики.

Побудова знакових систем, схематизація конкретних об'єктів шляхом виділення їх властивостей, атрибутів і відношень, побудова моделей, дидукція, редукція та рекурсивне мислення, виділення і підтримка різних рівнів абстракції, прогнозування поведінки, аналіз законів і правил, нарешті, конструювання великої кількості алгоритмів та їх оцінка – все це стає засобами сучасної інтелектуальної діяльності, основою математичної та інформаційної культури людини.

Комп'ютеризація є засобом і виявленням експансії математичних знань.

# 1. Вплив інформатики та інформаційних технологій на математичну науку.



## 2. Зміна номенклатури математичних знань.

Через побудову інформаційних моделей та їх програмування в змістову частину математики входять абстракції людської діяльності, відтворюються властивості штучних і живих (біологічних і соціотехнічних) систем. Підсилюється роль і місце дискретної математики. З'являються розділи дискретного аналізу, які певною мірою паралельні класичному математичному аналізу. На перший план виходить вивчення зв'язку між дискретним і неперервним. Виникають нові прийоми математичної роботи, наприклад, автоматизоване доведення теорем.

# 1. Вплив інформатики та інформаційних технологій на математичну науку.



## 3. Обчислювальний експеримент з математичною моделлю.

Його значення в інженерній практиці і його практична сутність як нового методу пізнавальної діяльності в навчальному процесі загальновідома. Але слід підкреслити, що останнім часом обчислювальний експеримент стає джерелом і чисто математичних відкриттів.

# 1. Вплив інформатики та інформаційних технологій на математичну науку.



## 4. Візуалізація абстракцій.

Візуальне сприйняття людини є одним з основних джерел та інструментів, які дозволяють робити відкриття. Можливість синтезувати зображення за допомогою комп'ютера допомагає здійснювати науковий пошук. Інтелектуальна комп'ютерна графіка – це образи, породжені абстрактним знанням, що оживляються за допомогою комп'ютера завдяки зусиллям вченого і програміста.



# 1. Вплив інформатики та інформаційних технологій на математичну науку.



## 5. Динамізація математичних об'єктів.

Використання комп'ютера із його засобами візуалізації і обчислень дає можливість одержати із статичного математичного співвідношення найрізноманітніші траєкторії розвитку динамічного процесу як у часі, так і в просторі, збагачуючи досвід людини, її інтуїцію, здатність до прогнозування.

# 1. Вплив інформатики та інформаційних технологій на математичну науку.



## 6. Становлення структур з хаосу.

Серед математичних експериментів і їх візуалізації за допомогою комп'ютера, особливої уваги заслуговують експерименти, спостереження за становленням регулярних структур із початкового хаосу. Методи математики поширюються на широкий клас природних явищ: рух материків, формування берегової лінії, гірські ландшафти, малюнок полярного сьйва, формоутворювання у рослин, колір тварин, розвиток конфліктів і виникнення криз. Все це є результатом застосування теорії фракталів, синергетики і нелінійної математики.

## 2. Задачі лінійної алгебри та їх розв'язування засобами СКМ.



- виконання операцій над векторами і матрицями;
- виконання операцій над многочленами;
- розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь;
- розв'язування систем нелінійних алгебраїчних рівнянь.

## 2. Задачі лінійної алгебри та їх розв'язування засобами СКМ.



**Mathcad Professional - [st1]**

File Edit View Insert Format Math Symbolics Window Help

**Приклади введення матриць**

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

$A_{0,0} = 1$      $A_{2,1} = -8$

$A_{3,3} = \blacksquare$

Value of subscript or superscript is too big (or too small) for this array.

ORIGIN := 1

$$B_{1,1} := 100 \quad B_{1,2} := -20 \quad B_{2,1} := 35 \quad B_{2,2} := 40$$
$$B = \begin{pmatrix} 100 & -20 \\ 35 & 40 \end{pmatrix}$$

**Matrix**

- $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$   $\times_n$   $\times^{-1}$
- $|\times|$   $\vec{f}(\vec{M})$   $M^{\langle \rangle}$
- $M^T$   $m..n$   $\hat{u} \cdot \hat{v}$
- $\hat{u} \times \hat{v}$   $\sum u$   $\frac{d}{dx}$

## 2. Задачі лінійної алгебри та їх розв'язування засобами СКМ.



```
Mathcad Professional - [st2]
File Edit View Insert Format Math Symbolics Window Help
+ Заповнення матриць за допомогою ранжованих змінних
ORIGIN := 1
i := 1..3    j := 1..3
M1i,j := 0      M1 =  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  - нульова матриця
M2i,j := if(i = j, 1, 0)  M2 =  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  - одинична матриця
M3i,j := i3 + j2      M3 =  $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 9 & 12 & 17 \\ 28 & 31 & 36 \end{pmatrix}$  - спеціальна матриця
```

## 2. Задачі лінійної алгебри та їх розв'язування засобами СКМ.



### Матричні оператори

Оператор	Введення	Призначення
$-M$	$-M$	Зміна знаків елементів матриці на протилежні
$Z * M, M * Z$	$Z * M, M * Z$	Множення матриці $M$ на скаляр $Z$
$M * V$	$M * V$	Множення матриці $M$ на вектор $V$
$M_1 * M_2$	$M_1 * M_2$	Множення матриць $M_1$ і $M_2$
$\frac{M}{Z}$	$M / Z$	Ділення матриці $M$ на скаляр $Z$
$M^{-1}$	$M^{-1}$	Обчислення оберненої матриці до матриці $M$
$M^n$	$M^n$	Піднесення матриці $M$ до $n$ -го ступеня
$ M $	$ M $	Обчислення визначника матриці $M$
$M^T$	$M \text{ Ctrl } !$	Транспонування матриці $M$
$M^{<n>}$	$M \text{ Ctrl } ^n$	Виділення $n$ -го стовпчика матриці $M$
$M_{m,n}$	$M [(m, n)]$	Виділення елемента $(m, n)$ матриці $M$
$\bar{M}$	$M \gg$	Отримання комплексно-спряженої матриці до матриці $M$



## 2. Задачі лінійної алгебри та їх розв'язування засобами СКМ.



### Матричні оператори

Оператор	Введення	Призначення
$-M$	$-M$	Зміна знаків елементів матриці на протилежні
$Z * M, M * Z$	$Z * M, M * Z$	Множення матриці $M$ на скаляр $Z$
$M * V$	$M * V$	Множення матриці $M$ на вектор $V$
$M_1 * M_2$	$M_1 * M_2$	Множення матриць $M_1$ і $M_2$
$\frac{M}{Z}$	$M / Z$	Ділення матриці $M$ на скаляр $Z$
$M^{-1}$	$M^{-1}$	Обчислення оберненої матриці до матриці $M$
$M^n$	$M^n$	Піднесення матриці $M$ до $n$ -го ступеня
$ M $	$ M $	Обчислення визначника матриці $M$
$M^T$	$M \text{ Ctrl } !$	Транспонування матриці $M$
$M^{<n>}$	$M \text{ Ctrl } ^n$	Виділення $n$ -го стовпчика матриці $M$
$M_{m,n}$	$M [(m, n)]$	Виділення елемента $(m, n)$ матриці $M$
$\bar{M}$	$M \gg$	Отримання комплексно-спряженої матриці до матриці $M$

## 2. Задачі лінійної алгебри та їх розв'язування засобами СКМ.



### Матричні оператори:

- identity(n)** – створює одиничну квадратну матрицю порядку  $n$ ;
- diag(V)** – створює діагональну матрицю, головною діагоналлю якої є вектор  $V$ ;
- cols(M)** – визначає кількість стовпців матриці  $M$ ;
- rows(M)** – визначає кількість рядків матриці  $M$ ;
- rank(M)** – обчислює ранг матриці  $M$ ;
- tr(M)** – обчислює слід (суму діагональних елементів) квадратної матриці  $M$ ;
- mean(M)** – обчислює середнє значення елементів масиву;



## 2. Задачі лінійної алгебри та їх розв'язування засобами СКМ.



**csort**( $M$ ,  $n$ ) – переставляє рядки матриці  $M$  таким чином, що відсортованим стає  $n$ -ий стовпчик;

**rsort**( $M$ ,  $n$ ) – переставляє стовпці матриці  $M$  таким чином, що відсортованим стає  $n$ -ий рядок;

**rref**( $M$ ) – повертає спеціальну форму матриці  $M$  (у вигляді східців) і використовується для розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса;

**eigenvals**( $M$ ) – знаходження власних значень матриці  $M$ ;

**submatrix** ( $A$ ,  $ir$ ,  $jr$ ,  $ic$ ,  $jc$ ) – створює підматрицю, яка складається з усіх елементів, які містяться в рядках з  $ir$  по  $jr$  та стовпців з  $ic$  по  $jc$ ;

**matrix** ( $m$ ,  $n$ ,  $f$ ) – створює матрицю, в якій  $(i, j)$ -й елемент дорівнює  $f(i, j)$ , де  $i=0, 1, \dots, m$ ,  $j=0, 1, \dots, n$ ,  $f(i, j)$  – деяка функція.

**Приклади використання матричних операторів**

Задання матриці A:  $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Множення матриці A на число 3:  $3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$

Транспонування матриці A:  $B := A^T$   $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Задання квадратної матриці C і знаходження її визначника:  $C := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$   $|C| = 5$

Знаходження матриці D, оберненої до матриці C:  $D := C^{-1}$   $D = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.4 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$

Додавання матриць C і D:  $C + D = \begin{pmatrix} 1.6 & 1.6 \\ -0.8 & 3.2 \end{pmatrix}$

Множення матриць C і D:  $C \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Множення матриць A і C:  $A \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

The number of rows and/or columns in these arrays do not match.



## 2. Задачі лінійної алгебри та їх розв'язування засобами СКМ.



Mathcad Professional - [st5]

File Edit View Insert Format Math Symbolics Window Help

**Розв'язування матричних рівнянь виду  $Ax=X=B$**

Задання початкових матриць  $A$  і  $B$ :  $A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$   $B := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Розв'язування:

Перевірка на існування розв'язку:  $|A| = -66$

$X := A^{-1} \cdot B$  +

Відповідь:  $X = \begin{pmatrix} 0.167 \\ 0.848 \\ 0.439 \end{pmatrix}$       Перевірка:  $B := A X$        $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

## 2. Задачі лінійної алгебри та їх розв'язування засобами СКМ.



Mathcad Professional - [st6]

File Edit View Insert Format Math Symbolics Window Help

**Розв'язування систем лінійних рівнянь**

Задання початкових матриць A і B:  $A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$   $B := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Розв'язування:

Перевірка на існування розв'язку:  $|A| = -66$

$X := \text{lsolve}(A, B)$

Відповідь:  $X = \begin{pmatrix} 0.167 \\ 0.848 \\ 0.439 \end{pmatrix}$       Перевірка:  $B := A X$        $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

# 2. Задачі лінійної алгебри та їх розв'язування засобами СКМ.



**Mathcad Professional - [st8]**

File Edit View Insert Format Math Symbolics Window Help

**Символьні перетворення матриць**

$$\left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right| \rightarrow a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^T \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{-a_{22}}{(-a_{11} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot a_{21})} & \frac{a_{12}}{(-a_{11} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot a_{21})} \\ \frac{a_{21}}{(-a_{11} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot a_{21})} & \frac{-a_{11}}{(-a_{11} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot a_{21})} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

**Symbolic**

→	▪ →	Modifiers
float	complex	assume
solve	simplify	substitute
factor	expand	coeffs
collect	series	parfrac
fourier	laplace	ztrans
invfourier	invlaplace	invztrans
$m^T \rightarrow$	$m^{-1} \rightarrow$	$ M  \rightarrow$
explicit		...



# 2. Задачі лінійної алгебри та їх розв'язування засобами СКМ.



Mathcad - [Untitled: 2]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

$x = \int \frac{1}{x} dx$   $\frac{1}{x}$   $\frac{1}{x^2}$   $\frac{1}{x^3}$   $\frac{1}{x^4}$   $\frac{1}{x^5}$   $\frac{1}{x^6}$   $\frac{1}{x^7}$   $\frac{1}{x^8}$   $\frac{1}{x^9}$   $\frac{1}{x^{10}}$  My Site

**Розв'язування рівнянь виду  $f(x)=0$**

$P(x) := x^2 - 5x + 6$

$x := 1$   
 $r1 := \text{root}(P(x), x)$   
 $r1 = 2$

$x := 2.5$

$r2 := \text{root}(P(x), x)$   
 $r2 = 3$

$r0 := \text{root}(P(x), x, 1, 3)$   
 $r0 = 3$

X-Y Trace

X-Value 2.0061 Copy X

Y-Value -0.0060983 Copy Y

Y2-Value Copy Y2

Track data points

Close

## 2. Задачі лінійної алгебри та їх розв'язування засобами СКМ.



The screenshot shows the Mathcad software interface. The title bar reads "Mathcad - [Untitled: 3]". The menu bar includes "File", "Edit", "View", "Insert", "Format", "Tools", "Symbolics", "Window", and "Help". The toolbar contains various mathematical symbols and functions. The main workspace displays the following content:

$$P(x) := x^2 - 5x + 6$$
$$v := P(x) \text{ coeffs}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$r := \text{polyroots}(v)$$
$$r = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad +$$

The status bar at the bottom indicates "Press F1 for help." and shows the "AUTO" mode.

# 3. Задачі математичного аналізу та їх розв'язування засобами СКМ.



Mathcad - [Untitled: 8]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

My Site

**Розв'язування систем рівнянь**

$$f1(x) := 1 - x$$
$$f2(x) := 3 + x$$

$x := 1 \quad y := 1$

Given

$$x + y = 1$$
$$x - y = 3$$

$z := \text{Find}(x, y)$

$$z = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

X-Y Trace

X-Value: -1.02 Copy X

Y-Value: 2.02 Copy Y

Y2-Value: Copy Y2

Track data points

Close

Press F1 for help. AUTO NUM Page 1



## 2. Задачі лінійної алгебри та їх розв'язування засобами СКМ.



The screenshot shows the Mathcad software interface. The title bar reads "Mathcad - [Untitled: 9]". The menu bar includes "File", "Edit", "View", "Insert", "Format", "Tools", "Symbolics", "Window", and "Help". The toolbar contains various mathematical symbols and functions. The main workspace contains the following text:

```
x := 1    y := 1  
  
Given  
  
x + y = 1  
x - y = 3  
  
t := Minerr(x, y)  
  
t =  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  +
```

At the bottom of the window, there is a status bar with the text "Press F1 for help." and "AUTC".

# 1. Характеристика основних класів систем комп'ютерної математики.



## Математичний аналіз:

- виконання арифметичних операцій і обчислення значень алгебраїчних функцій;
- обчислення значень тригонометричних і гіперболічних функцій та обернених до них функцій;
- виконання логічних операцій і обчислення значень булевих функцій;
- аналітичне і чисельне диференціювання;
- пошук екстремумів функцій від однієї і багатьох змінних;
- аналітичне і чисельне інтегрування;

# 1. Характеристика основних класів систем комп'ютерної математики.



## Математичний аналіз:

- розв'язування задач інтерполювання функцій;
- робота з функціями з комплексними аргументами;
- обчислення спеціальних математичних функцій;
- розв'язування звичайних диференціальних рівнянь та їх систем.

# Прошу запитання



**8(0472) 730271**



**herasymenkoinna@gmail.com**

**Дякую за увагу!**