Визначений інтеграл і його застосування

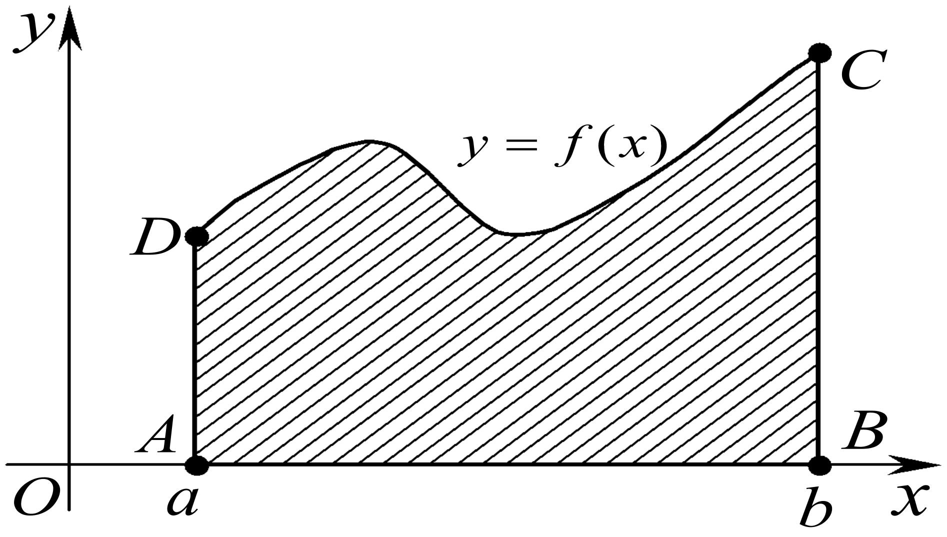
- 1. Визначений інтеграл і його властивості
- 2.Формула Ньютона-Лейбніца
- 3. Невласні інтеграли
- 4. Застосування інтегралів
- **5.** Наближене обчислення визначених інтегралів

Визначений інтеграл і його застосування

Нехай $f(x)$ – неперервна на відрізку $[a;b]$.

Означення. Фігура, що належить площині xOy і обмежена відрізком $[a;b]$ осі Ox, прямими $x=a$, $x=b$ і кривою $y=f(x)$, називається **криволінійною трапецією.**

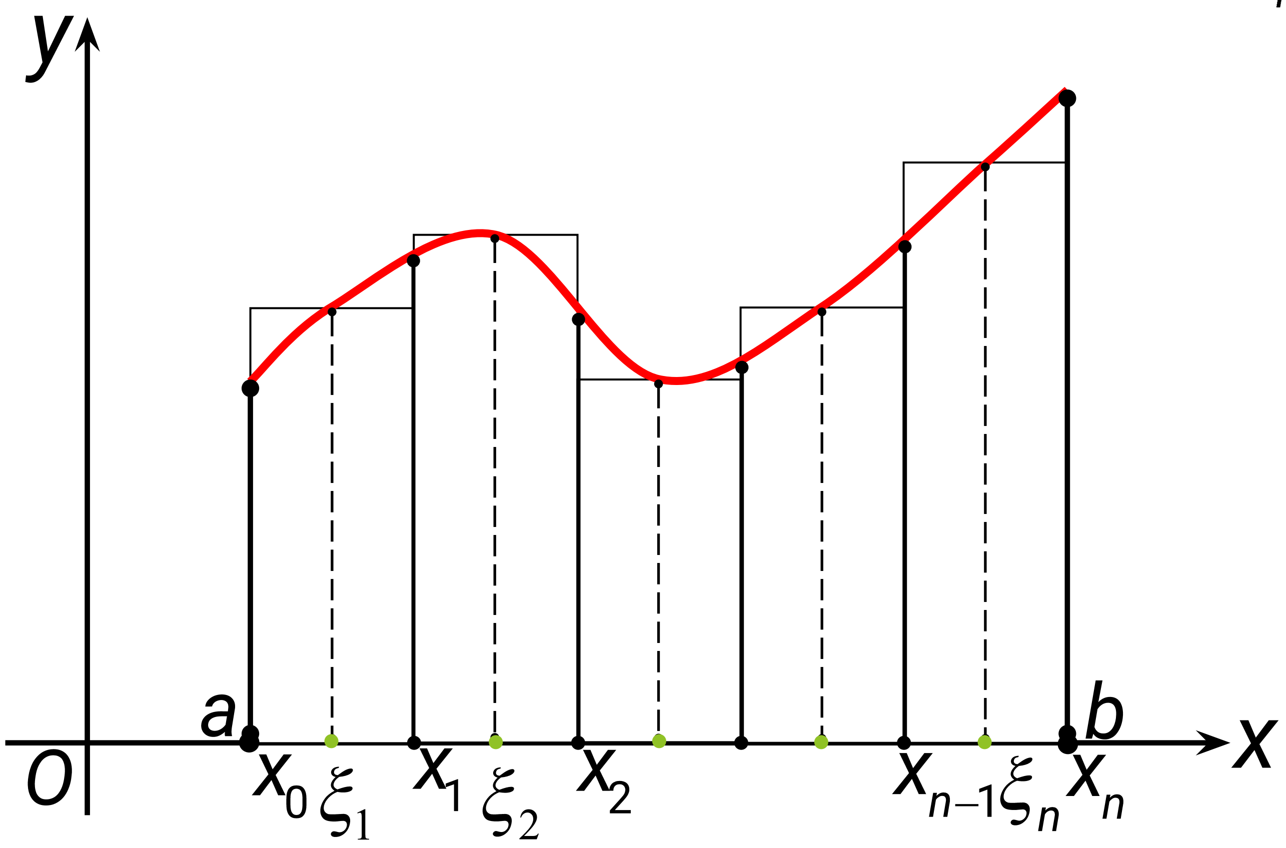
Зауваження. Прямі $x = a$ і $x = b$ можуть виродитись у точки



Визначений інтеграл і його застосування

Нехай $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a;b]$.

Площа S криволінійної трапеції (σ) $\qquad S = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$



Визначений інтеграл і його застосування

$$I_n(x_i,\xi_i)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad \lambda=\max_{1\le i\le n}\left|[x_{i-1};x_i]\right|$$

- інтегральна сума для функції f(x) на відрізку [a;b].

Якщо існує границя сум $I_n(x_i,\xi_i)$ при $\lambda\to 0$, то її називають визначеним **інтегралом від функції** f(x) **на відрізку** [a;b] (або **в межах від a до b**).

ПОЗНАЧАЮТЬ: $$\int_a^b f(x)dx$$

a и b – **нижня** і **верхня границя інтегрування**,
[a;b] – **проміжок інтегрування**,
f(x) – **підінтегральна функція**,
f(x)dx – **підінтегральний вираз**,
x – **змінна інтегрування**.

Визначений інтеграл і його застосування

Функція $f(x)$, для якої на $[a;b]$ існує визначений інтеграл, називається ***інтегрованою*** на цьому відрізку.

ТЕОРЕМА 1 (необхідна умова інтегрованості функції на $[a;b]$).

Якщо функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a;b]$, то вона на цьому відрізку обмежена.

ТЕОРЕМА 2 (достатня умова інтегрованості функції на $[a;b]$).

Для інтегрованості функції $f(x)$ на $[a;b]$, достатньо виконання однієї з умов:

1) $f(x)$ *неперервна на* $[a;b]$;
2) $f(x)$ *обмежена на* $[a;b]$ і має *на* $[a;b]$ скінчене *число точок розриву;*
3) $f(x)$ *монотонна і обмежена на* $[a;b]$.

Визначений інтеграл і його застосування

Зауваження.

1) якщо $a > b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$$

2) якщо $a = b$, то

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Визначений інтеграл і його застосування

1) Геометричний зміст визначеного інтеграла.

Якщо функція $f(x)$ – неперервна на $[a;b]$ і $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = S,$$

де S – площа криволінійної трапеції с основою $[a;b]$ і обмеженою зверху кривою $y = f(x)$.

2) Фізичний зміст визначеного інтеграла.

Якщо функція $v = f(t)$ задає швидкість точки, що рухається в момент часу t , то

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt$$

визначить шлях S, пройдений точкою за проміжок часу $[T_1 ; T_2]$.

Властивості визначеного інтеграла

1) $\int_a^b dx = b - a$.

2) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

3) $\int_a^b \big(f(x) \pm \varphi(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx$

4) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Властивості визначеного інтеграла

- 5) Якщо $f(x) > 0$ $(f(x) \geq 0)$ $\forall x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx > 0 \quad \left(\int_a^b f(x)dx \geq 0\right)$$

- 6) Якщо $f(x) \leq \phi(x)$ $\forall x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$

- 7) Якщо m і M –відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

- 8) Якщо $f(x)$ – непарна функція, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

- Якщо $f(x)$ – парна функція, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$

Теорема про середнє

Якщо функція f(x) неперервна на [a;b], то в інтервалі (a;b) знайдеться така точка c, що справедлива рівність

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(c)$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Формула Ньютона-Лейбница

- Заміна змінної

$$\int_a^b f\;\;x\;\;dx = \int_\alpha^\beta f\;\;g\;\;t\;\;\;g'\;\;t\;\;dt\,.$$

- Інтегрування за частинами

$$\int_a^b u\,dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du\,.$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_1^3 x^3\sqrt{x^2-1}\,dx = \left| \begin{array}{ll} x^2-1=t & \\ 2xdx=dt & \\ \quad x=1 & \quad t=0 \\ \quad x=3 & \quad t=8 \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_0^8 (t+1)\sqrt{t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^8 \left(t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}}\right)dt = \left.\frac{t^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{t^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^8 = \frac{464\sqrt{2}}{15}$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \qquad t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x} = 2\int_0^1 \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{3+2\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int_0^1 \frac{dt}{3+3t^2+2-2t^2} = 2\int_0^1 \frac{dt}{t^2+5} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}\Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_2^4 xe^{2x}dx = \begin{vmatrix} u = x & dv = e^{2x}dx \\ du = dx & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{vmatrix} = \frac{x}{2}e^{2x}\Big|_2^4 - \frac{1}{2}\int_2^4 e^{2x}dx =$$

$$= \frac{x}{2}e^{2x}\Big|_2^4 - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_2^4 = \frac{7}{4}e^8 - \frac{3}{4}e^4$$

Невласні інтеграли

Для існування $\int_a^b f(x)dx$ необхідне виконання умови:

1) $[a;b]$ – скінченний,

2) $f(x)$ – обмежена (необхідна умова існування визначеного інтеграла).

Невласні інтеграли – узагальнене поняття визначеного інтеграла у випадку коли одна з цих умов не виконується.

Невласні інтеграли I роду (за нескінченним проміжком)

ОЗНАЧЕННЯ. ***Невласним інтегралом І роду*** від функції f(x) на проміжку [a;+∞) називається границя функції I(b) при $b \to +\infty$.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} I(b) = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Якщо $y = f(x)$ неперервна на $(-\infty;b]$, то аналогічно визначається і позначається ***Невласним інтегралом І роду*** для функції f(x) **на проміжку (– ∞;b]:**

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Невласні інтеграли І роду

При цьому, якщо границя в правій частині формули існує і скінченний, то невласний інтеграл називають ***збіжним***.

У противному випадку (якщо границя не існує або дорівнює нескінченності) невласний інтеграл називають ***розбіжним***.

Якщо y = f(x) неперервна на $\mathbb{R}$, то ***невласним інтегралом І роду*** для функції f(x) **на проміжку** $(-\infty;+\infty)$ називають

(2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx,$$

де c – довільне число.

Невластный інтеграл від $f(x)$ на промежутку $(-\infty;+\infty)$ називається ***збіжним***, якщо **ОБИДВА** інтеграла в правій частині формули (2) збігаються.

У протилежному випадку, невласний інтеграл на проміжку $(-\infty;+\infty)$ називається ***розбіжним***.

Невласні інтеграли І роду

1. $$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x+x^3}=\lim_{B\to+\infty}\int_1^B\frac{dx}{x(1+x^2)}=\lim_{B\to+\infty}\int_1^B\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx=$$

$$=\lim_{B\to+\infty}\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Bigg|_1^B=\lim_{B\to+\infty}\left(\ln\frac{B}{\sqrt{B^2+1}}-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}\ln 2.$$

2. $$\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x+1)}=\lim_{B\to+\infty}\int_1^B\frac{d(\ln x+1)}{\ln x+1}=\lim_{B\to+\infty}\ln(\ln x+1)\Big|_e^B=$$

$$=\lim_{B\to+\infty}\left(\ln(\ln B+1)-\ln 2\right)=+\infty.$$

Невласні інтеграли І роду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 6x + 10} = \lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} \int_A^B \frac{dx}{(x-3)^2 + 1} = \lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} \operatorname{arctg}(x-3) \Big|_A^B =$$

$$= \lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} (\operatorname{arctg}(B-3) - \operatorname{arctg}(A-3)) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Ознаки збіжності невласних інтегралів I роду

ТЕОРЕМА 1 (перша ознака збіжності).

Нехай $f(x)$ і $\phi(x)$ неперервні на $[a;+\infty)$ і $0 \le f(x) \le \phi(x)$, $\forall x \in [c; +\infty)$ (де $c \ge a$).

Тоді:

1) якщо $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ – збіжний, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ теж збіжний ,

до того ж $$\int_c^{+\infty} f(x)dx \le \int_c^{+\infty} \varphi(x)dx;$$

2) якщо $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ – розбіжний, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ теж розбіжний.

Ознаки збіжності невласних інтегралів I роду

ТЕОРЕМА 2 (друга ознака збіжності)

Нехай f(x) і ϕ(x) неперервні і невід'ємні на [a;+ ∞).

Якщо $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = h,$ де h – дійсне число, відмінне від нуля,

то інтеграли

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad i \qquad \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$$

поводять себе однаково відносно збіжності.

Ознаки збіжності невласних інтегралів I роду

- При використанні теорем 1 и 2 в якості «еталонних» інтегралів зазвичай використовують наступні невласні інтеграли:

$$\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^n} dx \quad - \begin{cases} \text{збігається,} & \text{при } n > 1, \\ \text{розбігається} & \text{при } n \le 1. \end{cases}$$

$$(a > 0)$$

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x} dx \quad - \begin{cases} \text{збігається,} & \text{при } \alpha > 0, \\ \text{розбігається,} & \text{при } \alpha \le 0. \end{cases}$$

Ознаки збіжності невласних інтегралів I роду

ТЕОРЕМА 3 (ознака абсолютної збіжності).

Якщо збігається інтеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то і інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ теж буде *збіжним* сходиться.

При цьому інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ називається **абсолютно збіжним**.

Ознаки збіжності невласних інтегралів I роду

Якщо $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ розбіжний, то про інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ нічого сказати неможна. Він може розбігатися, а може і збігатися.

Якщо $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ розбіжний, *а* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ – збіжний, *то інтеграл*

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *називається* ***умовно збіжним***

Невласні інтеграли ІІ роду (від необмежених функцій)

ОЗНАЧЕННЯ. ***Невласним інтегралом ІІ роду*** на проміжку $[a;b]$ від функції f(x), обмеженої в точці b називається границя функції $I(b_1)$ *при* $b_1 \to b-0$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{b_1 \to b-0} I(b_1) = \lim_{b_1 \to b-0} \int_a^{b_1} f(x)dx$$

Якщо y=f(x) неперервна на (a;b] і $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = +(-)\infty$, то аналогічно визначається і позначається ***невласний інтеграл ІІ роду*** для функції f(x) **на проміжку** $[a;b]$ від функції $f(x)$, ***необмеженої в точці a***

:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{a_1 \to a+0} \int_{a_1}^b f(x)dx.$$

Невласні інтеграли II роду

Якщо $y = f(x)$ неперервна на $[a;b]\backslash\{c\}$ і $x = c$ – точка нескінченного розриву функції, то ***невласний інтеграл II роду*** для функції f(x) **на проміжку** $[a;b]$ називають

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Невласний інтеграл на проміжку $[a;b]$ від функції $f(x)$, необмеженою всередині цього відрізку, називається ***збіжним***, якщо **ОБИДВА** інтеграла в правій частині формули (2) збігаються.

У протилежному випадку, невласний інтеграл на проміжку $[a;b]$ називається ***розбіжним***.

Невласні інтеграли ІІ роду

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^1 \ln x dx\right) = \left[\begin{array}{l|c} u=\ln x & du=\dfrac{1}{x}dx \\ dV=dx & V=x \end{array}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(x\ln x\Big|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 dx\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\Bigg|_\varepsilon^1 - x\Big|_\varepsilon^1\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\ln 1}{1} - \frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} - 1 + \varepsilon\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(0 - \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} - 1 + 0\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon - 1) = 0 - 1 = -1$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin(1-\varepsilon)\right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

Невласні інтеграли ІІ роду

- «Еталонні» інтеграли для невласних інтегралів ІІ роду (від необмежених функцій)

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}dx \qquad - \begin{cases} \text{збігається,} & \text{при } n<1, \\ \text{розбігається} & \text{при } n\geq 1. \end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}dx \qquad - \begin{cases} \text{збігається,} & \text{при } n<1, \\ \text{розбігається} & \text{при } n\geq 1. \end{cases}$$

Довжина дуги кривої

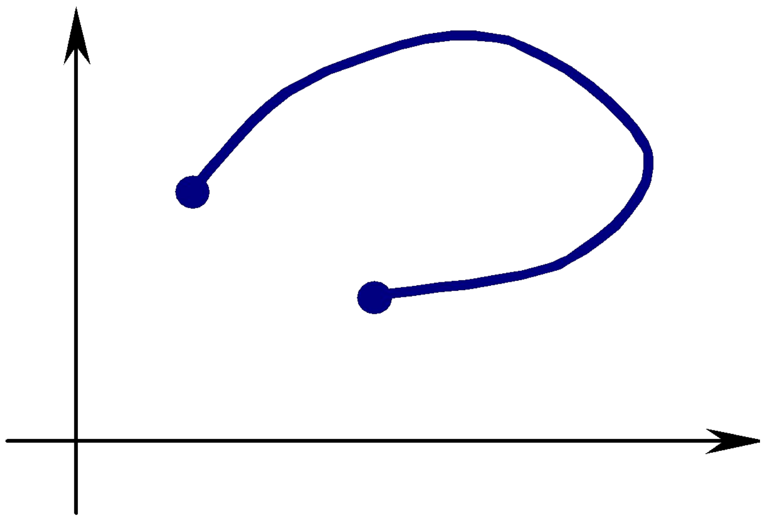
Плоска крива, задана параметрично рівняннями

Нехай крива (ℓ) не має самоперетинів і задана параметричним рівнянням: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta),$

де ϕ(t) , ψ(t) – непрерывно диференційована на [α;β] .

Довжина кривой (ℓ) .

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$



Довжина дуги кривої

Плоска крива в полярних координатах

Нехай $r = r(\phi)$ – неперервно диференційована на $[\alpha;\beta]$.

Довжина кривої

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi .$$

$r = r(\phi)$, де $\phi \in [\alpha;\beta]$.

$x = r \cdot \cos\phi$, $y = r \cdot \sin\phi$

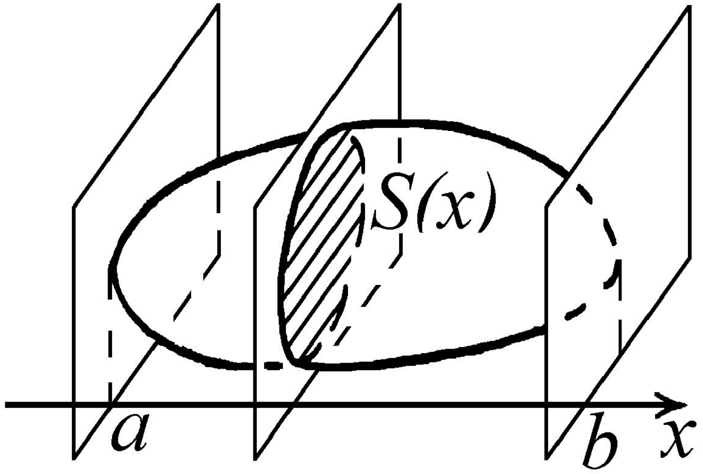
Обчислення об'єму тіла

За площею паралельних перерізів

Нехай (V) – замкнена і обмежена область у $Oxyz$ (тіло).

Нехай $S(x)$ $(a \le x \le b)$ – площа довільного перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox.

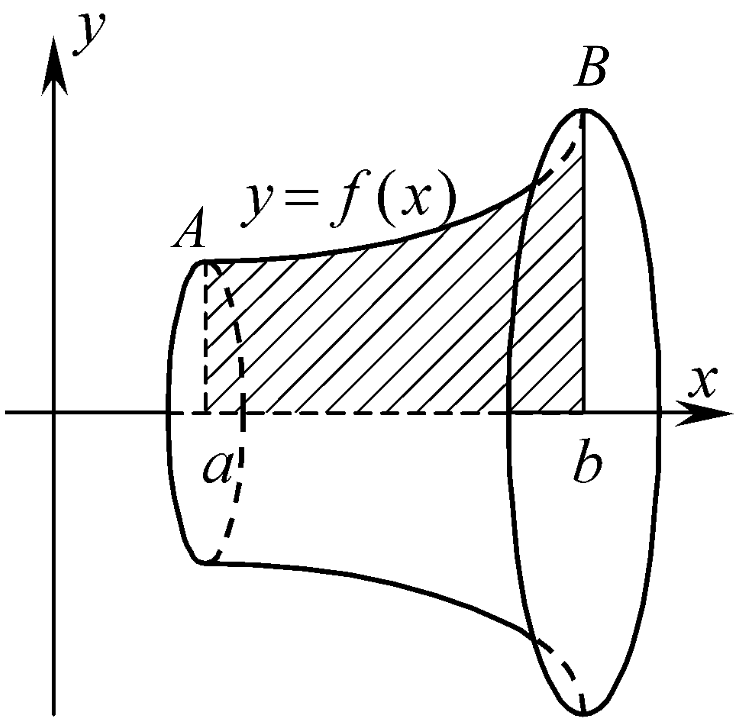
Тоді об'єм тіла (V)



$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

Об'єм тіла обертання

- Нехай (V) – тіло, отримане в результаті обертання навколо осі Ox криволінійної трапеції з основою $[a;b]$, обмеженою $y=f(x)$.
  Об'єм цього тіла (V)



$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

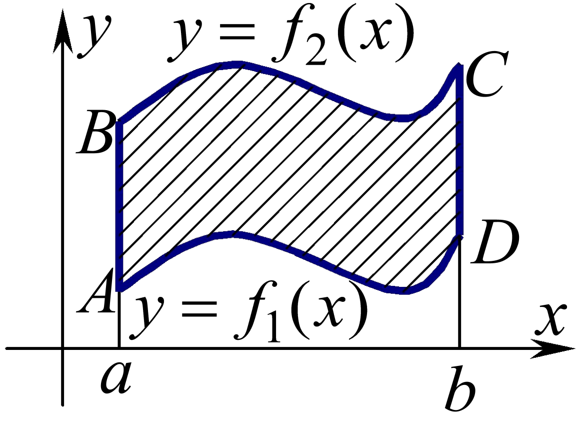
Об'єм тіла обертання

Нехай (V) – тіло, отримане в результаті обертання навколо осі Ox області (σ), обмеженої лініями

$$x = a, \ \ x = b, y = f_1(x), \ \ y = f_2(x),$$

де $0 \le f_1(x) \le f_2(x), \ \ \forall x \in [a;b].$

Об'єм цього тіла (V)



$$V_x = \pi \int_a^b \left([f_2(x)]^2 - [f_1(x)]^2 \right) dx.$$

Наближене обчислення визначених інтегралів

Нехай $y = f(x)$ – неперервна на $[a;b]$ і її первісна не є елементарною.

Необхідно знайти $\int_a^b f(x)dx.$

5.1. Формула прямокутників

Розіб'ємо $[a;b]$ на n рівних відрізків довжини h точками

$$x_0 = a\,,\ x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots\,,\ x_n = b \quad (\text{де } x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n\,).$$

Нехай $y_i = f(x_i)$ $(i = 0,1,2,\ldots,n)$. Складемо суми

$$S_n = y_0h + y_1h + y_2h + \ldots + y_{n-1}h\,,$$

$$\tilde{S}_n = y_1h + y_2h + y_3h + \ldots + y_nh\,,$$

де $h = \dfrac{b-a}{n}$ – довжина відрізків $[x_{i-1}\,;x_i]$ $(i = 1,2,\ldots,n)$.

Наближене обчислення визначених інтегралів

S_n і $\tilde{S}_n$ – інтегральні суми для $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

(1) $$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx S_n = h\cdot\left(y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}\right),$$

(2) $$\int_a^b f(x)dx \approx \tilde{S}_n = h\cdot\left(y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n\right).$$

Нехай R_n – модуль різниці між точними значеннями визначеного інтеграла і його наближеним значенням.

Тоді

$$R_n \le \frac{M_1}{2n}(b-a)^2,$$

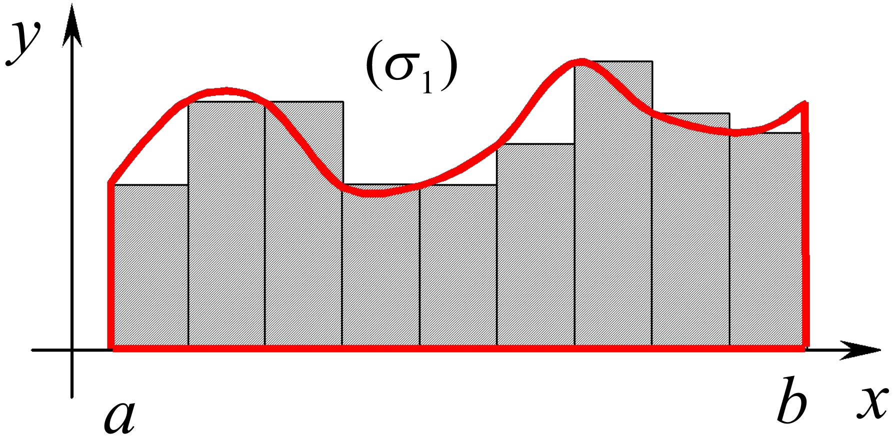
де

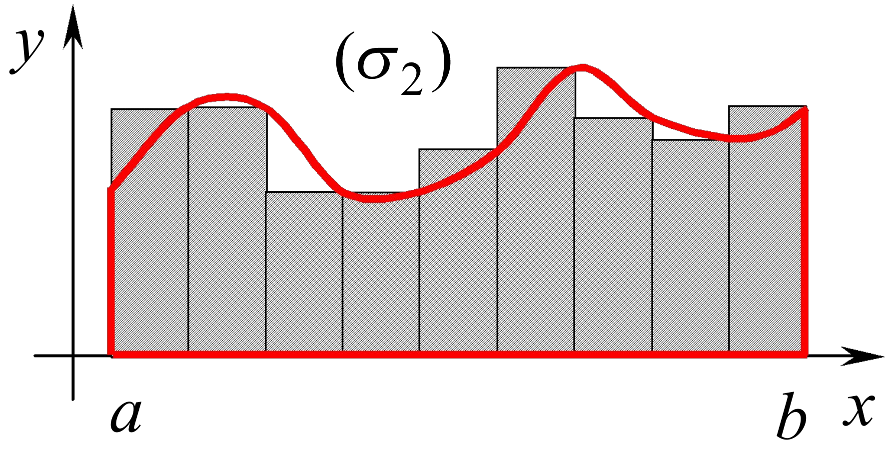
$$M_1 = \max_{[a,b]}\left|f'(x)\right|.$$

Формули (1) и (2) називаються ***формулами прямокутників***

Наближене обчислення визначених інтегралів

Якщо $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a;b]$, то з геометричної точки зору (1) і (2) означає, що площа відповідної криволінійної трапеції заміняється площею області, що складається з прямокутників (області (σ_1) і (σ_2) відповідно).





Наближене обчислення визначених інтегралів

Формула трапеції

Розіб'ємо $[a;b]$ на n рівних відрізків довжини h точками

$$x_0 = a\ ,\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_n = b \quad (\text{де } x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n\ ).$$

Нехай $y_i = f(x_i)$ $(i = 0,1,2,\ldots,n)$.

Тоді

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})\right), \tag{3}$$

де $h = \dfrac{b-a}{n}$ – довжина відрізків $[x_{i-1}\ ;\ x_i]$ $(i = 1,2,\ldots,n)$.

Для формули (3)

$$R_n \le \frac{M_2}{12n^2}(b-a)^3,$$

де

$$M_2 = \max_{[a,b]}\left|f''(x)\right|.$$

Формула (3) називається ***формулою трапеції***.

Якщо $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a;b]$, то з геометричної точки зору (3) означає, що площа відповідної криволінійної трапеції заміняється площею області, що складається з трапецій.