Транспортная задача

Двухиндексные задачи линейного программирования

Постановка задачи

- В пунктах производства A_1, A_2, ..., A_m имеется однородный груз в количестве соответственно a_1, a_2,…, a_m.
- Этот груз необходимо доставить в пункты назначения B_1, B_2, …., B_n в количестве соответственно b_1, b_2,..., b_n.
- Стоимость перевозки единицы груза (тариф) из пункта A_i в пункт B_j равна c_{ij}.
- Требуется составить план перевозок, позволяющий вывезти все грузы и имеющий минимальную стоимость.

Транспортная (распределительная) таблица

$A_i \setminus B_j$	B_1	B_2	$\dots$	B_j	$\dots$	B_n
	b_1	b_2	$\dots$	b_j	$\dots$	b_n
A_1 a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\dots$	c_{1j} x_{1j}	$\dots$	c_{1n} x_{1n}
A_2 a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\dots$	c_{2j} x_{2j}	$\dots$	c_{2n} x_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_i a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	$\dots$	c_{ij} x_{ij}	$\dots$	c_{in} x_{in}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\dots$	c_{mj} x_{mj}	$\dots$	c_{mn} x_{mn}

Спрос

Тариф на перевозку

Предложение

Поставка

Закрытая и открытая ТЗ

В зависимости от соотношения между суммарными запасами груза и суммарными потребностями в нем транспортные задачи могут быть закрытыми и открытыми.

- Если $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, а называется **закрытой**.
- Если $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$, **ытой**.

Математическая модель закрытой ТЗ

$$L(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

- При ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,$$

$$x_{i,j} \geqslant 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

- Оптимальным решением задачи является матрица

$$X_{\text{опт}} = (x_{ij})_{m\times n},$$

Решение закрытой ТЗ

- Транспортная задача как задача линейного программирования может быть решена симплексным методом, однако наличие большого числа переменных и ограничений делает вычисления громоздкими. Поэтому для решения транспортных задач разработан специальный - **распределительный метод**, имеющий те же этапы, что и симплексный метод, а именно:
- нахождение исходного опорного решения;
- проверка этого решения на оптимальность;
- переход от одного опорного решения к другому.

Пример

- На складах A_1, A_2, A_3 имеются запасы продукции в количествах 90, 400, 110 т соответственно. Потребители B_1, B_2, B_3 должны получить эту продукцию в количествах 140, 300, 160 т соответственно. Найти такой вариант прикрепления поставщиков к потребителям, при котором сумма затрат на перевозки была бы минимальной. Расходы по перевозке 1 т продукции заданы матрицей (ден. ед.)

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Пример

- Проверим, является ли задача закрытой:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 90 + 400 + 110 = 600 \text{ т},$$

$$\sum_{j=1}^{3} b_j = 140 + 300 + 160 = 600 \text{ т},$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j,$$

Пример

- Заполним распределительную таблицу

a_i \ b_j		1	2	3
		140	300	160
1	90	2	5	2
2	400	4	1	5
3	110	3	6	8

I. Нахождение исходного опорного решения

Рассмотрим один из методов — **метод минимального тарифа:**

- Грузы распределяются **в первую очередь** в те клетки, в которых находится **минимальный тариф** перевозок c_{ij}.
- Далее поставки распределяются в незанятые клетки с наименьшими тарифами с учетом оставшихся запасов у поставщиков и удовлетворения спроса потребителей.
- Процесс распределения продолжают до тех пор, пока все грузы от поставщиков не будут вывезены, а потребители не будут удовлетворены.

Вырожденность ТЗ

- При распределении грузов может оказаться, что количество занятых клеток меньше, чем m+n-1. В этом случае задача имеет **вырожденное решение**.
- В этом случае недостающее их число заполняется клетками **с нулевыми поставками**, такие клетки называют **условно занятыми**.
- Нулевые поставки помещают в незанятые клетки с учетом наименьшего тарифа таким образом, чтобы в каждых строке и столбце было **не менее чем по одной занятой клетке**.

Пример

- Найдем исходное опорное решение методом наименьшего тарифа:

a_i \ b_j		1	2	3
		140	300	160
1	90	2 90	5	2
2	400	4	1 300	5 100
3	110	3 50	6	8 60

- Число занятых клеток в таблице равно m+n-1= 3+3–1=5, т.е. условие невырожденности выполнено.

Проверка найденного опорного решения на оптимальность

- Найденное исходное опорное решение проверяется на оптимальность **методом потенциалов.**
- В распределительную таблицу добавляют строку v_j и столбец u_i. Числа u_i и v_j называют **потенциалами**.
- Потенциалы u_i и v_j находят **для занятых клеток** из равенства $\boxed{\mathbf{u_i + v_j = c_{ij}}}$.
- Одному из потенциалов дается **произвольное значение**, например $u_1 = 0$, тогда остальные потенциалы определяются однозначно.
- Так, если известен потенциал u_i, то $v_j=c_{ij}—u_i$;
  если известен потенциал v_j, то $u_i=c_{ij}–v_j$.

Проверка найденного опорного решения на оптимальность

- Обозначим $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$.
- Эту оценку называют **оценкой свободных клеток**.
- Если **все $\Delta_{ij} \le 0$**, то опорное решение является **оптимальным**.
- Если **хотя бы одна** из оценок **$\Delta_{ij} > 0$**, то опорное решение **не является оптимальным** и его можно улучшить, перейдя от одного опорного решения к другому.

Пример

- Проверим найденное опорное решение на оптимальность, добавив в таблицу столбец u_i и строку v_j.
- Полагая $u_1=0$, запишем это в последнем столбце таблицы.
- Рассмотрим занятую клетку (1,1), для нее выполняется условие $u_1 + v_1 = 2$, откуда $v_1 = 2$.
- Далее рассматриваем последовательность из занятых клеток таблицы, для которых один из потенциалов известен:
  - Для клетки (3,1): $u_3 + v_1 = 3$, $v_1 = 2$, откуда $u_3 = 1$.
  - Для клетки (3,3): $u_3 + v_3 = 8$, $u_3 = 1$, $v_3 = 7$.
  - Для клетки (2,3): $u_2 + v_3 = 5$, $v_3 = 7$, $u_2 = -2$.
  - Для клетки (2,2): $u_2 + v_2 = 1$, $u_2 = -2$, $v_2 = 3$.
- Найденные значения потенциалов заносим в таблицу.

Пример

b_j / a_i		1	2	3	u_i
		140	300	160	
1	90	2 90	5	2	0
2	400	4	1 300	5 100	−2
3	110	3 50	6	8 60	1
	v_j	2	3	7	

Пример

- Вычисляем оценки свободных клеток:

$$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 3 - 5 = -2 < 0,$$
$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 7 - 2 = 5 > 0,$$
$$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -2 + 2 - 4 = -4 < 0,$$
$$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 1 + 3 - 6 = -2 < 0.$$

- Получили оценку $\Delta_{13} = 5 > 0$, следовательно, исходное опорное решение не является оптимальным и его можно улучшить.

Переход от одного опорного решения к другому

- Переход к другому опорному решению осуществляется **перераспределением грузов**, перемещая их из занятых клеток в свободные:

1. Для **свободной клетки с $\Delta_{ij} > 0$** строится **замкнутый цикл** (цепь, многоугольник), все остальные вершины которого находятся в занятых клетках; углы прямые.
2. Около свободной клетки цикла ставится знак (+), затем чередуют знаки (—) и (+).
3. У вершин со знаком (—) выбирают минимальный груз.
4. Его прибавляют к грузам, стоящим у вершин со знаком (+), и отнимают от грузов у вершин со знаком (—).

- В результате перераспределения груза получим новое опорное решение. Это решение проверяем на оптимальность, и т.д. до тех пор, пока не получим оптимальное решение.

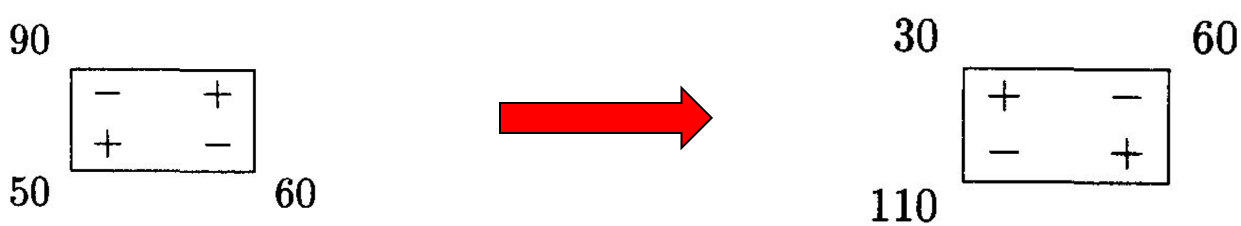
Пример

- Строим цикл для клетки (1,3), имеющей положительную оценку. У вершин цикла ставим знаки (+) и (—)

a_i \ b_j		1	2	3	u_i
		140	300	160	
1	90	2 90	5	2	0
2	400	4	1 300	5 100	-2
3	110	3 50	6	8 60	1
	v_j	2	3	7	

Пример

- У вершин со знаком (—) выбираем минимальный груз, он равен 60.
- Его прибавляем к грузам, стоящим у положительных вершин, и отнимаем от грузов, стоящих у отрицательных вершин. Получаем новый цикл



и новое опорное решение, которое заносим в новую распределительную таблицу для проверки на оптимальность:

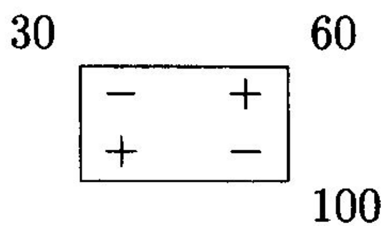
Пример

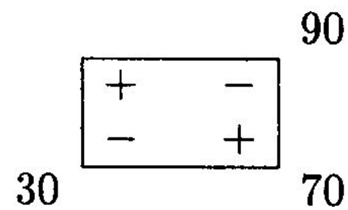
a_i \ b_j		1	2	3	u_i
		140	300	160	
1	90	30 (2)	(5)	60 (2)	0
2	400	(4)	300 (1)	100 (5)	3
3	110	110 (3)	(6)	(8)	2
	v_j	2	−2	2	

$$\Delta_{12} = -7, \quad \Delta_{21} = 1 > 0, \quad \Delta_{32} = -7, \quad \Delta_{33} = -5.$$

Пример

- Построим цикл для клетки с положительной оценкой $\Delta_{21} = 1$:





- Получим новое решение, которое занесем в таблицу Проверим его на оптимальность.

Пример

a_i \ b_j		1	2	3	u_i
		140	300	160	
1	90	2	5	2 90	0
2	400	4 30	1 300	5 70	3
3	110	3 110	6	8	2
v_j		1	-2	2	

$$\Delta_{11} = -1, \quad \Delta_{12} = -1, \quad \Delta_{32} = -6, \quad \Delta_{33} = -4.$$

Пример

- Все оценки свободных клеток отрицательные, следовательно, найденное решение оптимальное.

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 \\ 30 & 300 & 70 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Стоимость транспортных расходов равна

$$L(X)_{\min} = 90 \cdot 2 + 30 \cdot 4 + 300 \cdot 1 + 70 \cdot 5 + 110 \cdot 3 = 1280 \text{ усл. ед.}$$

Решение открытой ТЗ

- При **открытой** транспортной задаче сумма запасов не совпадает с суммой потребностей $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j.$
- При этом:
- а) если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j,$ **ъем запасов превышает объем потребления**. Для решения задачи **вводят фиктивного потребителя**, потребности которого равны разности запасов и потребностей.
- б) если $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j,$ **бъем потребления превышает объем запасов**, часть потребностей останется неудовлетворенной. Для решения задачи **вводим фиктивного поставщика.**

Решение открытой ТЗ

- При введении фиктивного участника открытая транспортная задача становится закрытой и решается по алгоритму решения закрытых ТЗ.
- Фиктивному участнику назначаются **тарифы больше или равны наибольшему** из всех транспортных тарифов (иногда их считают равными нулю).
- В целевой функции фиктивный поставщик или потребитель **не учитывается**.

Альтернативный оптимум в ТЗ

- **Признак** наличия **альтернативного оптимума** в ТЗ: **равенство нулю** хотя бы одной из **оценок свободных** переменных **в оптимальном решении** ($X_{опт1}$).
- Сделав перераспределение грузов относительно клетки, имеющей $\Delta_{ij} = 0$, получим новое оптимальное решение ($X_{опт2}$), при этом **значение целевой функции** (транспортных расходов) **не изменится**.
- Если одна оценка свободных переменных равна нулю, то оптимальное решение находится в виде

$$X_{опт} = t \cdot X_{опт1} + (1 - t) \cdot X_{опт2},$$

где $0 \leq t \leq 1$

Пример

- На трех складах имеется мука в количестве 60, 130 и 90 т, которая должна быть в течение месяца доставлена четырем хлебозаводам в количестве: 30, 80, 60, 110 т соответственно.
- Составить оптимальный план перевозок, имеющий минимальные транспортные расходы, если стоимость доставки 1 т муки на хлебозаводы задана матрицей

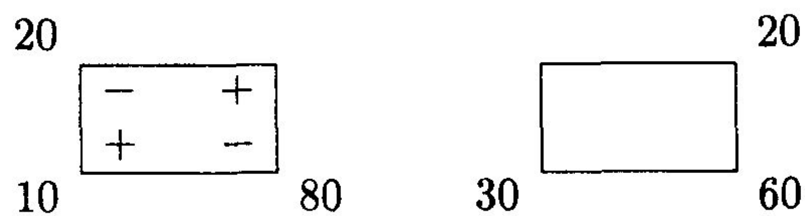
$$\begin{pmatrix} 6 & 8 & 15 & 4 \\ 9 & 15 & 2 & 3 \\ 6 & 12 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

Пример

- Решение (кратко).

a_i \ b_j		1	2	3	4	u_i
		30	80	60	110	
1	60	6 20	8	15	4 40	0
2	130	9	15	2 60	3 70	−1
3	90	6 10	12 80	7	10	0
v_j		6	12	3	4	

$$\Delta_{12} = 4, \quad \Delta_{13} = -12, \quad \Delta_{21} = -4,$$
$$\Delta_{22} = -4, \quad \Delta_{33} = -4, \quad \Delta_{34} = -6.$$



Пример

- Решение (кратко).

$a_i \backslash b_j$		1	2	3	4	u_i
		30	80	60	110	
1	60	6	8 20	15	4 40	0
2	130	9	15	2 60	3 70	−1
3	90	6 30	12 60	7	10	4
	v_j	2	8	3	4	

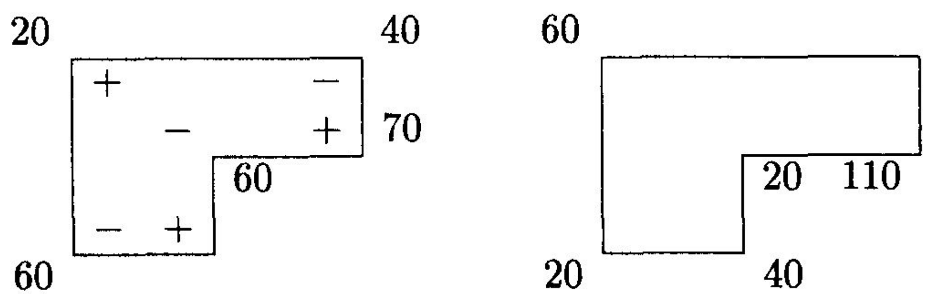
$$\Delta_{11} = -4, \quad \Delta_{13} = -12, \quad \Delta_{21} = -8,$$
$$\Delta_{22} = -8, \quad \Delta_{33} = 0, \quad \Delta_{34} = -2.$$

Пример

- Так как $\Delta_{33} = 0$, то задача имеет альтернативный оптимум и одно из решений равно

$$X_{\text{опт}1} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 60 & 70 \\ 30 & 60 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Произведем перераспределение грузов относительно клетки (3,3):



Пример

- Теперь $\Delta_{14} = 0$, получили еще одно решение:

$$X_{\text{опт}2} = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 110 \\ 30 & 20 & 40 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Данная задача имеет два оптимальных решения $X_{\text{опт}1}$ и $X_{\text{опт}2}$, общее решение находится по формуле

$$X_{\text{опт}} = tX_{\text{опт}1} + (1-t)X_{\text{опт}2},$$

- где $0 \le t \le 1$.

Пример

- Найдем элементы матрицы общего решения:

$$x_{11} = 0, \qquad x_{12} = 20t + (1-t)60 = 60 - 40t,$$
$$x_{13} = 0, \qquad x_{14} = 40t + (1-t)0 = 40t,$$
$$x_{21} = 0, \qquad x_{22} = 0,$$
$$x_{23} = 60t + (1-t)20 = 20 + 40t, \qquad x_{24} = 70t + (1-t)110 = 110 - 40t,$$
$$x_{31} = 30t + (1-t)30 = 30, \qquad x_{32} = 60t + (1-t)20 = 20 + 40t,$$
$$x_{33} = 0t + (1-t)40 = 40 - 40t, \qquad x_{34} = 0.$$

- Итак,

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 60-40t & 0 & 40t \\ 0 & 0 & 20+40t & 110-40t \\ 30 & 20+40t & 40-40t & 0 \end{pmatrix}.$$

- Стоимость транспортных расходов составит $L(X_{\text{опт}}) = 1550$ усл. ед.