Черкаський державний технологічний університет

ТЕМА: "Економічна та математична постановка оптимізаційних задач та їх класифікація"

Дисципліна

“Інформаційні технології аналізу систем”

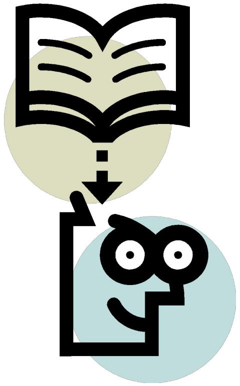
Лекція 7

Викладач: Герасименко І. В.

Питання:

1. Економічна постановка оптимізаційних задач.
2. Основні етапи розв'язування задач оптимізації.
3. Математична постановка оптимізаційних задач.
4. Класифікація екстремальних задач.
5. Приклади виробничих і економічних оптимізаційних задач та їх формалізація.

1. Економічна постановка оптимізаційних задач



Екстремальними (оптимізаційними) задачами **називаються задачі на відшукання максимуму чи мінімуму певних величин за наявності або відсутності обмежень на параметри, від яких вони залежать.**

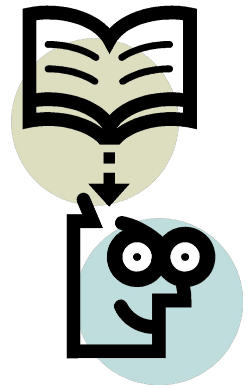
Optimum (лат.) - найкращій, досконалий

Extremum (лат.) - крайній

Maximum (лат.) - найбільший

Minimum (лат.) - найменший

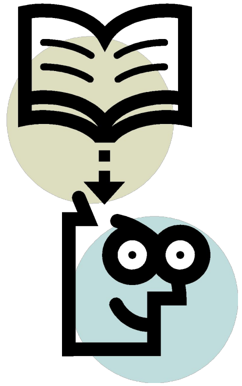
1. Економічна постановка оптимізаційних задач



Приклади економічних оптимізаційних задач:

- **Задача організації виробництва з метою отримання максимального прибутку при заданих обмеженнях на ресурси;**
- **Задача оптимізації міжгалузевих зв'язків економічного регіону, з метою ефективного зниження загальних витрат людської праці та технічних і енергетичних ресурсів;**
- **Задача про оптимізацію перевезень вантажів між базами продукції і базами споживачів з метою зниження вартості перевезень;**

1. Економічна постановка оптимізаційних задач



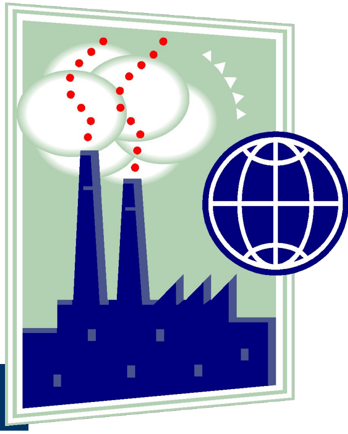
Приклади економічних оптимізаційних задач:

- **Задача визначення оптимальних кормових раціонів худоби у сільському господарстві;**

- **Задача на визначення оптимальної структури посівних площ;**

- **Задача про раціональний розкрій матеріалів з метою економії сировини.**

1. Економічна постановка оптимізаційних задач

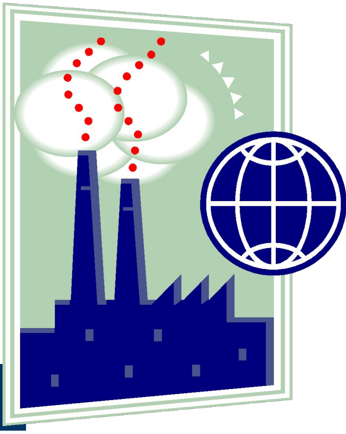


Приклад 1.

Плодоконсервний завод виготовляє п’ять видів фруктового соку: *березово-яблучний, грушево-яблучний, сливово-грушевий, грушево-яблучно-сливовий, березово-грушевий*. Прибуток від реалізації одного літру соку, норми витрат сировини та її запаси наведені в таблиці.

Як необхідно спланувати виробництво соку, щоб забезпечити заводу максимальний прибуток від реалізації виготовленої продукції?

Таблиця вхідних даних



Види сировини	Витрати сировини на 1 л соку					Запаси сировини на сезон (т)
	Березово-яблучний	Грушево-яблучний	Сливово-грушевий	Грушево-яблучно-сливовий	Березово-грушевий	
Березовий концентрат (л)	0,8				0,7	10
Яблука (кг)	1,6	1,4		0,9		50
Груші (кг)		1,7	1,6	1,1	1,3	40
Слива (кг)			1,6	1,2		20
Прибуток від реалізації 1 л соку (грн)	0,33	0,45	0,4	0,38	0,29	

2. Основні етапи розв'язування задач оптимізації

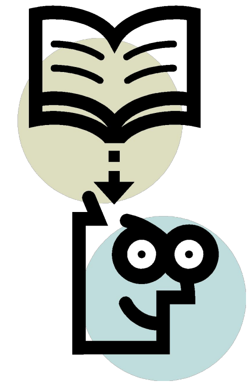
- Постановка задачі оптиізації в реальних об’єктах
- Побудова математичної моделі задачі оптимізації
- Класифікація математичної задачі
- Вибір засобів розв’язування задачі
- Вибір (розробка) методу розв’язування задачі
- Алгоритмізація і програмування
- Комп’ютерний експеримент
- Аналіз одержаних результатів та їх інтерпретація

2. Основні етапи розв'язування задач оптимізації

Оптимізаційні моделі

- Лінійні, нелінійні
- Статичні, динамічні
- Детерміновані, стохастичні
- Неперервні, дискретні
- Чіткі, нечіткі

Математична модель задачі з прикладу 1



Математична модель являє собою систему математичних залежностей і відношень, які описують структуру реальних об'єктів, процесів, явищ, що досліджуються, та принципи їх функціонування.

$$f(x) = 0{,}33x_1 + 0{,}45x_2 + 0{,}4x_3 + 0{,}38x_4 + 0{,}29x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}7x_5 \le 10000; \\ 1{,}6x_1 + 1{,}4x_2 + 0{,}9x_4 \le 50000; \\ 1{,}7x_2 + 1{,}6x_3 + 1{,}1x_4 + 1{,}3x_5 \le 40000; \\ 1{,}6x_3 + 1{,}2x_4 \le 20000; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1{,}5}$$

Розв’язок задачі за допомогою п
Mathcad

Mathcad - [Untitled:1]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

My Site Go

$$f(x) := 0.33x_1 + 0.45x_2 + 0.4x_3 + 0.38x_4 + 0.29x_5$$

$$x_5 := 0$$

Given

$$0.8x_1 + 0.7x_5 \le 10000$$

$$1.6x_1 + 1.4x_2 + 0.9x_4 \le 50000$$

$$1.7x_2 + 1.6x_3 + 1.1x_4 + 1.3x_5 \le 40000$$

$$1.6x_3 + 1.2x_4 \le 20000$$

$$x \ge 0$$

$$x\_max := maximize(f, x) \qquad x\_max = \begin{pmatrix} 1.25 \times 10^4 \\ 1.25749 \times 10^4 \\ 2.17066 \times 10^3 \\ 1.37725 \times 10^4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x\_max) = 1.58855 \times 10^4$$

Press F1 for help. AUTO NUM Page 1

Висновок:

Оптимальний план випуску фруктових соків плодоконсервним заводом виглядає так:

12500 л – березово-яблучний сік,

12574,9 л – грушево-яблучний сік,

2170,6 л – сливово-грушевий сік,

13772,5 л – грушево-яблучно-сливовий сік – **найприбутковіший,**

***березово-грушевий сік виготовляти невигідно*.**

За таких умов **максимальний прибуток** заводу буде становити близько **15885,5** грн.

3. Математична постановка оптимізаційних задач

Конкретні цілі, поставлені в екстремальній задачі, об’єднуються, з математичної точки зору, **в цільову функцію**, максимум чи мінімум якої треба знайти, а обмеження, що відтворюють нестачу відповідних ресурсів, визначають деяку множину значень величин, від яких залежить цільова функція, що задовольняють всім умовам задачі. Ця множина значень утворює **допустиму множину** задачі. Якщо цілі поставленої задачі описуються однією функцією, то задача називається **однокритеріальною**, в протилежному випадку – **багатокритеріальною**.

3. Математична постановка оптимізаційних задач

(1) $$f(x) \to \min, x \in X$$

Задача мінімізації

(1’) $$f(x) \to \max, x \in X$$

Задача максимізації

(1”) $$f(x) \to extr, x \in X$$

Цільова функція

Допустима точка

Допустима множина

3. Математична постановка оптимізаційних задач

Надалі будемо розглядати скінченновимірні задачі оптимізації, тобто задачі, допустима множина яких належить евклідовому простору R^n.

Якщо $X \neq \varnothing$, то задача (1) називається ***сумісною***, в протилежному випадку - ***несумісною***.

Якщо $X = R^n$, то задача (1) називається задачею ***без обмежень*** на змінні, у протилежному випадку - задачею ***з обмеженнями***.

Формалізація екстремальної задачі полягає в точному визначенні її основних елементів: цільової функції $f(x)$ і допустимої множини X.

3. Математична постановка оптимізаційних задач

Означення 1. Точка $x^* \in X$ називається *розв'язком задачі* (1) або *точкою глобального мінімуму*, якщо

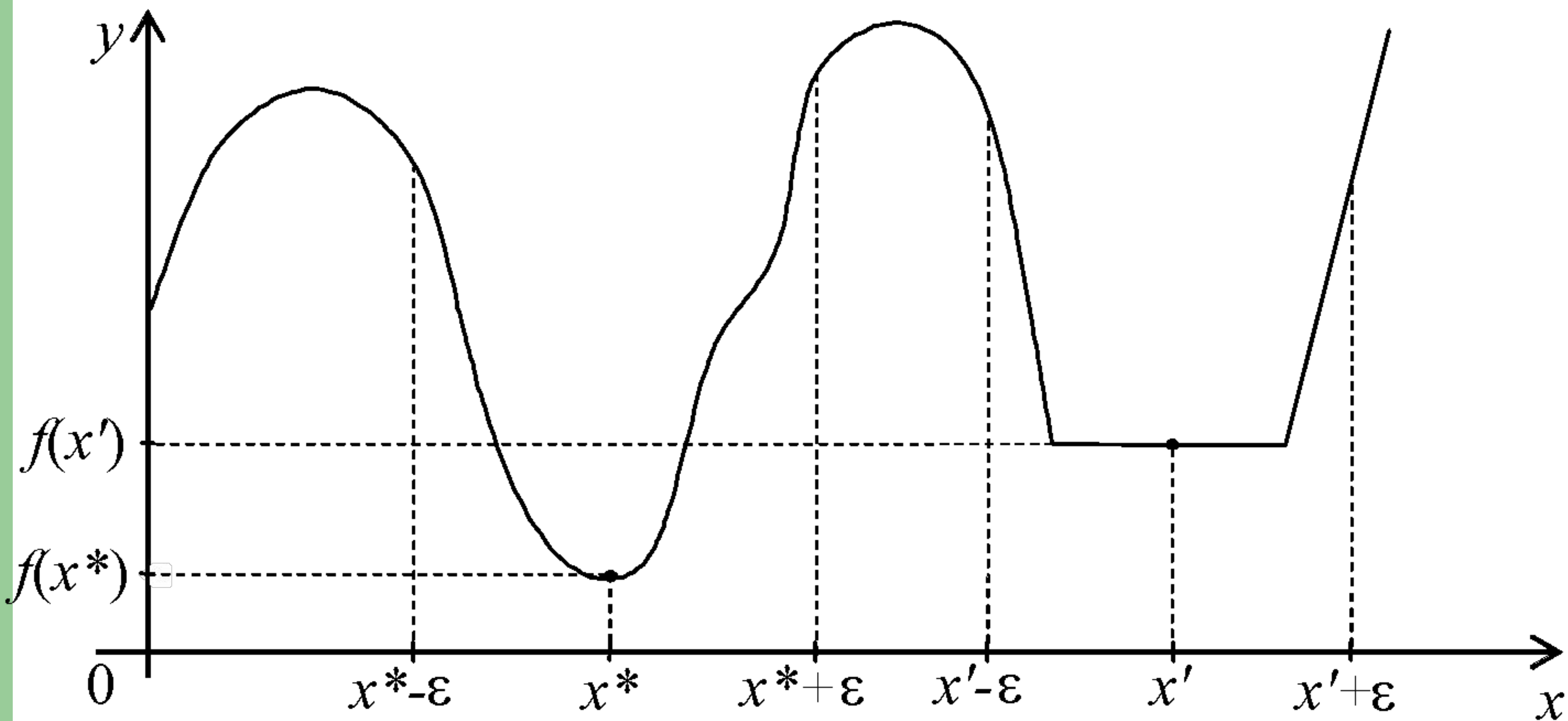
(2) $$f(x^*) \le f(x) \quad \forall x \in X$$

Означення 2. Точка $x^* \in X$ називається *точкою локального мінімуму* або *локальним розв'язком* задачі (1), якщо існує число $\varepsilon > 0$ таке, що

(3) $$f(x^*) \le f(x) \quad \forall x \in X \cap U_\varepsilon(x^*),$$

де $U_\varepsilon(x^*)$ – ε-окіл точки x^*.

3. Математична постановка оптимізаційних задач



4. Класифікація екстремальних задач

Основні класи екстремальних задач:

- задачі математичного програмування (лінійного, квадратичного, опуклого, параметричного, стохастичного),
- задачі дискретної оптимізації,
- задача класичного варіаційного числення,
- задача оптимального управління.

4. Класифікація екстремальних задач

Задача математичного програмування

$$f(x) \to \min,$$

$$g_i(x) \le 0, i = 1, 2, \dots, k,$$

$$g_i(x) = 0, i = k+1, \dots, m, \quad x \in P.$$

$g_i(x) \le 0$ - **обмеження-нерівності**,

$g_i(x) = 0$ - **обмеження-рівності**,

$x \in P$ - **пряме обмеження**.

Задача математичного програмування

Загальна задача лінійного програмування

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min(\max) \qquad (5)$$

$$X = \{x \in R^n \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{1,k}, \qquad (6)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{k+1,m}, \qquad (7)$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,s},\ s \le n\}, \qquad (8)$$

де $c_j,\ a_{ij},\ b_i \in R^1\ i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ - задані дійсні числа.

Класифікація задач лінійного програмування

- Загальна задача лінійного програмування
  - Основна задача ЛП
  - Стандартна задача ЛП
    - Перша стандартна ЗЛП
    - Друга стандартна ЗЛП
  - Канонічна задача ЛП

4. Класифікація екстремальних задач

Задача стохастичного програмування

$$f(x,\omega) \to \min(\max),$$

$$g_i(x,\omega) \le 0,\ i = \overline{1,m},$$

$$g_i(x,\omega) = 0,\ i = \overline{m+1,k},$$

$$x \in X,\ \omega \in \Omega,$$

$$(\Omega, F, P) - \textit{ймовірнісний простір}.$$

Ваші запитання

8(0472) 730271

herasymenkoinna@gmail.com

Дякую за увагу!