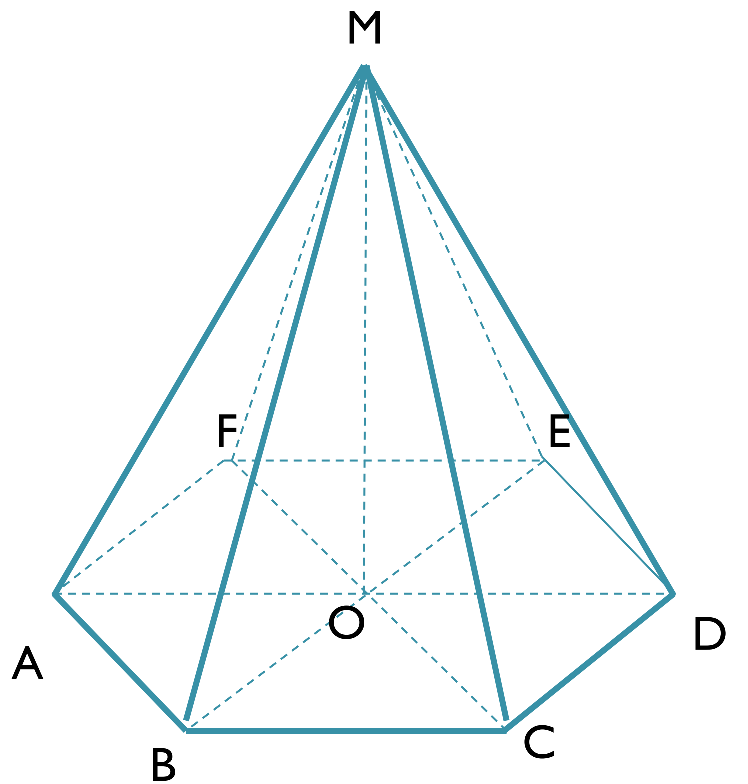
Розвязування задач на властивість пірамід

Визначення. Формули. Задачі.

Визначення



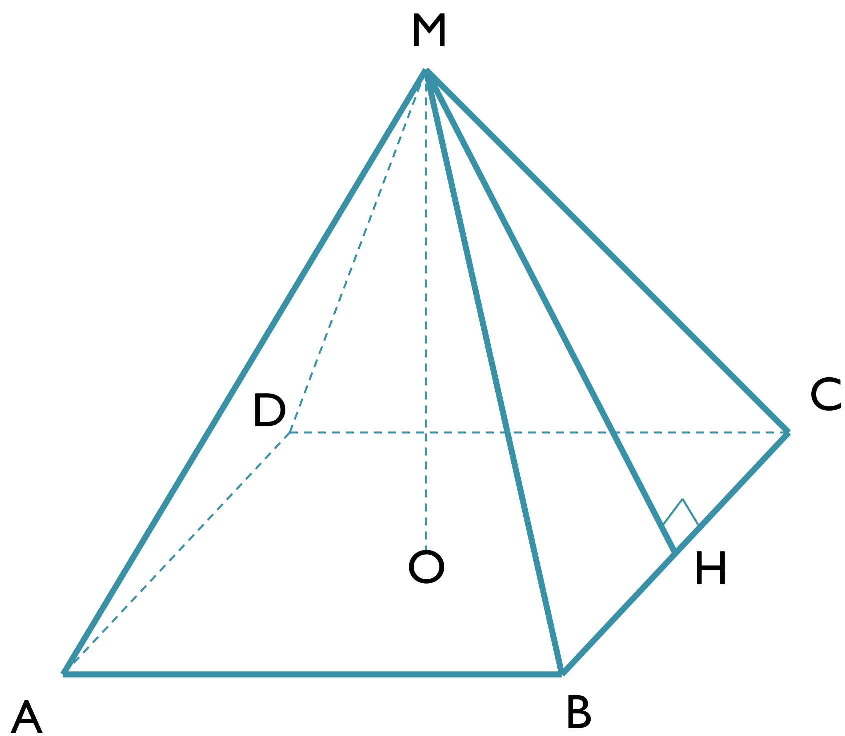
Пірамідою є багатогранник, одна грань якого – вільний многокутник, а інші грані – трикутники, що мають спільну вершину.

З історії означень

Евклід визначає піраміду як тілесну фігуру, обмежену площинами, котрі від однієї площини (основи) збігаються в єдиній точці(вершині).

Герон дає наступне визначення піраміди: це фігура обмежена трикутниками, що збігаються в одній точці, і основою якої є многокутник.

Элементи піраміди



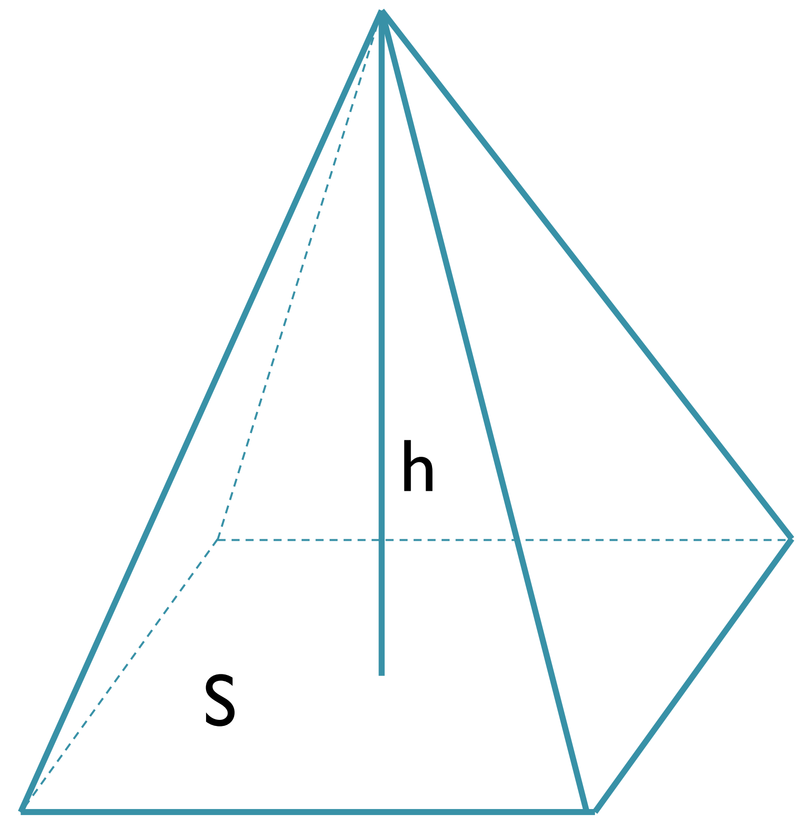
- MO – висота
- MH – апофема
- AM, BM, CM, DM – бічні ребра
- Δ AMD, Δ DMC, Δ CMB, Δ BMA – бічні грані
- ABCD – основа

Формули

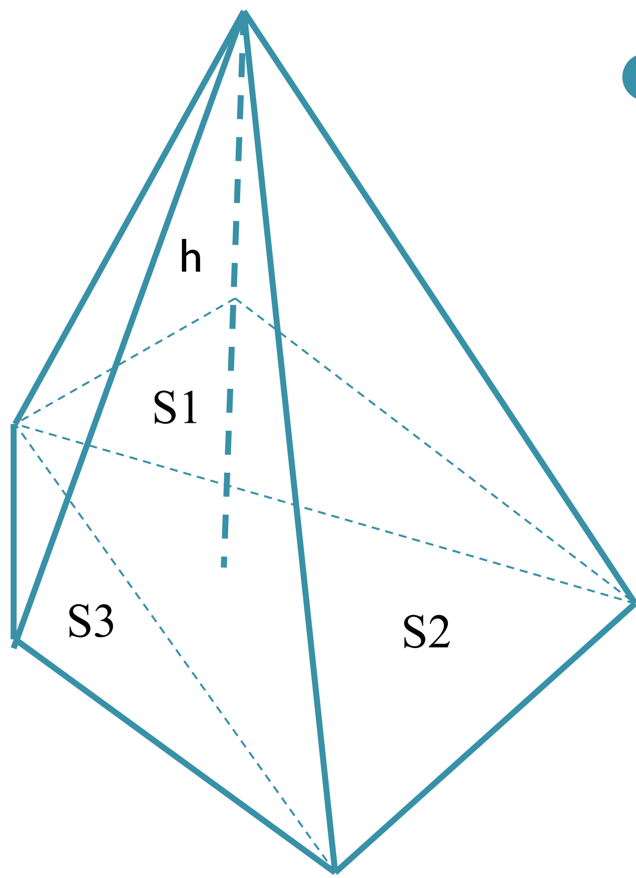
h – висота

S – площа основи

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$$



Довільна піраміда



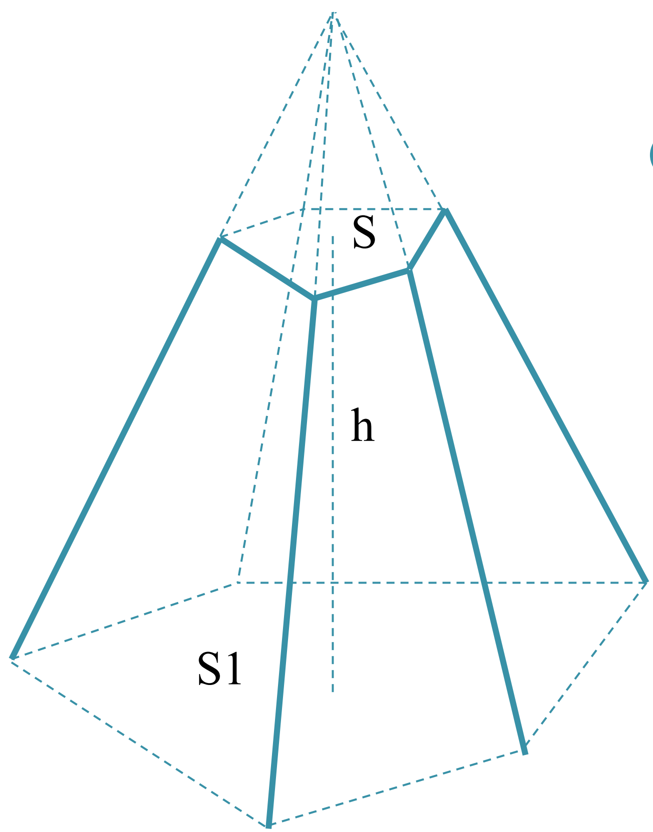
- **Теорема**

Об'єм піраміди дорівнює $\frac{1}{3}$ добутку площі основи на висоту.

$$\mathbf{V = \frac{1}{3}S_1h + \frac{1}{3}S_2h + \frac{1}{3}S_3h =}$$

$$\mathbf{= \frac{1}{3}(S_1+S_2+S_3)h = \frac{1}{3}Sh}$$

Об'єм зрізаної піраміди

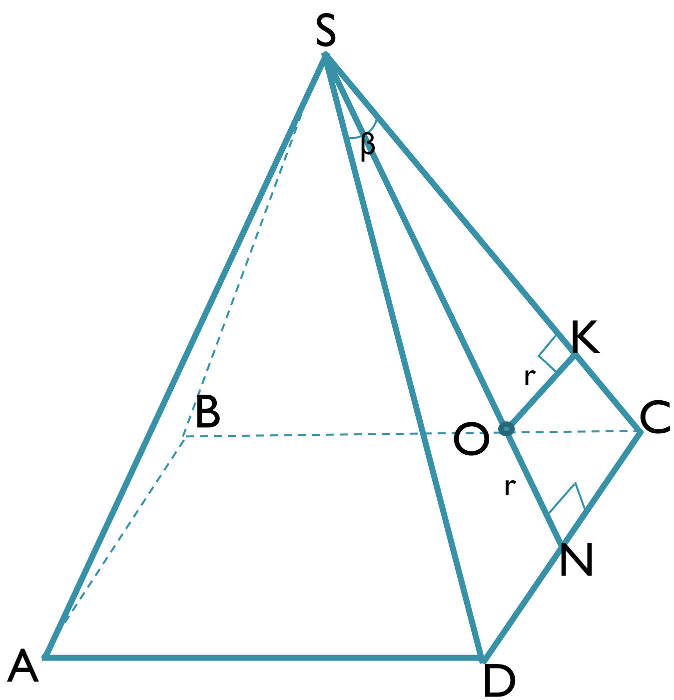


- Об'єм V усіченої піраміди, висота котрої дорівнює h, а площі основ дорівнюють S і S1, обчислюється за формулою

$$\mathbf{V=\frac{1}{3}h\left(S+S_1+\sqrt{S\cdot S_1}\right)}$$

ПІРАМІДИ, В ЯКИХ ЗАДАНО ПЛОСКИЙ КУТ ПРИ ВЕРШИНІ

ЗАДАЧА №1



У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює β. Визначити бічну поверхню піраміди, якщо радіус кола, вписаного в бічну грань, дорівнює r.
Обчислити, якщо r = 6 см, β = 60°.

РОЗВ' ЯЗАННЯ

Нехай SABCD – задана правильна піраміда. Бічними гранями правильної піраміди є рівні між собою рівнобедрені трикутники. За умовою $\angle DSC = \beta$. Проведемо апофему SN грані DSC. Ця апофема є одночасно бісектрисою трикутника DSC, а тому центр O описаного кола лежить на SN. $ON \perp CD$, то ON є радіусом зазначеного кола, $ON = r$.

Нехай k-точка дотику кола до ребра SC. Тоді $OK \perp SC$ і $OK = r$.

З ΔSOK ($\angle K = 90°, \angle S = \frac{\beta}{2}$): $SO = \frac{OK}{\sin\angle S} = \frac{r}{\sin(\frac{\beta}{2})}$. $SN = SO + ON = \frac{r}{\sin(\frac{\beta}{2})} + r =$

$= r \cdot \frac{1+\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$. З ΔSND ($\angle N = 90°$): $DN = SN \cdot tg\angle S = r \cdot \frac{1+\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} \cdot tg(\frac{\beta}{2}) =$

$= r \cdot \frac{1+\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}$. Враховуючи, що $DN = NC$, знаходимо:

$$S_b = 4S_{\Delta DSC} = 4 \cdot \frac{DC \cdot SN}{2} = 4DN \cdot SN = 4r \cdot \frac{1+\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)} \cdot r \cdot \frac{1+\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} = 8r^2 \frac{(1+\sin\left(\frac{\beta}{2}\right))^2}{\sin\beta}.$$

При $r = 6$см, $\beta = 60°$ матимемо: $S_b = 8 \cdot 6^2 \frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 432\sqrt{3}(см^2)$.

***Відповідь*: $8r^2 \frac{(1+\sin\left(\frac{\beta}{2}\right))^2}{\sin\beta}$; $432\sqrt{3}(см^2)$.**

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

№1

Плоский кут при вершині правильної чотирикутної піраміди дорівнює β. Визначити повну поверхню цієї піраміди, якщо сторона основи дорівнює a. Обчислити, якщо $a = 8$см, $\beta = 60°$.

№2

У правильній трикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює φ. Визначити бічну поверхню піраміди, якщо радіус вписаного в бічну грань кола дорівнює r. Обчислити, якщо $r = 6$см, $\varphi = 60°$.

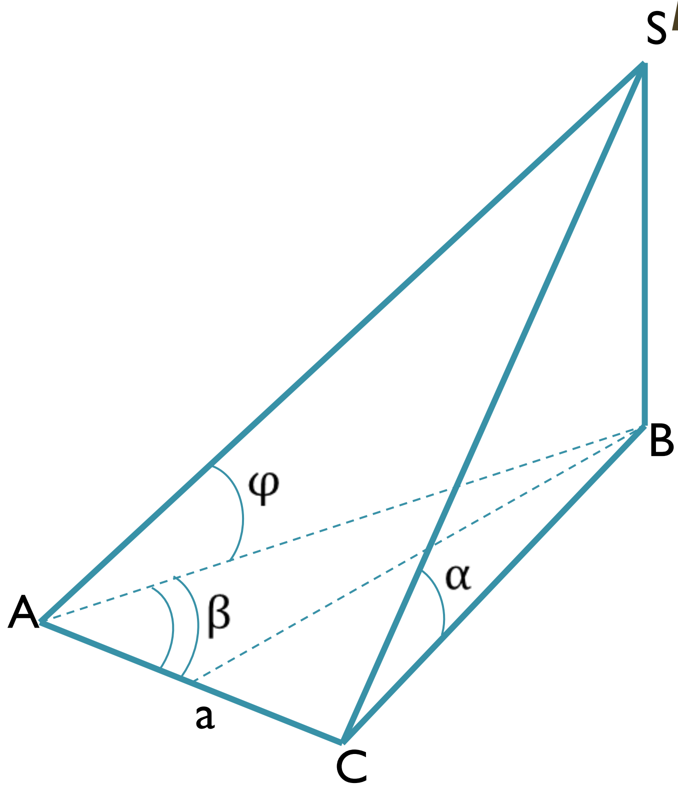
№3

У правильній трикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α. Визначити бічну поверхню піраміди, якщо радіус кола, описаного навколо бічної грані, дорівнює R. Обчислити, якщо $R = 12$ см,

$\alpha = 60°$.

ПІРАМІДИ, В ЯКИХ БІЧНІ ГРАНІ АБО БІЧНЕ РЕБРО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ДО ПЛОЩИНИ ОСНОВИ

ЗАДАЧА №1



В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з основою *a* і кутом β при основі. Одне з бічних ребер перпендикулярно до площини основи, а два інших нахилені до неї під кутом φ. Визначите об'єм піраміди. Обчислити, якщо *a* = 12 см, β = 60°, φ = 65°.

РОЗВ' ЯЗАННЯ

Нехай в основі піраміди SABC лежить трикутник ABC і нехай ребро SB ⊥ до площини основи. Тоді ребра SA і SC нахилені до основи під кутом φ. Оскільки трикутники ASB і CSB рівні (як прямокутні, з рівними гострими кутами і спільним катетом), то AB = BC.
Отже, AC = a – основа рівнобедреного трикутника, ∠C =∠A= β;
∠SAB = ∠SCB = φ.
Об'єм піраміди $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн.}} \cdot H$.

Проведемо в трикутнику ABC висоту BM. Ця висота є медіаною, і тому $AM = \frac{\alpha}{2}$. З трикутника ABM: $AB = \frac{AM}{cos\angle A} = \frac{a}{2cos\beta}$.

Тоді $S_{\text{осн}} = \frac{1}{2}AC \cdot AB \cdot \sin\angle A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2cos\beta} \cdot \sin\beta = \frac{a^2 tg\beta}{4}$.

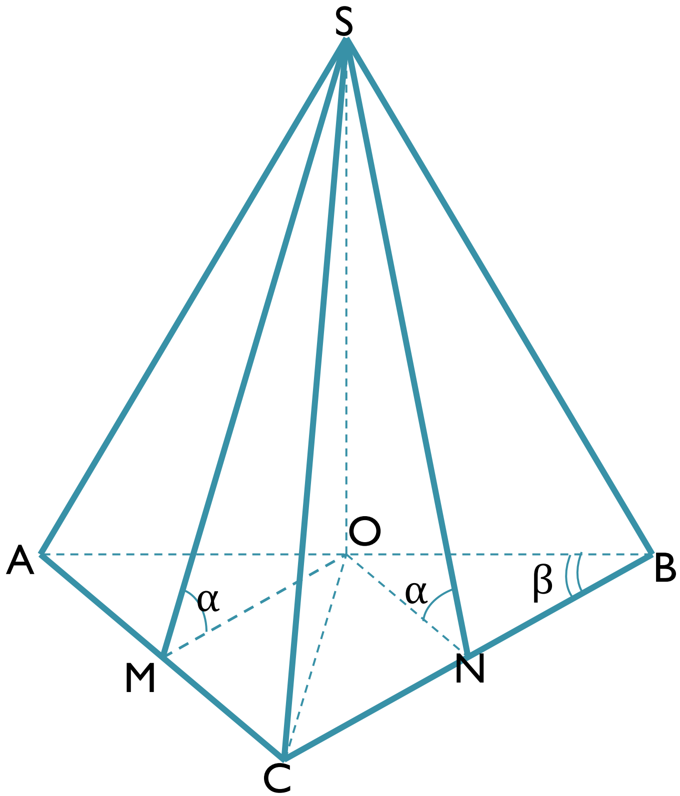
З трикутника ASB ($\angle B = 90°$): $H = SB = AB \cdot tg\varphi = \frac{a \cdot tg\varphi}{2cos\beta}$.

Знаходимо$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 tg\beta}{4} \cdot \frac{a \cdot tg\varphi}{2cos\beta} = \frac{a^3 tg\beta tg\varphi}{24cos\beta}$.

$V = \frac{12^3}{24 \cdot \frac{1}{2}}\sqrt{3} = 144\sqrt{3}(см^3)$

Відповідь: $\frac{a^3 tg\beta tg\varphi}{24cos\beta}$; $144\sqrt{3}(см^3)$.

ЗАДАЧА №2



В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з кутом β і радіусом описаного кола R. Грань піраміди, що містить гіпотенузу , ⊥ до площини основи, а дві інші нахилені до неї під кутом α. Визначити об’єм піраміди. Обчислити, якщо R = 6см, α = 60°, β = 30°.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай в основі піраміди SABC лежить прямокутний трикутник ABC, в якому ∠C= 90°∠B=β. Центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника є середина гіпотенузи. Тому AB=2R. За умовою (ABS)⊥(ABC). Тоді проекція O вершини піраміди на площину основи лежить на прямій AB.

З вершини S проведемо перпендикуляриSM і SN відповідно до сторін AC і BC. Тоді OM⊥AC, ON⊥BC і згідно умови ∠SMO=∠SNO=α.

З ΔABC: BC=AB· cosβ=2R· cosβ.

Тоді $S_{осн} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot 2R \cdot cos\beta \cdot sin\beta = R^2 sin2\beta$.

Висоту піраміди знайдемо з ΔSNO. Для цього визначимо спочатку катет ON.

В чотирикутнику CMON ∠C=∠M=∠N=90° і ON=OM, як катети рівних трикутників MOS і NOS. Тому CMON - квадрат. Тоді ∠MCO=∠NCO=45°, тобто CO- бісектриса ΔABC, звідки: $\frac{AO}{OB} = \frac{AC}{CB} = tg\beta$; $AO = OB \cdot tg\beta$.

Врахувавши, що $AO + OB = AB$, матимемо: OB · tgβ+OB=2R;

OB= $\frac{2R}{1}$ + tgβ. З ΔOBN: ON = OB · sinβ=$\frac{2R \cdot sin\beta}{1+tg\beta} = \frac{Rsin2\beta}{cos\beta+sin\beta}$.

З ΔSNO: $H = SO = ON \cdot tg\alpha = \frac{R \cdot sin2\beta \cdot tg\alpha}{cos\beta + sin\beta}$. Знаходимо об'єм:

$$V = \left(\frac{1}{3}\right) S_{осн.} \cdot H = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot R^2 \cdot sin2\beta \cdot \frac{R \cdot sin2\beta \cdot tg\alpha}{cos\beta + sin\beta} = \frac{sin^2 2\beta \cdot tg\alpha \cdot R^3}{3(cos\beta + sin\beta)}.$$

При R=6см, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$, маємо: $V=54(3-\sqrt{3})$см³.

Відповідь: $\frac{sin^2 2\beta \cdot tg\alpha \cdot R^3}{3(cos\beta+sin\beta)}$; $54(3-\sqrt{3})$см³.

РОЗВ’ЯЖІТЬ

№1

В основі піраміди лежить правильний трикутник з радіусом вписаного кола r. Дві грані піраміди перпендикулярні до площини основи, а третя нахилена до неї під кутом α. Визначити об’єм піраміди. Обчислити, якщо
$r = 6$см, $\alpha = 60°$.

№2

В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині. Одне з бічних ребер перпендикулярне до площини основи, а два інших дорівнюють b і утворюють з основою $\angle\varphi$. Визначити об’єм піраміди. Обчислити якщо $b = 12$ см, $\alpha = 60°$, $\varphi = 45°$.

№3

В основі піраміди лежить правильний трикутник з стороною *a*. Одна грань піраміди перпендикулярна до площини основи, а дві інші нахилені до неї під кутом α . Визначити об’єм цієї піраміди. Обчислити, якщо $a = 6$см,
$\alpha = 60°$.

ПІРАМІДИ, В ЯКИХ БІЧНІ РЕБРА НАХИЛЕНІ ДО ПЛОЩИНИ ОСНОВИ ПІД ОДНИМ І ТИМ ЖЕ КУТОМ

ЗАДАЧА №1

В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при основі і радіусом описаного кола R. Визначити об’ єм піраміди, якщо всі бічні ребра її утворюють з площиною основи $\angle\beta$. Обчислити, якщо R = 12см, α = 60°, β = 45°.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай SABC – задана піраміда, ∠CAB = ∠ACB = α. Проведемо висоту SO піраміди. Тоді OA, OB, OC – проекція бічних ребер на площину основи. За умовою ∠SAO = ∠SBO =∠SCO = β.Прямокутні трикутники SAO, SBO, SCO мають спільний катет SO і рівні гострі кути, а тому рівні між собою.
Тоді OA = OB = OC, тобто точка O є центром кола описаного навколо трикутника ABC. За умовою OA = R.

Об'єм піраміди V = $(\frac{1}{3})\cdot S_{осн}\cdot$ H.

З $\Delta SAO\ (\angle O = 90°): H = SO = R\cdot\ tg\beta$.

З ΔABC За наслідком з теореми синусів знаходимо: $\frac{AB}{\sin\alpha} = 2R$.

AB=2R· sinα.Тоді $S_{осн} = \frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot sin\angle ABC =$

$= \frac{1}{2}(2R\cdot sin\alpha)^2\cdot \sin(180-2\alpha) = 2R^2 sin^2\alpha\cdot sin2\alpha.$

V= $\frac{1}{3}\cdot 2R^2\cdot sin^2\alpha\cdot sin2\alpha\cdot R\cdot tg\beta = \frac{2}{3}R^3\cdot sin^2\alpha\cdot sin2\alpha\cdot tg\beta.$

При R=12см, α = 60°, β = 45°: V=$\frac{2}{3}\cdot 12^3\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1 = 432\sqrt{3}$ (см³).

Відповідь: $\boldsymbol{\frac{2}{3}R^3 sin^2\alpha\cdot sin2\alpha\cdot tg\beta;\ 432\sqrt{3}}$**см³.**

<u>Примітка:</u> **Якщо в деякій піраміді всі бічні ребра рівні між собою або якщо вони утворюють з площиною основи один і той же ∠, то вершина піраміди проектується в центр кола, описаного навколо основи.**

ЗАДАЧА №2

В основі піраміди лежить трикутник з кутами α і β. Всі бічні ребра піраміди дорівнюють l і нахилені до площини основи під кутом φ. Визначити об’єм піраміди. Обчислити, якщо $l = 18$, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$, $\varphi = 45°$.

РОЗВ' ЯЗАННЯ

Нехай SABC – задана піраміда, ∠CAB = α; ∠ABC = β, SA = SB = SC = l.
Проведемо висоту SO Піраміди. За умовою ∠SAO =∠SBO =∠SCO = φ.
Точка O є центром кола, описаного навколо ΔABC, тобто OA = OB = OC.
З ΔSAO:H = SO = l · sinφ; R = OA = l · cosφ. З ΔABC за наслідком з теореми синусів матимемо:

$$\frac{BC}{sin\alpha} = \frac{AC}{sin\beta} = 2R.$$

BC =2l · cosφ · sinα. AC = 2l · cosφ · sinβ. Тоді $S_{осн} = \frac{1}{2} BC \cdot AC \cdot sin\angle ACB$=

$= \frac{1}{2} 2l \cdot \cos\varphi \cdot \sin\alpha \cdot 2l \cdot \cos\varphi \cdot \sin\beta \cdot \sin(180°-(\alpha+\beta))=$

$= 2l^2 \cdot cos^2 \varphi \cdot sin\alpha \cdot sin\beta \cdot \sin(\alpha+\beta)$;

V=$\frac{1}{3} S_{осн} \cdot H = \frac{2}{3} l^3 cos^2\varphi \cdot sin\varphi \cdot sin\alpha \cdot sin\beta \cdot \sin(\alpha+\beta)$.

При $l = 18, \alpha = 60°, \beta = 30°, \varphi = 45°$ маємо $V = 243\sqrt{6}$ см^3.

Відповідь: $\frac{2}{3} \mathbf{l^3 cos^2\varphi \cdot sin\varphi \cdot sin\alpha \cdot sin\beta \cdot sin(\alpha+\beta)}$; $\mathbf{243\sqrt{6}}$ см^3.

РОЗВ’ ЯЖІТЬ

№1

Площа основи правильної трикутної піраміди = S. Визначити об’єм цієї піраміди, якщо її бічне ребро утворює з площиною основи $\angle\alpha$. Обчислити, якщо $S = 36\sqrt{3}$см^2, $\alpha = 45°$.

№2

В основі піраміди лежить трикутник зі стороною *c* і прилеглими кутами α і β. Всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом φ. Визначити об’єм піраміди.

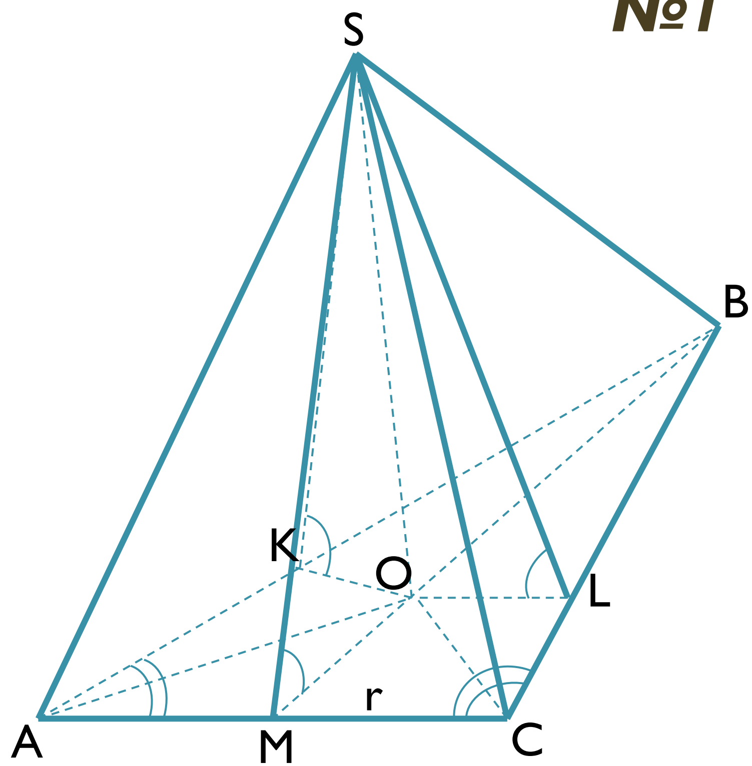
Обчислити, якщо c = 12 см, α = 30°, β = 60°, φ = 45°.

№3

В основі піраміди лежить прямокутник трикутник з гострим кутом β і площею Q. Визначити об’єм піраміди, якщо всі її бічні ребра нахилені до площини основи під кутом α. Обчислити, якщо $Q = 144$см^2, $\alpha = 45°$, β = 60°.

ПІРАМІДИ, В ЯКИХ БІЧНІ ГРАНІ НАХИЛЕНІ ДО ПЛОЩИНИ ОСНОВИ ПІД ОДНИМ І ТИМ ЖЕ КУТОМ

ЗАДАЧА №1



В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом β при основі і радіусом вписаного кола r. Визначити об'єм піраміди, якщо всі бічні грані піраміди утворюють з площиною $\angle\alpha$.

Обчислити, якщо $r = 6$ см, $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$.

РОЗВ' ЯЗАННЯ

Нехай SABC – задана піраміда, ∠CAB = ∠ACB = β. З вершини S проведено висоту SO піраміди та перпендикуляр SK, SL, SM до сторін AB, BC і CA. За теоремою про три перпендикуляри OK ⊥ AB, $OL \perp CB$ і OM ⊥ CA. Тоді кути SKO, SLO, SMO є лінійними кутами двогранних кутів при основі піраміди. За умовою ∠SKO = ∠SLO = α. Трикутники SKO, SLO і SMO – прямокутні, мають спільний катет SO і рівні кострі кути. Тому ΔSKO = ΔSLO = ΔSMO, звідки OK = OL = OM. Точка O рівновіддалена від сторін трикутника ABC, а, значить, є центром кола, вписаного в цей трикутник, причому K, L, M – є точками дотику кола до сторін AB, BC і CA. За умовою OK = OL = OM = r.

Об'єм піраміди V=$\frac{1}{3}S_{осн} \cdot H$. З ΔSMO: H = SO = r · tgα.

Оскільки O, як центр вписаного кола, є точкою перетину бісектрис трикутника ABC, то ∠MAO = ∠NCO =$\frac{\beta}{2}$. Тоді ΔAOM = ΔCOM (за катетом і гострим кутом), звідки AM = MC. Медіана BM рівнобедреного трикутника є одночасно його бісектрисою, а тому O є BM. З ΔMAO(∠M = 90°):

AM = r · ctg$\frac{\beta}{2}$. З ΔABM: BM = AM · tgβ$= r \cdot ctg\,\frac{\beta}{2}$ · tgβ.

Врахувавши, що AC = 2AM, матимемо:

$S_{осн} = \frac{1}{2}AC \cdot BM = AM \cdot BM = r \cdot ctg\,\frac{\beta}{2} \cdot r \cdot ctg\,\frac{\beta}{2} \cdot tg\beta = r^2 \cdot ctg^2\,\frac{\beta}{2} \cdot tg\beta$

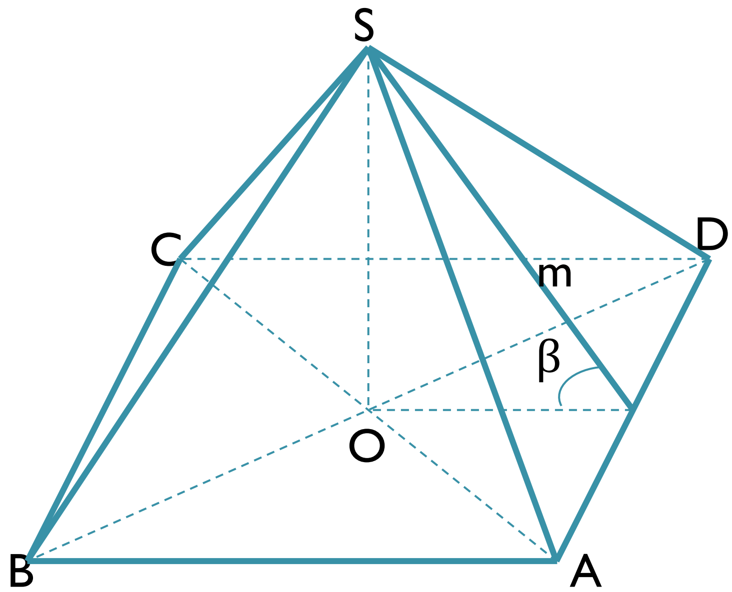
Тоді матимемо $V = \frac{1}{3}r^2 \cdot ctg^2\,\frac{\beta}{2} \cdot tg\beta \cdot r \cdot tg\alpha = \frac{1}{3}r^3 \cdot ctg^2\,\frac{\beta}{2} \cdot tg\beta \cdot tg\alpha$.

При R=6см, α = 45°, β = 60° матимемо: V = $\frac{1}{3} \cdot 6^3 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 = 216\sqrt{3}$ см^3

Відповідь: $\boldsymbol{\frac{1}{3}r^3 ctg^2\frac{\beta}{2} \cdot tg\beta \cdot tg\alpha}$; $\boldsymbol{216\sqrt{3}}$ см^3.

<u>Примітка:</u> Якщо в деякій піраміді всі бічні грані утворюють з площиною основи один і той же ∠, або якщо висоти всіх бічних граней рівні між собою, то вершини піраміди проектуються в центр кола, вписаного в основу.

ЗАДАЧА №2

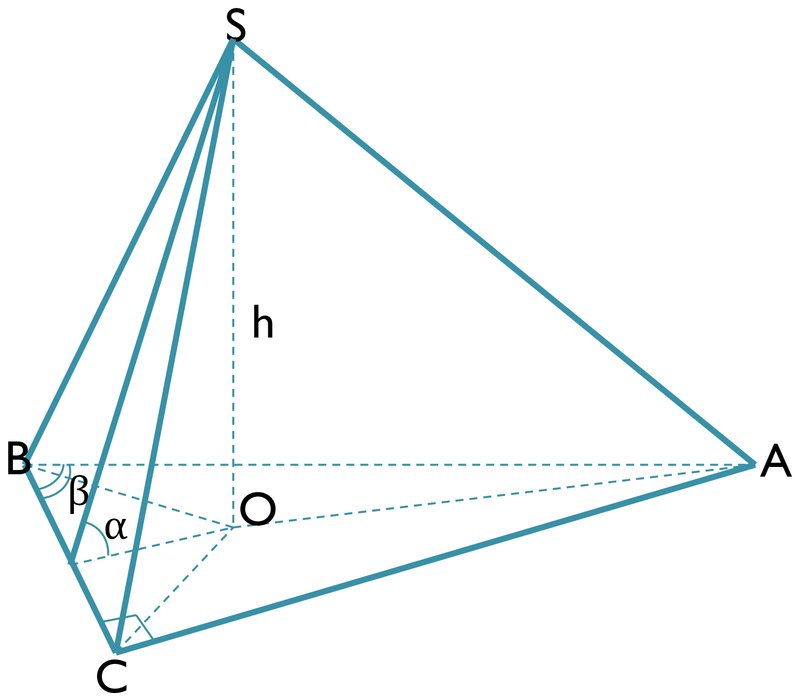


Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює m. Визначити об’єм піраміди, якщо двогранній кут при основі дорівнює β. Обчислити, якщо m = 12 см,
β = 60°.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай SABCD – задана піраміда, SO – її висота, SM – апофема грані SAD, $SM = m$. Оскільки $SM \perp AD$, то $OM \perp AD$, а тому $\angle SMO = \beta$.
З $\Delta SMO(\angle O = 90°)$: $H = SO = m \cdot \sin\beta$; $OM = m \cdot \cos\beta$. OM – середня лінія $\Delta ACD(AO = OC,\ OM \parallel CD)$. Тому $CD = 2OM = 2m \cdot \cos\beta$. Тоді $S_{осн} = CD^2 = 4m^2 \cdot \cos^2\beta; V = \frac{1}{3} \cdot S_{осн} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 4m^2 \cdot \cos^2\beta \cdot m \cdot \sin\beta = \frac{2}{3} m^3 \cdot \cos\beta \cdot \sin 2\beta$.
При $m = 12$ см, $\beta = 60°$маємо: $V = 288\sqrt{3}$ см^3.
Відповідь: $\boldsymbol{\frac{1}{3} \cdot 4m^2 \cdot \cos^2\beta \cdot m \cdot \sin\beta = \frac{2}{3} m^3 \cdot \cos\beta \cdot \sin 2\beta}$; $\mathbf{288\sqrt{3}}$ см^3.

ЗАДАЧА №3



В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з кутом β. Все бічні грані піраміди утворюють з площиною основи ∠α. Визначити бічну поверхню піраміди, якщо її висота дорівнює *h*. Обчислити, якщо *h* = 12 см,

α = 60°, β = 30°.

РОЗВ' ЯЗАННЯ

Нехай SABC – задана піраміда, SO = h – висота, ∠ACB = 90°, ∠ABC = β. Точка O є центром вписаного в ΔABC кола, тобто точкою перетину його бісектрис. Проведемо SM ⊥ BC (M є BC). Тоді OM ⊥ BC і за умовою ∠SMO = α. В ортогональну проекцію ΔSBC на площину основи є ΔOBC . Тому $S_{OBC} = S_{SBC} \cdot cos\alpha$.

Аналогічно $S_{OAB} = S_{SAB} \cdot cos\alpha, S_{OAC} = S_{SAC} \cdot cos\alpha$.

Тоді $S_{\text{осн}} = S_{OAB} + S_{OAC} + S_{OBC} = (S_{SAB} + S_{SAC} + S_{SBC}) \cdot cos\alpha = S_{\text{б}} \cdot cos\alpha$, звідки $S_{\text{Б}} = \frac{S_{\text{осн}}}{cos\alpha}$. Знайдемо $S_{\text{осн}}$. З ΔSOM(∠O = 90°): $OM = h \cdot ctg\alpha$.

З ΔOBM(∠M = 90°, ∠B = $\frac{\beta}{2}$): MB = OM· ctg ($\frac{\beta}{2}$) = h · ctgα · ctg($\frac{\beta}{2}$).

Оскільки в ΔOMC : ∠M = 90°, ∠C = 45°, ∠O = 45°, звідки CM = OM = h· ctgα.

Тоді CB = CM + MB = h· ctgα + h· ctgα · ctg($\frac{\beta}{2}$)= h· ctgα(1+ ctg($\frac{\beta}{2}$)).

З ΔABC: AC = CB · tgβ, тоді $S_{OCH} = \frac{1}{2} AC \cdot CB = \frac{1}{2} CB^2 \cdot tg\beta =$

$= \frac{1}{2} h^2 \cdot ctg^2\,\alpha \cdot tg\beta \left(1 + ctg\,\frac{\beta}{2}\right)^2$ і $S_{\text{б}} = \frac{h^2 \cdot ctg^2\alpha \cdot tg\beta}{2cos\alpha}(1 + ctg\,\frac{\beta}{2})^2$.

При h = 20 см, α = 60°,β= 30°, маємо $S_{\text{б}} = 96(3 + 2\sqrt{3})$ (см^2).

Відповідь: $\boldsymbol{\frac{h^2 \cdot ctg^2\alpha \cdot tg\beta}{2cos\alpha}(1 + ctg\,\frac{\beta}{2})^2}$; $\boldsymbol{S_{\text{б}} = 96(3 + 2\sqrt{3})}$**см^2.**

<u>Примітка:</u>Якщо в деякій піраміді бічні грані утворюють з площиною основи один і той же ∠ φ, то $S_{\text{осн}} = S_{\text{б}} \cdot \cos\varphi$.

РОЗВ’ЯЖІТЬ

№1

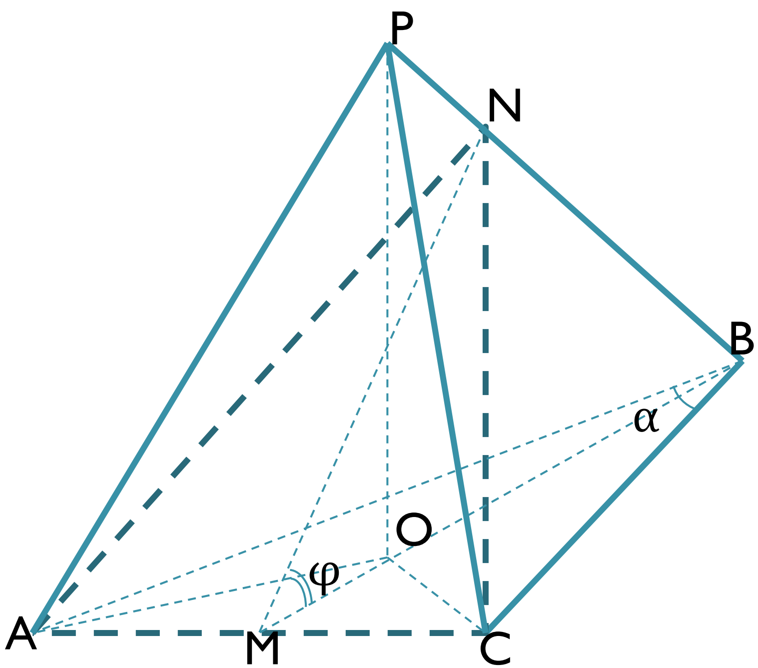
У правильній трикутній піраміди радіус описаного навколо основи кола дорівнює R. Визначити повну поверхню піраміди, якщо двогранний кут при основі дорівнює α. Обчислити, якщо R = 12 см, $\alpha = 60°$.

№2

Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює l. Визначити об’єм піраміди, якщо двогранний кут при основі дорівнює β. Обчислити, якщо $l = 18$ см, $\beta = 60°$.

ПІРАМІДИ ІЗ ЗАДАНИМИ ПЕРЕРІЗАМИ

ЗАДАЧА №1



В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині. Всі бічні ребра рівні. Через основу трикутника проведено переріз перпендикулярно до протилежного бічного ребра, який утворює з площиною основи ∠φ. Визначити висоту піраміди, якщо площа перерізу дорівнює S. Обчислити, якщо $S = 36см^2, \alpha = 60°, \varphi = 30°$.

РОЗВ’ ЯЗАННЯ

Нехай PABC – задана призма, AB = BC, ∠ABC = α. Проведемо висоту PO піраміди. Оскільки похилі PA, PB і PC рівні, то рівні і їх проекції OA, OB, OC. Тому т. O є центром кола, описаного навколо трикутника ABC. Нехай площина проведена через сторону AC перпендикулярна до ребра PB, перетинає це ребро в т. N. Тоді вона перетинає грань PAB і PAC по відрізках AN і CN. Згідно умови $S_{ANC} = S$. Покажемо, що ΔANC − рівнобедрений (AN = NC). ΔPAB = ΔPBC зокрема сторонами (AB = BC, PA = PB = PC). Тоді ∠PBA = ∠PBC. ΔNBA = ΔNBC (NB– спільна, AB = BC і ∠NBA = ∠NBC). Отже, AN = CN. З точки N проведено перпендикуляр NM до сторони AC. Оскільки AN = CN, то AM = MC. Точки M, O і B рівновіддалені від кінців відрізка AC, тому лежить на серединному перпендикулярі до цього відрізка. Отже, O є BM, BM ⊥ AC. ∠NMB є лінійним кутом двогранного кута утвореного площинами ANC і ABC. За умовою ∠NMB = φ.

Висоту H = PO знайдемо з трикутника POB, в якому ∠O = 90°.

∠B = 90°- φ (оскільки PB⊥ANC), то MN⊥PB, звідки ∠PBO = 90°-φ).

Нехай OB = x – радіус описаного кола. За наслідком з теореми синусів з трикутника ABC матимемо: $\frac{AC}{sin\alpha} = 2x; AC = 2x \cdot sin\alpha, MC = x \cdot sin\alpha$.

З ΔBMC (∠B = 90°, ∠B = $\frac{\alpha}{2}$): BM = MC · ctg$\frac{\alpha}{2} = x \cdot sin\alpha \cdot ctg\frac{\alpha}{2}$.

З ΔMNB (∠N = 90°): MN = BN · cosφ = $x \cdot sin\alpha \cdot ctg\frac{\alpha}{2}$ · cosφ.

Тоді $S_{ANC} = \frac{1}{2}AC \cdot MN = MC \cdot MN = x \cdot sin\alpha \cdot x \cdot sin\alpha \cdot ctg\frac{\alpha}{2} \cdot cos\varphi =$

$= x^2 sin^2\alpha \cdot ctg\frac{\alpha}{2} \cdot cos\varphi = S$;

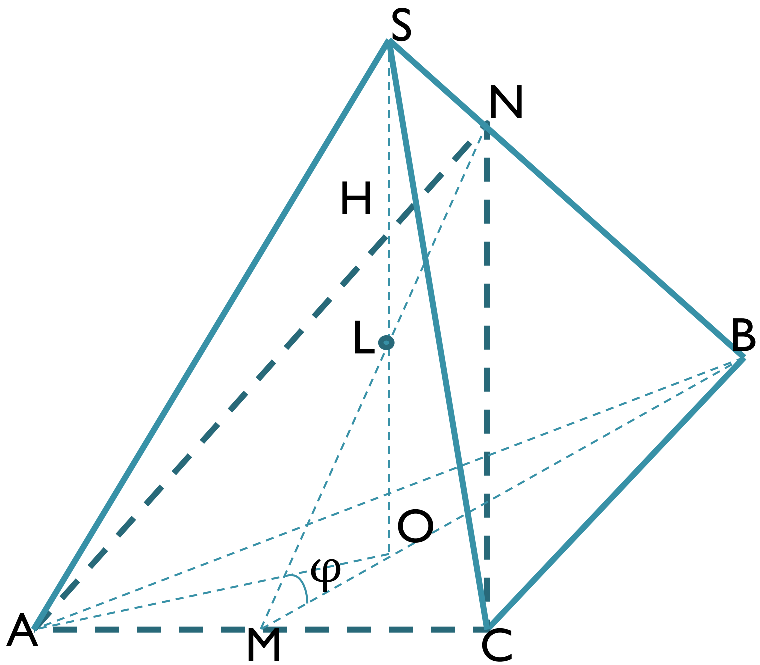
$$X = \sqrt{\frac{S}{cos\varphi \cdot sin^2\alpha \cdot ctg\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{sin\alpha}\sqrt{\frac{S \cdot tg\frac{\alpha}{2}}{cos\varphi}}.$$

З ΔPOB: $H = PO = OB \cdot tg(90° - \varphi) = x \cdot ctg\varphi = \frac{ctg\varphi}{sin\alpha}\sqrt{\frac{S \cdot tg\frac{\alpha}{2}}{cos\varphi}}$

При $S = 36$ см^2, $\alpha = 60°, \varphi = 30°$: $H = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{\frac{36 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}} = 4\sqrt{6}$ см

Відповідь: $\boldsymbol{\frac{ctg\varphi}{sin\alpha}\sqrt{\frac{S \cdot tg\frac{\alpha}{2}}{cos\varphi}}}$; $\mathbf{4\sqrt{6}}$ см

ЗАДАЧА №2



Через сторону основи правильної трикутної піраміди і середину висоти проведено площину, яка утворює з площиною основи ∠φ. Визначити об’єм піраміди, якщо її висота = H. Обчислити, якщо H = 12см, φ = 45°.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай SABC- задана піраміда, SO = H – висота, SL = LO, L Є SO.

Проведемо BM⊥AC (M Є AC). Тоді O є BM. Оскільки OM ⊥AC, то LN ⊥AC, а тому ∠LNO = φ.

З ΔLOM: $OM = LO \cdot ctg\varphi = \frac{1}{2}H \cdot ctg\varphi$. З $\Delta AOM \angle M = 90°, \angle A = 30°$):

$AM = OM \cdot ctg30° = \frac{\sqrt{3}}{2}H \cdot ctg\varphi$.

$AC = 2 \cdot AM = \sqrt{3} \cdot H \cdot ctg\varphi$. Тоді $S_{осн} = \frac{\sqrt{3}}{4}AC^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot H^2 \cdot ctg^2\varphi$;

$V = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4}H^2 \cdot ctg^2\,\varphi \cdot H = \frac{\sqrt{3}}{4}H^3 ctg^2\varphi$.

При H = 12см, φ = 45°

Маємо: $V = 432\sqrt{3}$ (см^3).

Відповідь: $\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}H^3 ctg^2\varphi}$; **$432\sqrt{3}$ см^3.**

РОЗВ’ЯЖІТЬ

№1

У правильній трикутній піраміді через сторони основи проведено площину, перпендикулярну до протилежного бічного ребра. Ця площина утворює з площиною основи ∠φ. Визначити об’єм піраміди, якщо площа перерізу дорівнює S. Обчислити, якщо $S = 36$ см$^2, \varphi = 30°$.

ПІРАМІДИ, В ЯКИХ ЗАДАНА ВІДСТАНЬ ВІД ОСНОВИ ВИСОТИ ДО БІЧНОГО РЕБРА АБО ДО ЙОГО СЕРЕДИНИ

ЗАДАЧА №1

В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при основі. Всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом β. Визначити об'єм піраміди, якщо відстань від основи висоти до бічного ребра дорівнює l. Обчислити, якщо $l = 18$ см, $\alpha = 60°$, $\beta = 60°$.

РОЗВ' ЯЗАННЯ

Нехай SABC – задана піраміда, AB = BC,∠ABC = α. Проведемо висоту SO. Проекціями бічних ребер SA, SB, SC є відповідно відрізки OA, OB, OC. Згідно умови ∠SAO = ∠SBO = ∠SCO = β. Трикутники SAO, SBO, SCO має спільний катет SO і рівні гострі кути. Тому ΔSAO = ΔSBO = ΔSCO.

У рівних прямокутних трикутників висоти, проведені до гіпотенуз, рівні. Це означає, що відстані від точки O до бічних ребер рівні. Проведемо з точки O перпендикуляр ON до ребра SB. За умовою, ON=l.

З ΔONB (∠N = 90°): OB = $\frac{ON}{sin<B} = \frac{1}{sin\beta}$.

З $\Delta SOB\ (\angle O = 90°)$: $H = SO = OB \cdot tg\angle B = \frac{l}{sin\beta} \cdot tg\beta = \frac{l}{cos\beta}$.

Оскільки $OA = OC = OB$, то точка O – є центром кол, описаного навколо ΔABC, а OB є радіусом самого кола. За наслідком з теореми синусів для ΔABC: $\frac{BC}{sin\alpha} = 2OB; BC = 2OB \cdot sin\alpha = \frac{2l \cdot sin\alpha}{sin\beta}$.

Оскільки в ΔABC $AB = BC$ і $\angle B = 180° - \alpha$, то

$$S_{OCH} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin(180° - 2\alpha) = \frac{1}{2} \cdot (\frac{2l sin\alpha}{sin\beta})^2 \cdot sin2\alpha = \frac{2l^2 \cdot sin^2\alpha \cdot sin2\alpha}{sin^2\beta}.$$

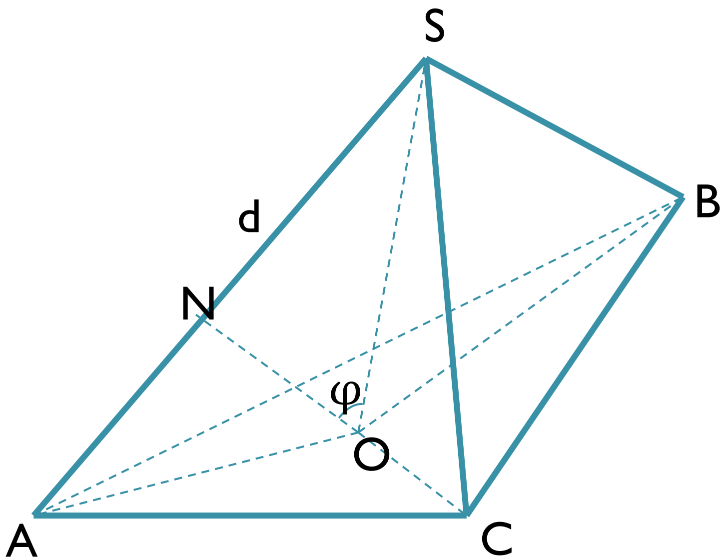
Тоді $V = \frac{1}{3} S_{OCH} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{2l^2 \cdot sin^2\alpha \cdot sin2\alpha}{sin^2\beta} \cdot \frac{l}{cos\beta} = \frac{4l^3 sin^2\alpha \cdot \sin 2\alpha}{3sin\beta \cdot sin2\beta}$.

При $l = 18$ см, $V = \frac{4 \cdot 18^3 \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 3888\sqrt{3}$ см^3.

Відповідь: $\boldsymbol{\frac{4l^3 sin^2\alpha \cdot \sin 2\alpha}{3sin\beta \cdot sin2\beta}}$; $\mathbf{3888\sqrt{3}}$ см^3

Примітка: Якщо в деякій піраміді всі бічні ребра рівні або якщо вони утворюють з площино основи один і той же $\angle$, то відстані від основи висоти піраміди до бічних ребер рівні між собою.

ЗАДАЧА №2



У правильній трикутній піраміді з основи висоти проведено перпендикуляр до бічного ребра, який утворює з висотою $\angle\varphi$. Основа цього перпендикуляра віддалена від вершини на відстань d. Визначити об'єм піраміди.

Обчислити $d = 12$ см, $\varphi = 30°$.

РОЗВ’ ЯЗАННЯ

Нехай SABC - задана піраміда, SO - її висота.

Проведемо $ON \perp SA$ ($N \in SA$) умови $SA = d$, $\angle SON = \varphi$,

З ΔSNO: $H = SO = \frac{d}{sin\varphi}$.

$$З\ \Delta SAO(\angle O = 90°, \angle A = \varphi): OA = SO \cdot ctg\angle A = \frac{dctg\varphi}{sin\varphi}.$$

Оскільки O — центр правильного трикутника, то

$$S_{осн} = 3 \cdot S_{осн} = 3 \cdot \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot sin\angle AOB = \frac{3}{2}\left(\frac{dctg\varphi}{sin\varphi}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}d^2ctg^2\varphi}{4sin^2\varphi}.$$

$$Тоді\ V = \frac{1}{3} \cdot S_{осн} \cdot H = \frac{1}{3} \frac{3\sqrt{3}d^2 \cdot ctg^2\,\varphi}{4sin^2\varphi} \cdot \frac{d}{sin\varphi} = \frac{\sqrt{3}d^3 \cdot ctg^2\,\varphi}{4sin^3\varphi}.$$

При d=12см, φ= 30° маємо: $V = 10368\sqrt{3}$ см^3

Відповідь: $\frac{\sqrt{3}d^3 \cdot ctg^2\varphi}{4sin^3\varphi}$; $\mathbf{10368\sqrt{3}}$ см^3

РОЗВ’ ЯЖІТЬ

№1

У правильній трикутній піраміді бічне ребро утворює з площиною основи $\angle\alpha$. Визначити об’єм піраміди, якщо відстань від основи висоти до її бічного ребра дорівнює l. Обчислити, якщо $l = 12$см, $\alpha = 60°$.

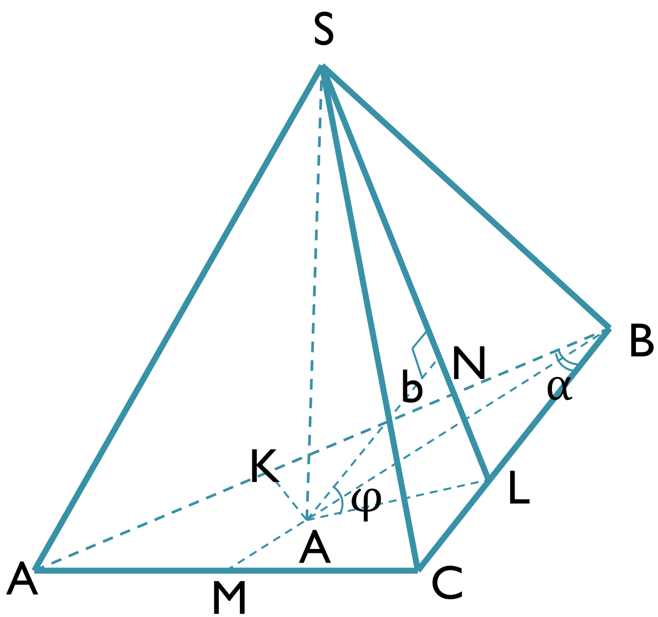
№2

У правильній трикутній піраміді з основи висоти проведено перпендикуляр до бічного ребра, який утворює з площиною $\angle\varphi$. Довжина цього перпендикуляра дорівнює a. Визначити об’єм піраміди. Обчислити, якщо $a = 18$см, і $\varphi = 30°$.

№3

В основі піраміди лежить прямокутник з кутом α між діагоналями. Всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом β. Визначити об’єм піраміди, якщо відстань від основи висоти до бічного ребра дорівнює a. Обчислити, якщо $a = 12$см, $\alpha = 60°$, $\beta = 60°$.

ПІРАМІДИ, В ЯКИХ ЗАДАНО ВІДСТАНЬ ВІД ОСНОВИ ВИСОТИ ДО БІЧНОЇ ГРАНІ
ЗАДАЧА №1



В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині. Всі бічні грані піраміди однаково нахилені до площини основи. Перпендикуляр, проведений з основи до бічної грані, дорівнює b і утворює з площиною основи ∠φ. Визначити об'єм піраміди. Обчислити, якщо b = 12см, α = 60°, β = 60°.

РОЗВ’ ЯЗАННЯ

Нехай в основі піраміди SABC лежить трикутник ABC, в якому $AB = BC$ і $\angle B = \alpha$. Проведемо з вершини S перпендикуляри SK, SL і SM відповідно до сторін AB, BC і CA ті висоту SO. За теоремою про три перпендикуляри $OK \perp AB$, $OL \perp BC$, $OM \perp CA$. Отже, кути SKO, SLO, SMO є лінійними кутами двогранних кутів при основі піраміди. За умовою $\angle SKO = \angle SLO = \angle SMO$. Прямокутні трикутники SKO, SLO, SMO мають спільник катет SO і рівні гострі кути. Тому $\Delta SKO = \Delta SLO = \Delta SMO$. З точки O проведемо перпендикуляр ONдо грані SBC. Оскільки $SL \perp BC$ і $OL \perp BC$, то $(SLO) \perp BC$. Площина SBC містить пряму BC, а тому $(SLO) \perp (SBC)$, звідки випливає, що перпендикуляр OM лежить у площині SLO і N належить SL. Отже, перпендикуляр ON для ΔSNO є висотою, проведеною до гіпотенузи. Аналогічне твердження справедливо для перпендикулярів, проведених з точки O до граней SAB і SAC. З рівностей трикутників SKO, SLO, SNO випливає, що перпендикуляри, проведені з точки O до бічних граней рівні між собою. За умовою $ON = b$. Оскільки $SO \perp ABC$, то $(SLO) \perp (ABC)$, а тому проекцією прямої ON на площину основи є пряма OL.
За умовою $\angle NOL = \varphi$.

Об’єм піраміди V = $\frac{1}{3}S_{OCH}H$.З трикутника ONS (∠N = 90°, ∠O = (90° - φ):

H = SO = $\frac{b}{\cos(90°-\varphi)} = \frac{b}{\sin\varphi}$ З ΔNOL(∠ N = 90°): OL = $\frac{b}{\cos\varphi}$.

Оскільки ОК = OL = OM іOK⊥AB, OL⊥BC, OM⊥CA, то точка О є центром кола, вписаного в трикутник АВС. Покажемо, що О ϵ ВМ. Раніше будо доведено, що ОМ⊥АС. Оскільки ВО⊥АС, як бісектриса кута при вершині рівнобедреного трикутника, то прямі ОМ і ОВ перпендикулярні до однієї прямої АС, а тому співпадають.

Отже, ОϵВН. З трикутника OLB (∠L = 90°,∠B = $\frac{\alpha}{2}$); BO = $\frac{OL}{\sin(\frac{\alpha}{2})} =$

$= \frac{b}{\cos\varphi\cdot\sin(\frac{\alpha}{2})}$. Тоді ВМ = ВО + ОМ =$\frac{b}{\cos\varphi\cdot\sin(\frac{\alpha}{2})} + \frac{b}{cos\varphi} = \frac{b(1+\sin(\frac{\alpha}{2}))}{\cos\varphi\cdot\sin(\frac{\alpha}{2})}$.

З трикутника ВМС(∠М = 90°):

MC = BM · tg · $\frac{\alpha}{2} = \frac{b(1+sin\frac{\alpha}{2})}{cos\varphi\cdot sin\frac{\alpha}{2}}\cdot tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{b(1+sin\frac{\alpha}{2})}{cos\varphi\cdot cos\frac{\alpha}{2}}$. Оскільки $AM = MC,$ то

$S_{OCH} = \frac{1}{2}\cdot$ AC · BM = MC · BM = $\frac{b(1+sin\frac{\alpha}{2})}{cos\varphi\cdot sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{b(1+sin\frac{\alpha}{2})}{cos\varphi\cdot cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2b^2(1+sin\frac{\alpha}{2})^2}{cos\varphi^2\cdot sin\alpha}$.

V = $\frac{1}{3}\cdot\frac{2b^2(1+sin\frac{\alpha}{2})^2}{cos\varphi^2\cdot sin\alpha}\cdot\frac{b}{sin\varphi} = \frac{2b^3(1+sin\frac{\alpha}{2})^2}{3cos\varphi^2\cdot sin\varphi\cdot sin\alpha}$. При b = 12 см, α = φ = 60°:

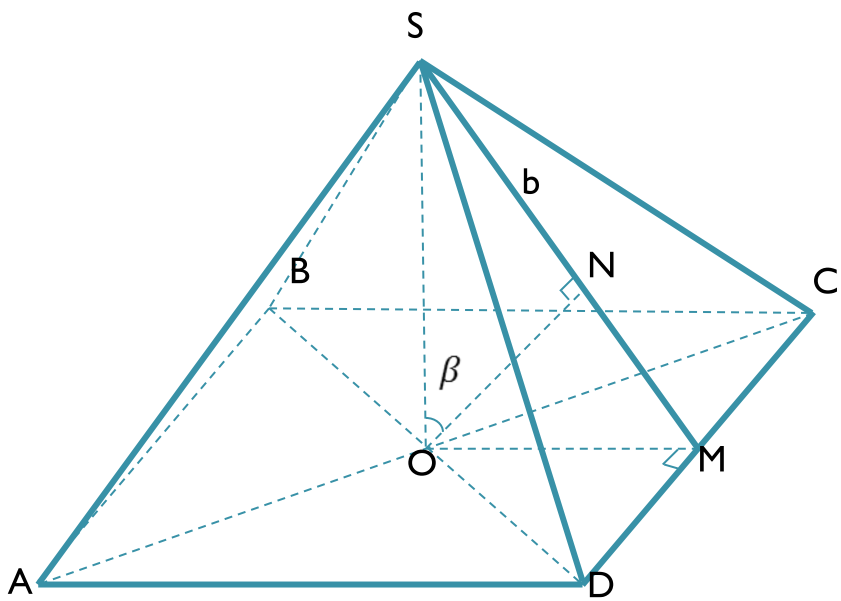
V = $\frac{2\cdot 12^3(1+\frac{1}{2})^2}{3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = 13824\ (см^3)$

Відповідь: $\mathbf{\frac{2b^3(1+sin\frac{\alpha}{2})^2}{3cos\varphi^2\cdot sin\varphi\cdot sin\alpha}}$; **13824** см$^{\mathbf{3}}$**.**

<u>Примітка 1</u>: **Якщо з основи висоти піраміди опустити перпендикуляр до бічної грані, то основа цього перпендикуляра лежить на висоті даної грані, проведеній з вершини піраміди. Кут між перпендикуляром і площиною основи дорівнює куту між перпендикуляром і проекцією зазначеної висоти на площину основи.**

<u>Примітка 2</u>: **Якщо бічні грані піраміди утворюють з площиною основи один і той же кут, то перпендикуляри, проведені з основи висоти піраміди до бічних граней, рівні між собою і утворюють однакові кути з площиною основи.**

ЗАДАЧА
№2



У правильні чотирикутній піраміді перпендикуляр, проведений з основи висоті до бічної грані, утворює з висотою кутβ. Основа цього перпендикуляра віддалена від вершини піраміди на відстань b. Визначити бічну поверхню піраміди.

Обчислити, якщо b=12см, $\beta = 45°$.

РОЗВ' ЯЗАННЯ

Нехай SABCD – задана піраміда, SO – висота. Проведемо з вершини S перпендикуляр SM до сторони CD, а з точки O – перпендикуляр ON до грані SCD. Тоді N Є SM.

За умовою SN = b, ∠SON = β. Прямокутні трикутники SNO і SOM мають спільний гострий ∠S, а тому ∠SMO = β. Тоді $S_б = \frac{S_{осн}}{cos\beta}$.

З ΔSNO: $SO = \dfrac{b}{sin\beta}$. З ΔSMO: $OM = SO \cdot ctg\beta \dfrac{b \cdot ctg\beta}{sin\beta}$.

Оскільки $ABCD$ − квадрат, то $AD = 2 \cdot OM = \frac{2b \cdot ctg\beta}{sin\beta}$.

Тоді: $S_{осн} = AD^2 = \frac{4b^2 ctg^2\beta}{sin^2\beta}$; $S_б = \frac{S_{осн}}{cos\beta} = \frac{4b^2 ctg\beta}{sin^3\beta}$;

При b=12см, $\beta = 45°$ маємо: $S_б = 1152\sqrt{2}$ см^2.

Відповідь: $\mathbf{\dfrac{4b^2 ctg\beta}{sin^3\beta}}$; $\mathbf{1152\sqrt{2}}$ см^2.

РОЗВ'ЯЖІТЬ

№1

В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом β при основі. Всі бічні грані піраміди однаково нахилені до площини основи. Перпендикуляр, проведений з основи висоти до бічної грані, утворює з висотою $\angle\varphi$. Основа перпендикуляра віддалена від вершини піраміди на відстань a. Обчислити, якщо $a = 12$ см, $\beta = 60°$, $\varphi = 60°$.

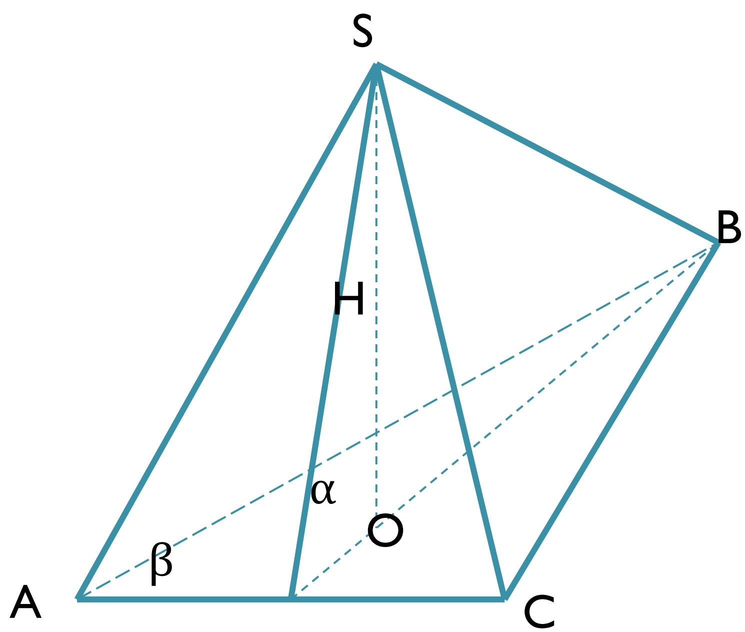
№2

В основі піраміди лежить ромб з гострим кутом α. Точка перетину діагоналей ромба є основою висоти, з якої до бічної грані проведено перпендикуляр, який утворює з площиною $\angle\varphi$. Визначити бічну поверхню піраміди, якщо довжина цього перпендикуляра дорівнює а. Обчислити, якщо $a = 12$ см, $\alpha = 60°$, $\varphi = 30°$.

№3

В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з кутом β. Основою висоти піраміди є вершина іншого гострого кута трикутника, з якої проведено перпендикуляр до протилежної бічної грані. Цей перпендикуляр утворює висотою піраміди $\angle\varphi$, а його основа віддалена від вершини піраміди на відстань b. Визначити об'єм піраміди. Обчислити, якщо $b = 12$ см, $\alpha = 60°$, $\varphi = 30°$.

ЗАДАЧА №3



В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом β при основі. Основою висоти є точка перетину медіан. Бічна грань, що містить основу цього трикутника, утворює з площиною основи піраміди ∠α. Визначити об’єм піраміди, якщо її висота дорівнює Н.
Обчислити, якщо Н = 12 см, $\alpha = 60°$, $\beta = 60°$.

РОЗВ’ ЯЗАННЯ

Нехай SABC – задана піраміда. AB = BC, ∠BAC = β, O – точка перетину медіан трикутника ABC, SO ⊥(ABC), SO = H. Проведемо медіану BN. Для трикутника ABC вона є висотою. Оскільки ON⊥AC, то за теоремою про три перпендикуляри SN⊥AC. Тому ∠SNO є лінійним кутом двогранного кута з ребром AC. За умовою ∠SNO = α.

Об’єм піраміди: $V = \frac{1}{3} \cdot S_{OCH} \cdot H$.

З ΔSON(∠O = 90°): ON = H · ctgα. Оскільки O – точка перетину медіан, то BN = 3ON = 3H · ctgα. З ΔABN: AN = BN · ctgβ – 3H · ctgα · ctgβ.

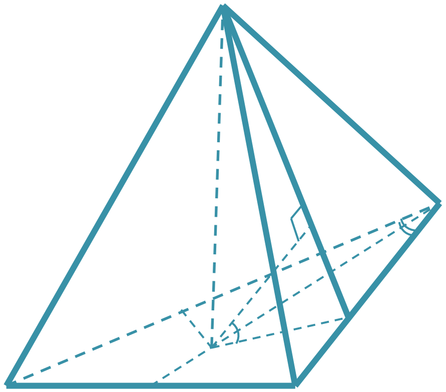
Тоді: $S_{OCH} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BN = AN \cdot BN = 3H \cdot ctg\alpha \cdot ctg\beta \cdot 3H \cdot ctg\alpha =$

$$= 9H^2 ctg^2\alpha \cdot ctg\beta;$$

$V = \frac{1}{3} \cdot 9H^2 \cdot ctg^2\alpha \cdot ctg\beta \cdot H = 3H^3 \cdot ctg^2\,\alpha \cdot ctg\beta.$

При H = 12, α = β = 60° матимемо: $V = 3 \cdot 12^3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 576\sqrt{3}$ (см^3).

Відповідь: $\boldsymbol{3H^3 \cdot ctg^2\,\alpha \cdot ctg\beta}$; $\boldsymbol{576\sqrt{3}}$ **(см^3).**



Дякуємо за увагу!