Старинные задачи

О, сколько нам открытий чудных…

Наиболее древние письменные математические тексты датируются примерно началом 2 тыс. до н. э. Математические документы сохранились только в Египте, Вавилоне, Китае и Индии

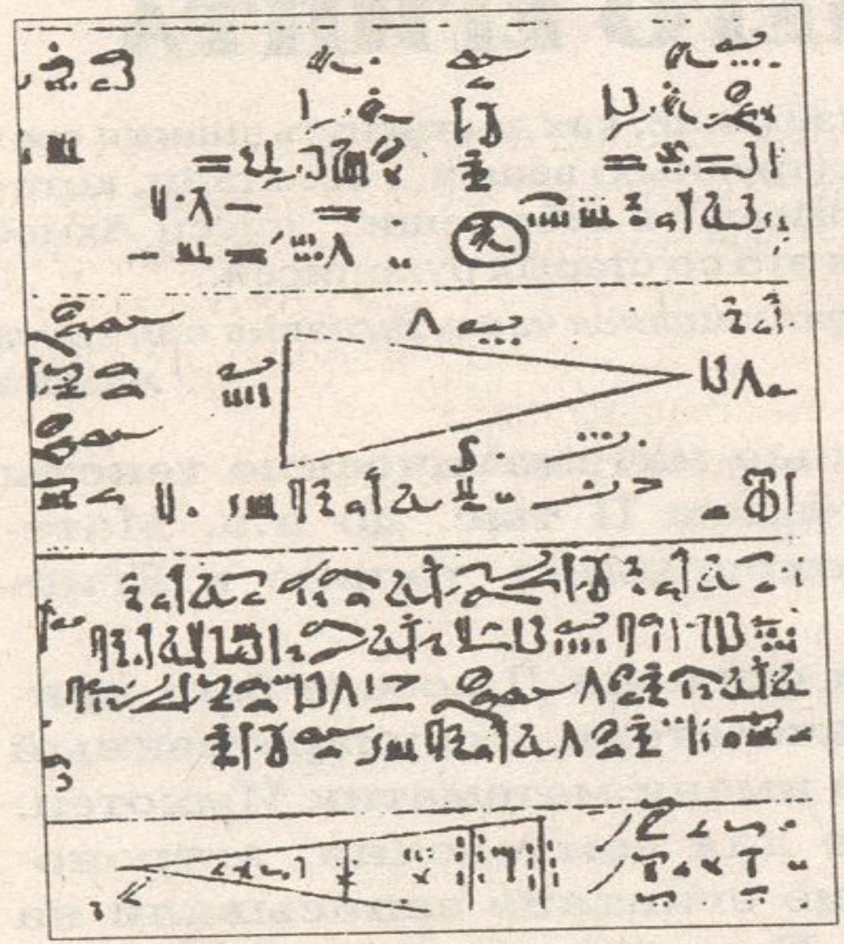
Древний Египет

Математические правила, нужные для земледелия, астрономии и строительных работ, древние египтяне записывали на стенах храмов или на папирусах.

Высшим достижением египетской математики является точное вычисление объема усеченной пирамиды с квадратным основанием.

Наставление, как достигнуть знания всех темных (трудных) вещей… всех тайн, которые скрывают в себе вещи… писец Ахмес написал это со старых рукописей…

Сохранившаяся часть заглавия папируса Ахмеса.



Фрагмент папируса Ахмеса (основная часть папируса хранится в Британском музее)

Задачи Древнего Египта

Задача №1

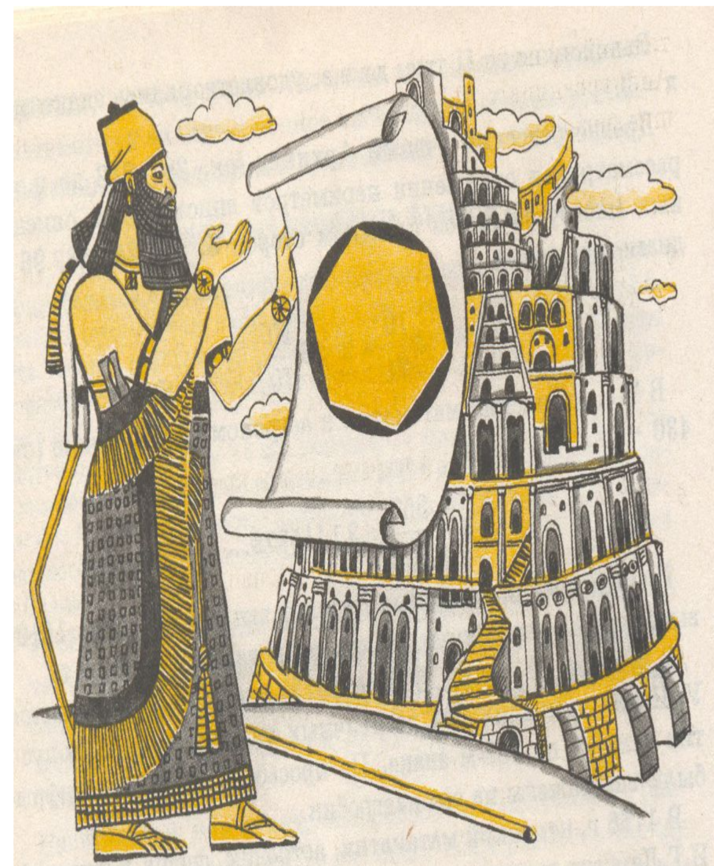
Задача №2

Вавилон

Вавилоняне были основоположниками астрономии, создали шестидесятиричную систему счисления, решали уравнения второй степени и некоторые виды уравнений третьей степени при помощи специальных таблиц

Я совершаю запутаннейшие деления и умножения…..

Ашшурбанипал



Задачи Вавилона

Задача о делении прямого угла.

Клинописная числовая таблица
(Нью-Йорк, Колумбийская библиотека)

Древняя Греция

Если от математики Древнего Востока до нас дошли отдельные задачи с решениями и таблицы, то в Древней Греции рождается наука математика, основанная на строгих доказательствах . Этот важнейший скачок в истории науки относится к VI-V вв. до н. э.

Если ты это найдешь чужестранец, умом пораскинув,

И сможешь точно назвать каждого стада число,

То уходи, возгордившись победой, и будет считаться

Что в этой мудрости ты все до конца превзошел…

Заключительные строки задачи Архимеда о быках Солнца

Задачи Древней Греции

Задача Диофанта Александрийского
Древнеримская задача (II в.)
Задача Фалеса
Задача Пифагора
Задача о музах
Задача о грациях
Задача Евклида
Задача Архимеда
Задача Герона Александрийского

Древний Китай

Возникновение китайской цивилизации на берегах реки Хуанхэ относится к началу II тыс. до н. э. сохранились обозначения цифр на гадательных костях животных XIV в. до н. э. На обломках посуды XIII-XII вв. до н. э. имеются изображения геометрических орнаментов с правильными 5-, 7-, 8-, 9-угольниками

Три пути ведут к знанию:

Путь размышления – самый благородный,

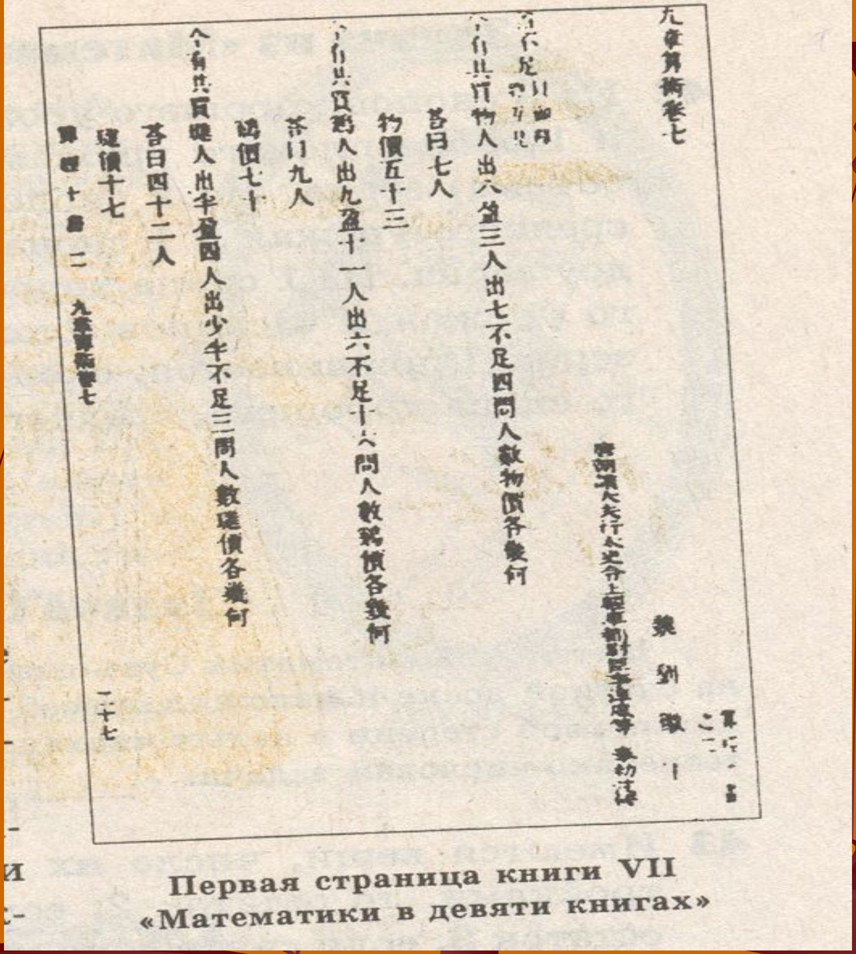
Путь подражания – самый легкий

И путь опыта – это путь самый горький…

Конфуций

Задачи Древнего Китая

Задача из «Математики в девяти книгах»


九章算術卷七

魏 劉徽 注

唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉敕注釋

盈不足

今有共買物人出八盈三人出七不足四問人數物價各幾何

答曰七人

物價五十三

今有共買雞人出九盈十一人出六不足十六問人數雞價各幾何

答曰九人

雞價七十

今有共買璡人出半盈四人出少半不足三問人數璡價各幾何

答曰四十二人

璡價十七

九章算術卷七

二十七

Первая страница книги VII «Математики в девяти книгах»

Древняя Индия

Творчество индийских математиков оказало огромное влияние на развитие арифметики, алгебры и тригонометрии

Подобно тому как солнце затмевает своим блеском звезды, так мудрец затмевает славу других людей, предлагая и особенно решая на народных собраниях математические задачи.

Брахмагупта

Задачи Древней Индии

Задача Апастамбы

Задача Ариабхаты

Задача Бхаскары 1

Задача Брахмагупты

КОНЕЦ

Задача №1

У семи лиц по семи кошек, каждая кошка съедает по семи мышек, каждая мышь съедает по семи колосьев, из каждого колоса может вырасти по семь мер ячменя. Как велики числа этого ряда и их сумма.

Ответ

7; 49; 343; 2 401; 16 807; 19 607. Эта задача – путешественница из древнего египетского папируса трансформировалась на Руси в старинную народную задачу и встречалась в различных формулировках.

Задача №2

Найдите приближенное значение для числа π, приняв площадь круга равной площади квадрата со стороной 8/9 диаметром круга.

Ответ

По условию задачи $\left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4}$

Тогда $\pi = \frac{8^2 \cdot d^2 \cdot 4}{9^2 \cdot d^2} = \frac{256}{81} = 3{,}1605$

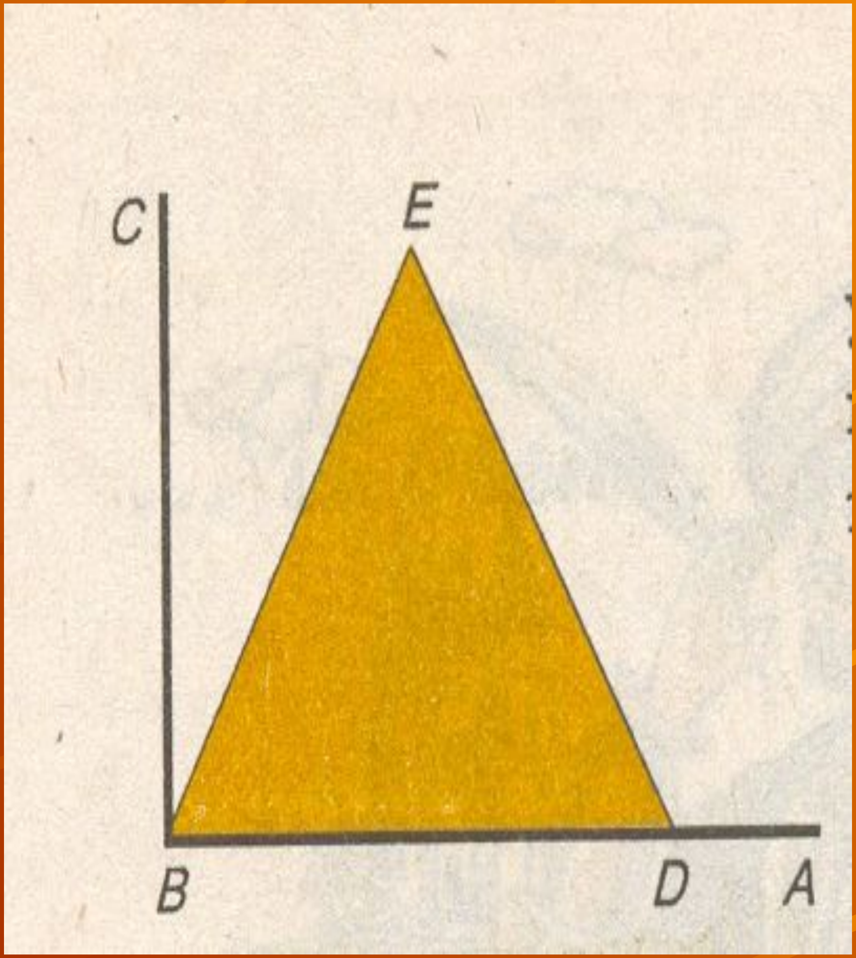
что дает довольно точное приближение с ошибкой 0,6%.

Задача о делении прямого угла

Разделите прямой угол на три равные части.

Ответ

Пусть требуется разделить прямой угол АВС (рис.) на три равные части. Для этого древние вавилоняне на отрезке BD стороны ВА строили равносторонний треугольник BED. Тогда угол CBE будет составлять одну треть данного прямого угла. Остается только разделить пополам угол ВЕ, и задача будет решена.



Задача Диофанта Александрийского

Произведение двух чисел, каждое из которых есть сумма двух квадратов, само представляется двумя способами суммой двух квадратов:

$$(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)=(a\cdot c\pm b\cdot d)^2+(b\cdot c\mp a\cdot d)^2$$

Древнеримская задача (IIв.)

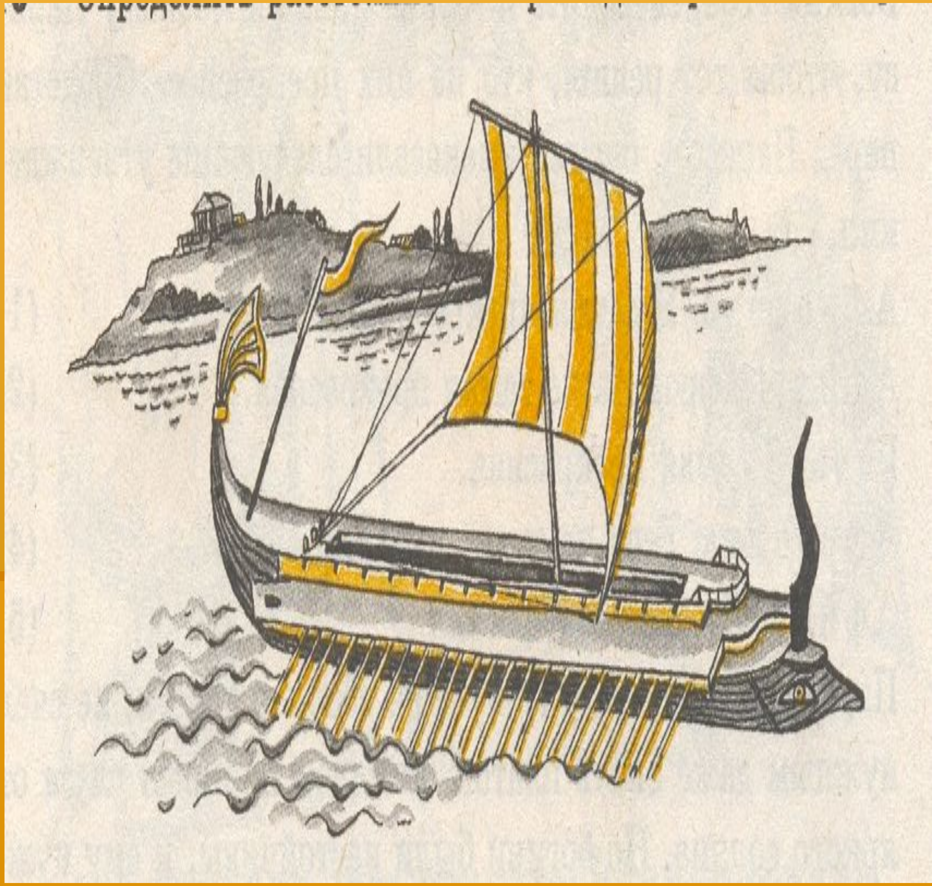
Некто, умирая, завещал: « Если у моей жены родится сын, то пусть ему будет 2/3 имения, а жене – остальная часть. Если же родится дочь, то ей 1/3, а жене 2/3». Родилась двойня – сын и дочь. Как же разделить имение?

Ответ

Имение следует разделить между сыном, женой и дочерью пропорционально числам 4 : 2 : 1.

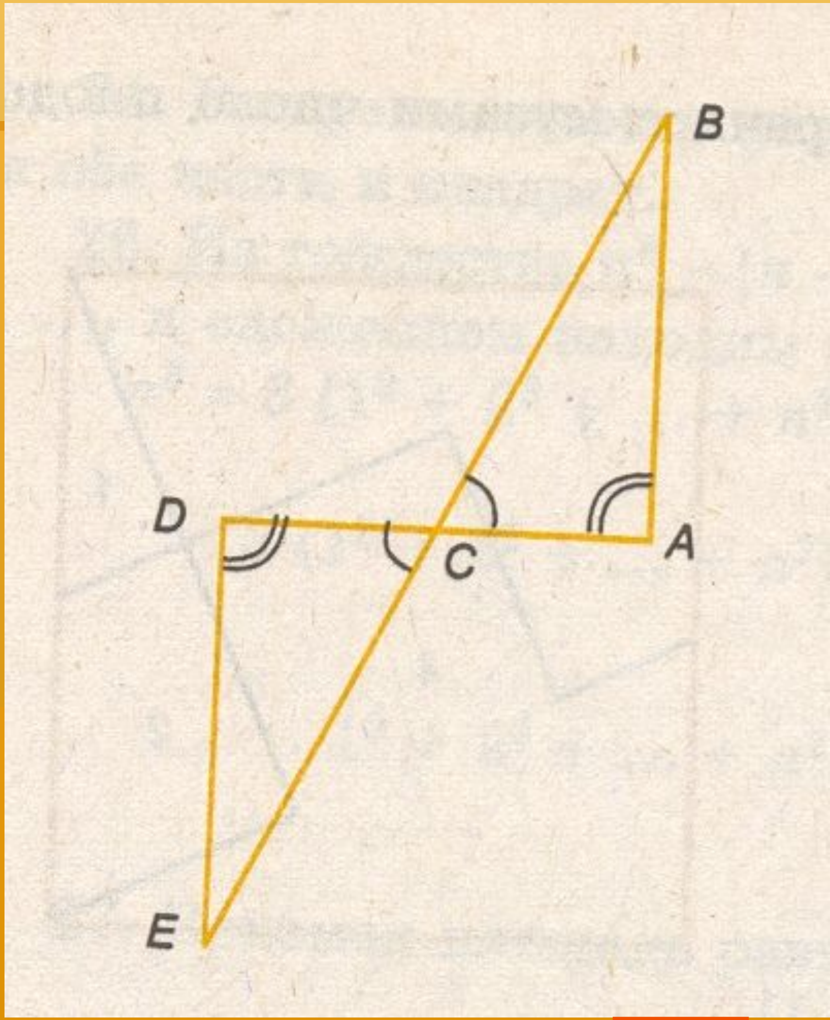
Задача Фалеса

Определить расстояние от берега до корабля на море



Ответ

Для определения расстояния от точки А на берегу (рис.) до недоступной точки В (местонахождение корабля на море) строился треугольник АВС с доступной точкой С на берегу, после чего отрезки АС и ВС продолжались по другую сторону точки С и строился треугольник CDE, такой, что CD=AC, < ACB= < DCE и < СДЕ= < САВ. Тогда по теореме о равенстве двух треугольников, имеющих равными сторону и два угла, получаем AB=DE.



Задача Пифагора

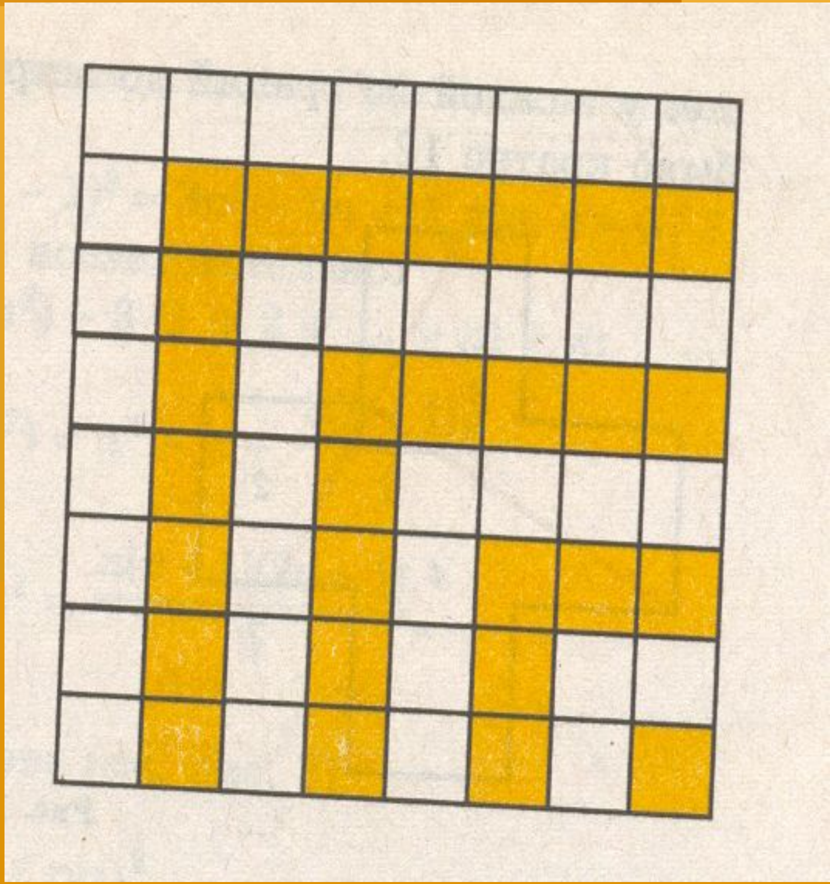
Всякое нечетное число, кроме единицы, есть разность двух квадратов

Пифагор

Ответ

В школе Пифагора эта задача решалась геометрически. Действительно, если от квадрата отнять гномон, т.е. фигуру Г–образной формы (рис.), представляющий нечетное число, то в остатке получится квадрат, т.е. тогда

$$2n+1=(n+1)^2-n^2$$



Задача

о музах

Видя, что плачет Эрот, Киприда его вопрошает: «Что так тебя огорчило, ответствуй немедля!» «Яблок я нес с Геликона немало, - Эрот отвечает, - Музы, отколь ни возьмись, напали на сладкую ношу. Частью двенадцатой вмиг овладела Евтерпа, а Клио пятую долю взяла. Талия – долю восьмую. С частью двадцатой ушла Мельпомена. Четверть взяла Терпихора. С частью седьмою Эрато от меня убежала. Тридцать плодов утащила Полимния. Сотня и двадцать Взяты Уранией; триста плодов унесла Каллиопа. Я возвращаюсь домой почти что с пустыми руками. Только полсотни плодов мне оставили музы на долю».

Сколько яблок нес Эрот до встречи с музами?

Ответ

3360.

Задача о грациях

Три грации имели по одинаковому числу плодов и встретили девять муз. Каждая из граций отдала каждой из муз по одинаковому числу плодов. После этого у каждой из муз и каждой из граций стало по одинаковому числу плодов. Сколько плодов было у каждой из граций до встречи с музами?

Ответ

Пусть у каждой из граций было по x плодов и они отдали каждой из муз по y плодов. Тогда по условию задачи должно быть

$x - 9y = 3y$ или $x = 12y$, т.е. у каждой из граций до встречи с музами число плодов было кратно 12.

Задача Евклида

Нет наибольшего простого числа.

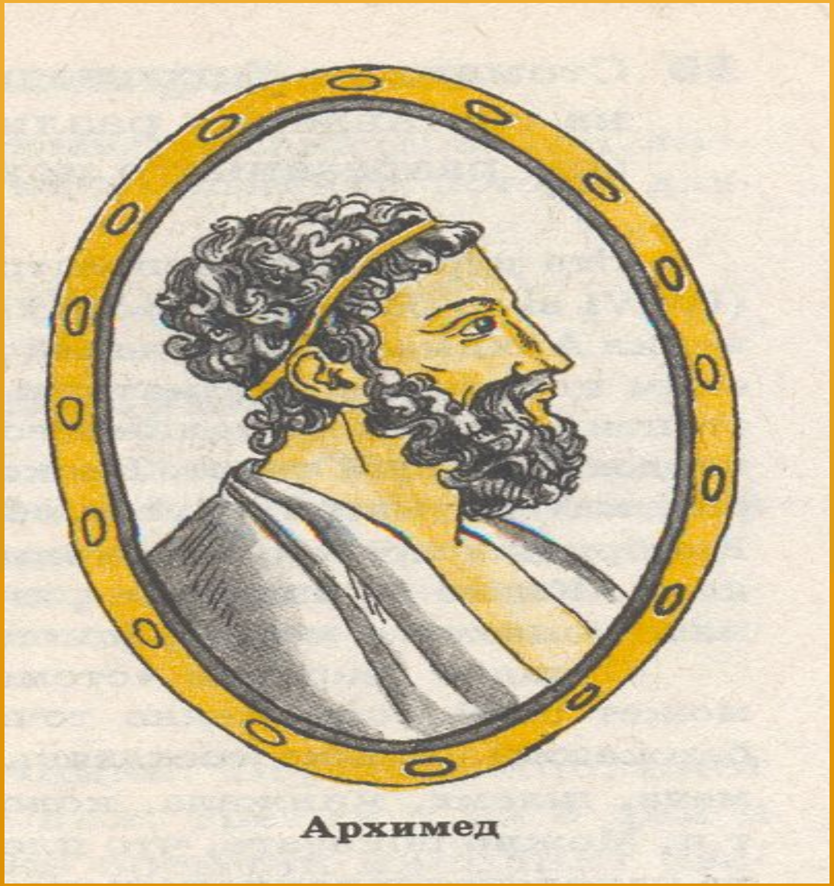
Ответ

Другими словами, Евклид утверждает, что множество простых чисел бесконечно. Этот результат Евклид помещен в IX книге его «Начал» в качестве 20 – й теоремы. Доказательство проводится методом от противного. Предположим, что множество простых чисел конечно и состоит из чисел 2, 3, 5, …, p, где p – самое большое простое число. Рассмотрим натуральное число N = 2* 3 * 5 * … * p + 1. Очевидно, при делении N на все простые числа 2, 3, 5, …, p получается остаток, равный 1. Значит, N > 1 должно делиться на простое число, отличное от 2, 3, 5 …, p. Предположение, что множество простых чисел конечно, привело нас к противоречию, т.е. нет наибольшего простого числа

Задача Архимеда

Найдите сумму квадратов n первых чисел натурального ряда:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$



Ответ

Из тождества $n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$ при n = 1, 2, 3, …, n сложением находим: $n^3 = 3(1^2 + 2^2 + ... + n^2) - 3(1 + 2 + ... + n) + n;$

$$3(1^2 + 2^2 + ... + n^2) = n^3 - n + \frac{3(n+1)n}{2};$$

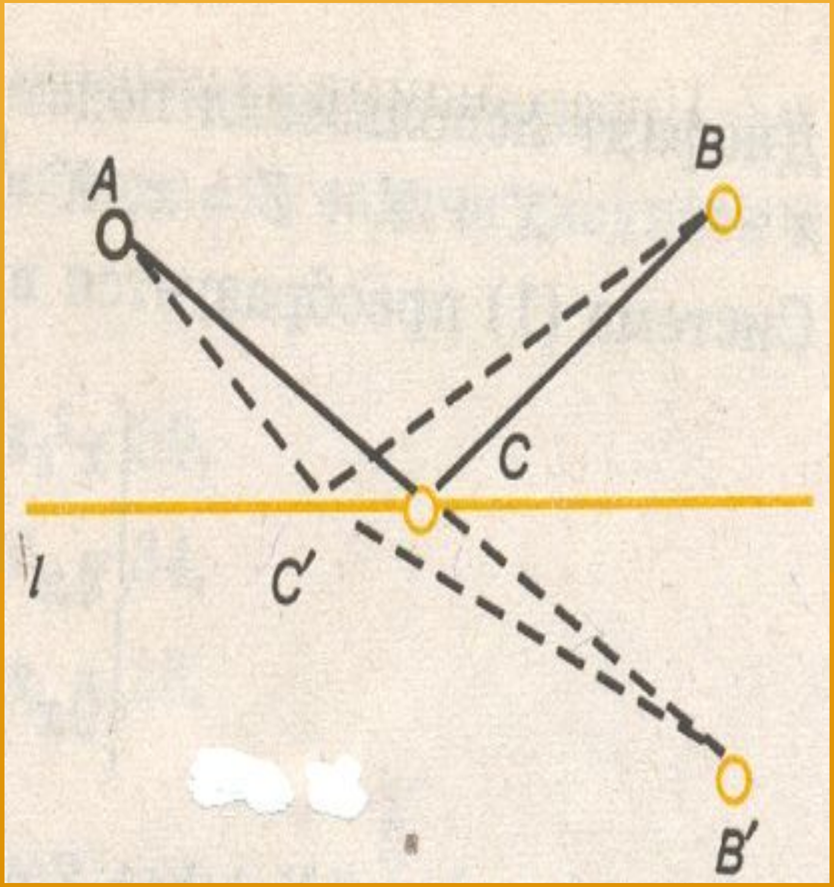
$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Задача Герона Александрийского

Даны две точки А и В по одну сторону от прямой L. Найти на L такую точку С, чтобы сумма расстояний от А до С и от В до С была наименьшей.

Ответ

Пусть В1 – точка, симметричная В относительно прямой L (рис.). Тогда точка С пересечения АВ1 с прямой 1 будет искомой, так как для любой точки С1, отличной от С, будет АС1 + С1В = АС1 + С1В1 > АВ1 = АС = СВ.



Задача из «Математики в девяти книгах»

Из 3 снопов хорошего урожая, 2 снопов среднего урожая и 1 снопа плохого урожая получили 39 доу зерна. Из 2 снопов хорошего урожая, 3 снопов среднего урожая и 1 снопа плохого урожая получили 34 доу зерна. Из 1 снопа хорошего урожая, 2 снопов среднего урожая и 3 снопов плохого урожая получили 26 доу зерна. Спрашивается, сколькозеона получили из каждого снопа хорошего, среднего и плохого урожая.

Ответ

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 39, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 34, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 26. \end{cases}$$

Если через x1, x2, x3 обозначить соответственно хороший, средний и плохой урожай 1 снопа, то задача сводится к решению системы (рис.).

Отсюда $x_1 = 9\frac{1}{4}$ (доу), $x_2 = 4\frac{1}{4}$ (доу), $x_3 = 2\frac{3}{4}$ (доу).

Задача Апастамбы

Найти сумму кубов первых **N** натуральных чисел:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2=\frac{n^2(n+!)^2}{4}$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$$

Ответ

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Задача Ариабхаты

Два лица имеют равные капиталы, причем каждый состоит из известного числа вещей одинаковой ценности и известного числа монет. Но как число вещей, так и суммы денег у каждого различны. Какова ценность вещи?

Ответ

Задача сводится к решению уравнения $ax + b = cx + d$, откуда $x = (d - b)/(a - c)$, где у первого лица будет a вещей и b монет, а у второго лица – c вещей и d монет.

Задача Бхаскары I

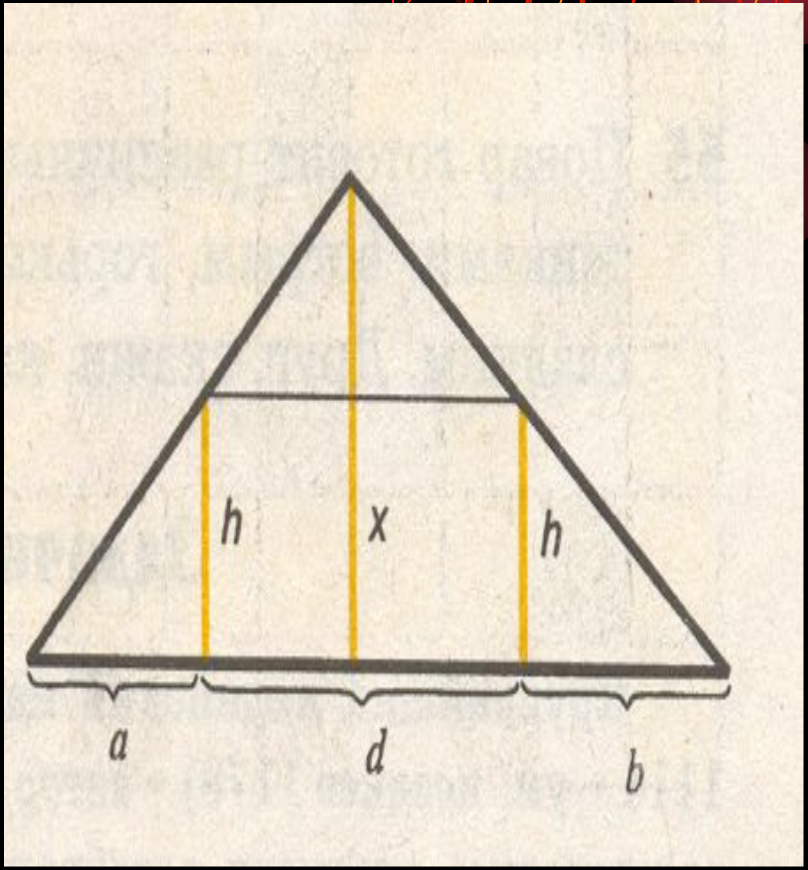
Найти натуральные числа, дающие при делении на **2, 3, 4, 5** и **6** остаток **1** и, кроме того, делящиеся на **7.**

Ответ

Искомые числа x должны удовлетворять соотношениям $x = 60n + 1$, $x = 7a$, где n и a – некоторые натуральные числа. Из $60n + 1 = 7a$ имеем: $a = (60n + 1)/7 = 8n + (4n + 1)/7$. Для натуральных a получаем $n_1 = 5$, $x_1 = 301$; $n_2 = 12$, $x_2 = 721$;...

Задача Брахмагупты

Найти высоту свечи, зная длины теней, отбрасываемых вертикальным шестом в двух различных положениях, и расстояние между ними.



Ответ

Из рисунка имеем: $\frac{1}{2}(a + b + d)\,x = \frac{1}{2}ah + dh + \frac{1}{2}d\,(x - h) + \frac{1}{2}bh$, откуда $x = h\,(1 + d/a + b)$.