

# **Тема 3/1. Монотонность и экстремумы функции.**

- 1. Возрастание и убывание функций. Признаки монотонности.**
- 2. Точки экстремума. Необходимое условие экстремумов.**
- 3. Достаточное условие экстремума.**

# 1. Возрастание и убывание функций. Признаки монотонности.



$$x_2 > x_1$$

$$f(x_2) > f(x_1)$$

$$x_2 \geq x_1$$

$$f(x_2) < f(x_1)$$

$$\rightarrow (x)$$

## Признак возрастания функции.

Для того, чтобы функция  $y=f(x)$  возрастала на промежутке, необходимо и достаточно, чтобы производная функции была положительной на этом промежутке.

$$f(x) \nearrow \Leftrightarrow f'(x) > 0$$

## Признак убывания функции.

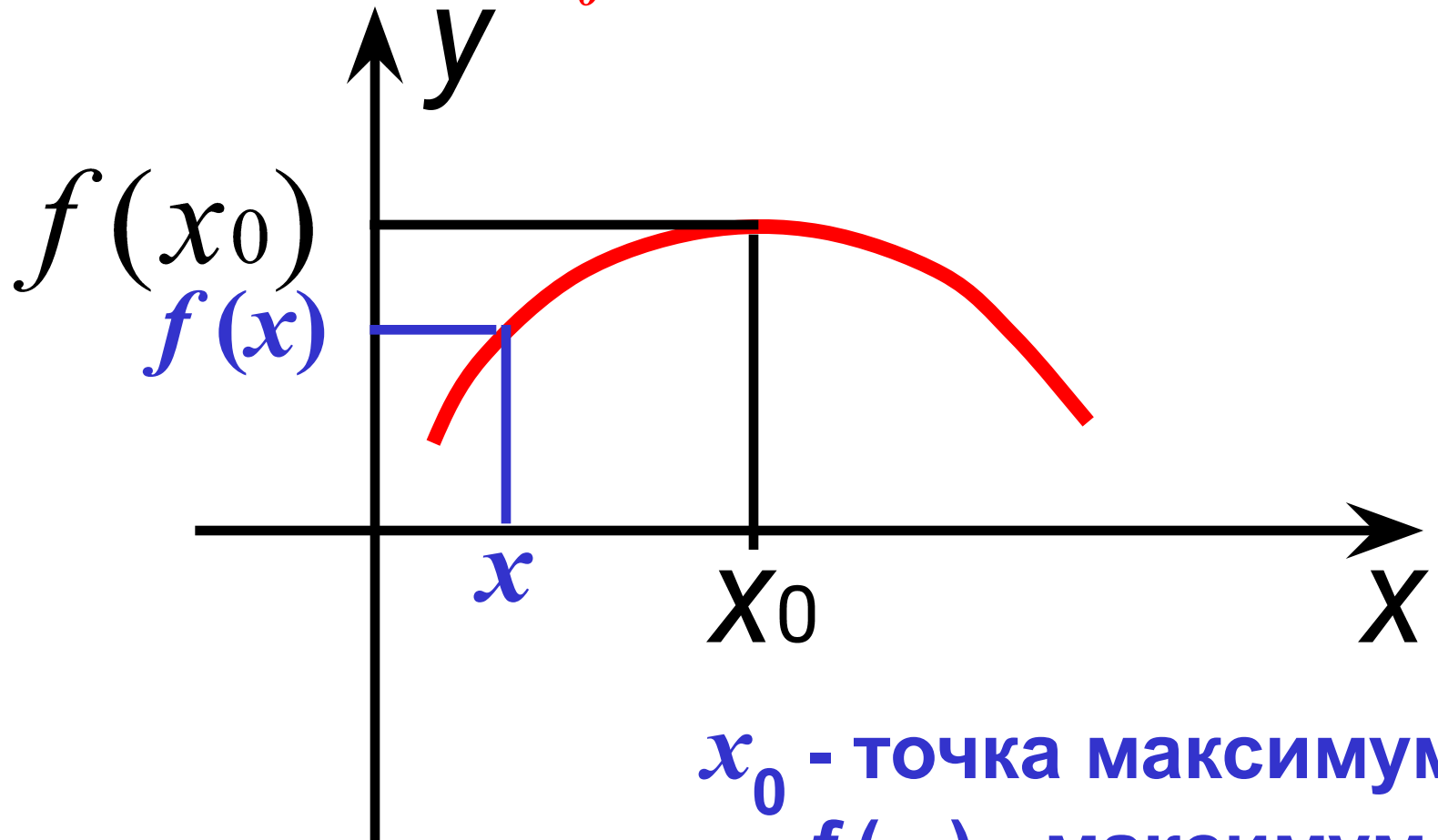
Для того, чтобы функция  $y=f(x)$  убывала на промежутке, необходимо и достаточно, чтобы производная функции была отрицательной на этом промежутке.

$$f(x) \searrow \Leftrightarrow f'(x) < 0$$

## 2. Точки экстремума. Необходимое условие экстремумов

**Определение.** Точка  $x_0$  называется точкой максимума (*max*), если в некоторой окрестности точки  $x_0$  выполняется неравенство

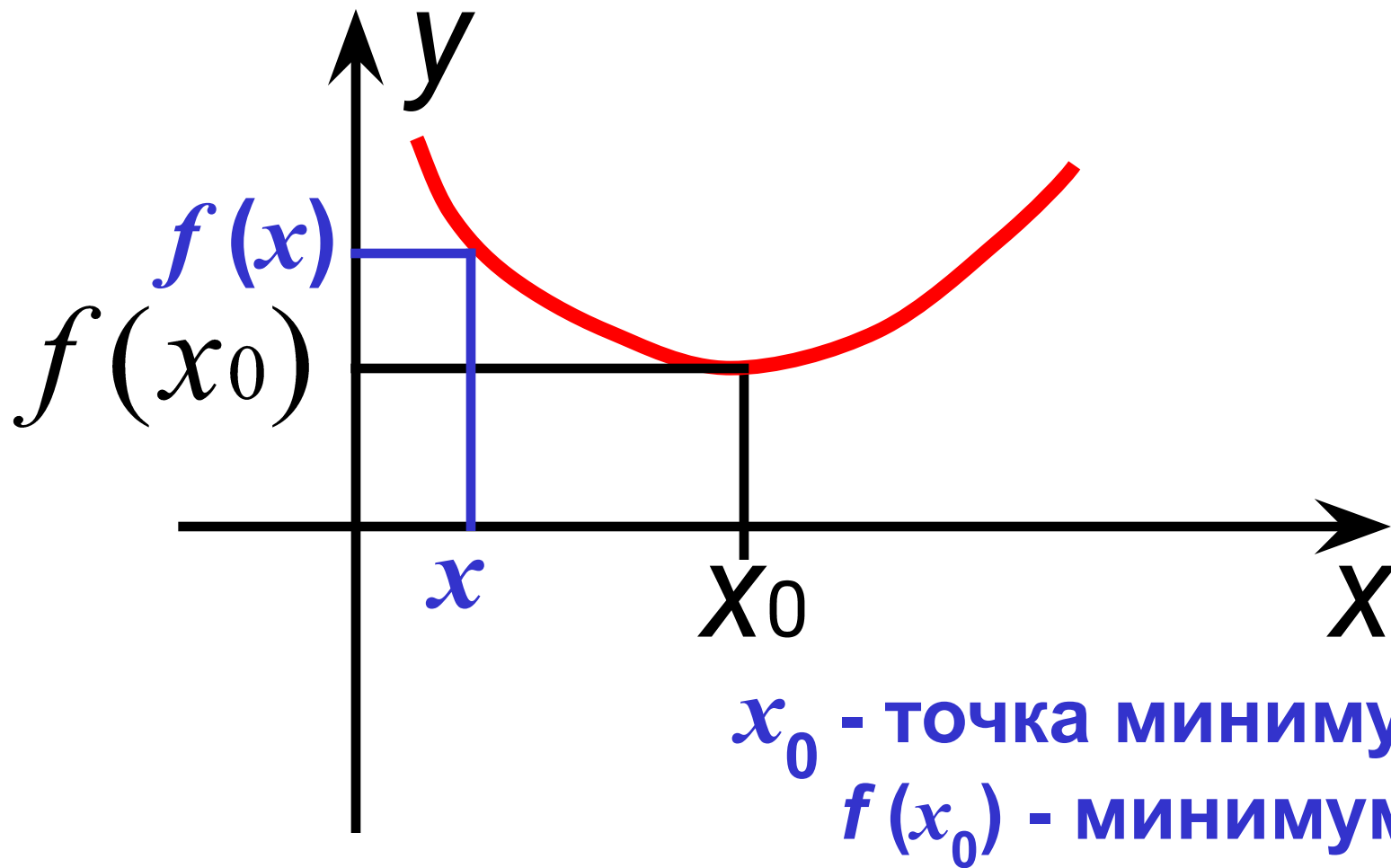
$$f(x_0) > f(x) .$$

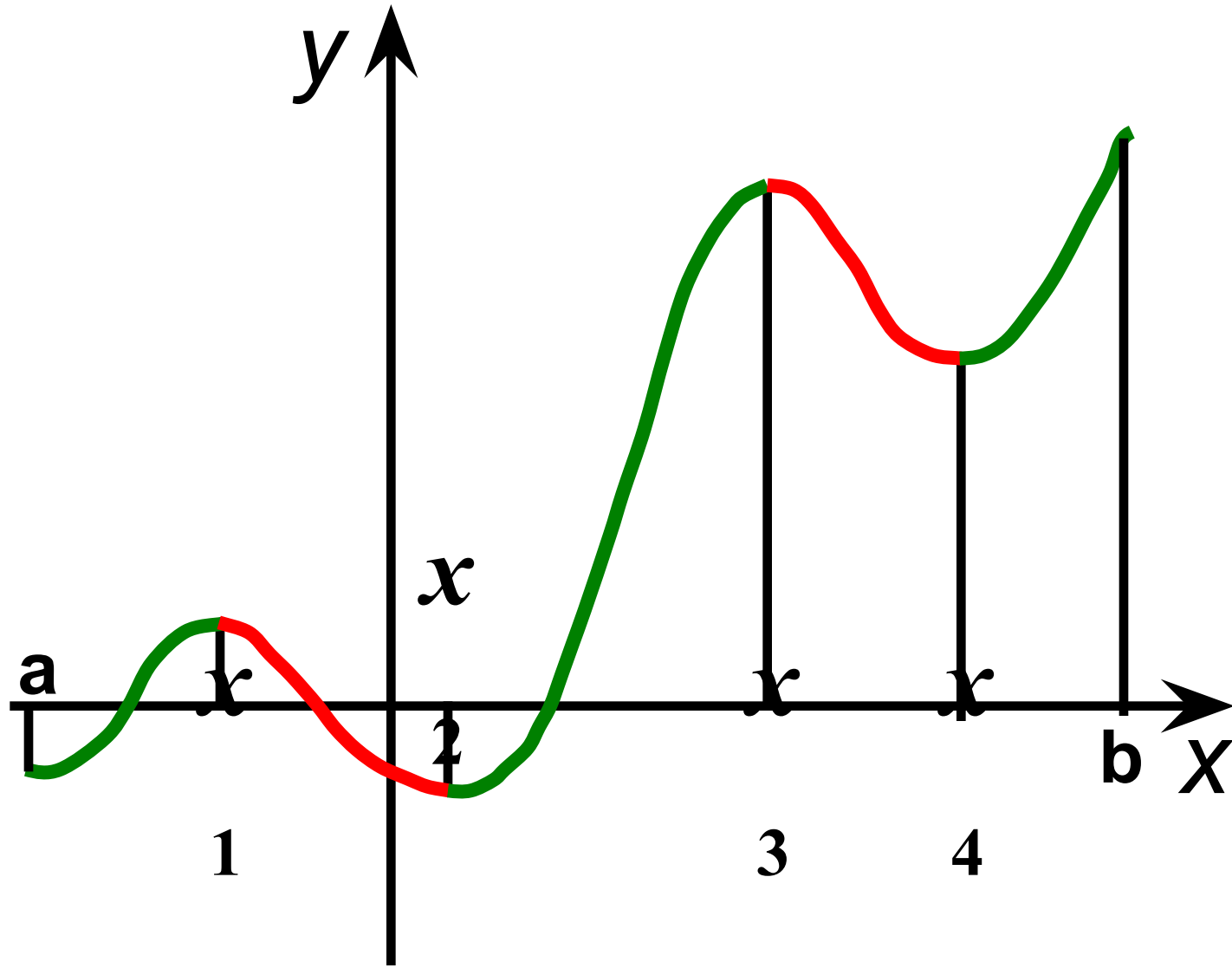


$x_0$  - точка максимума,  
 $f(x_0)$  - максимум

**Определение.** Точка  $x_0$  называется точкой минимума (*min*), если в некоторой окрестности точки  $x_0$  выполняется неравенство

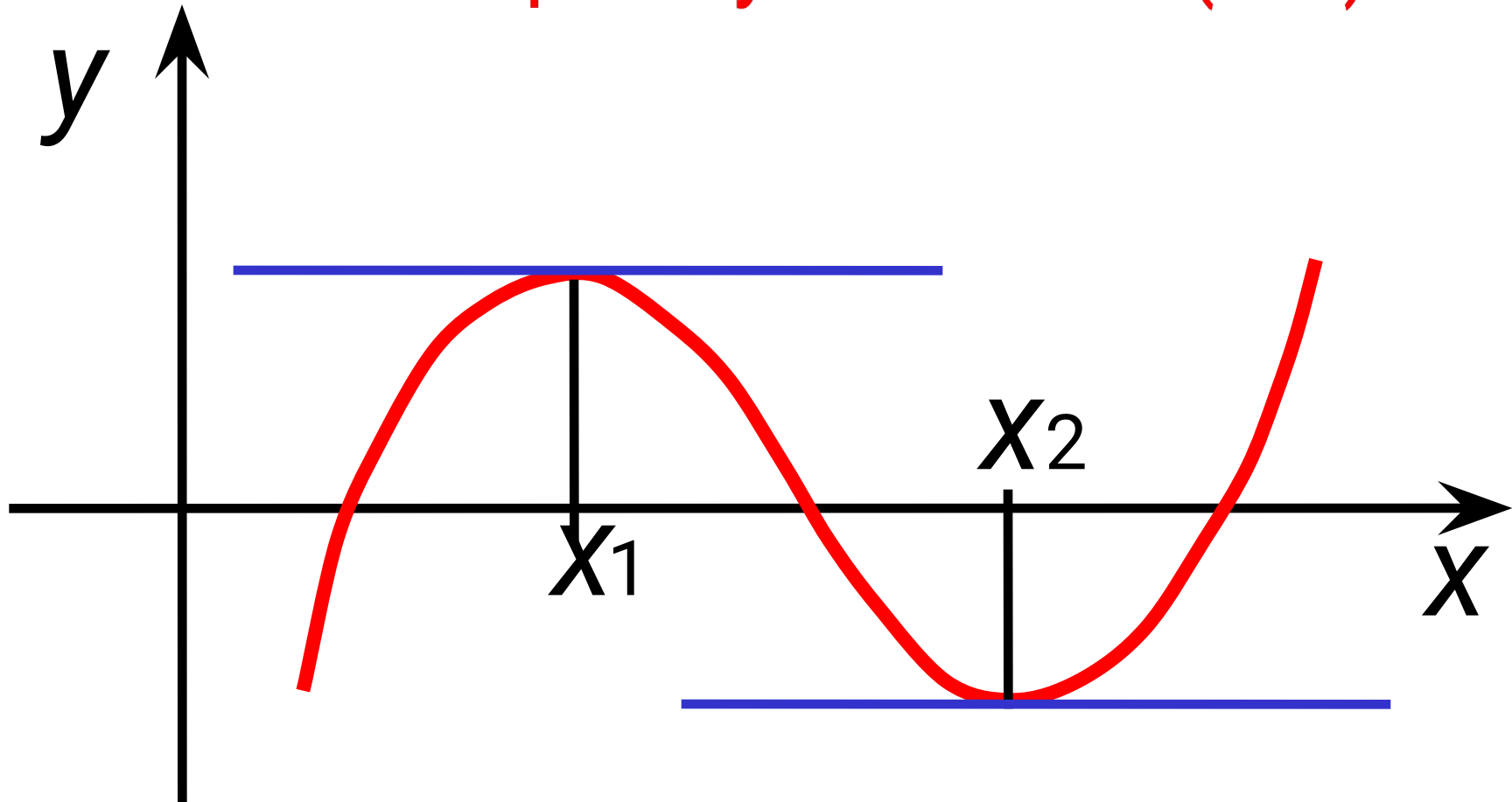
$$f(x_0) < f(x) .$$

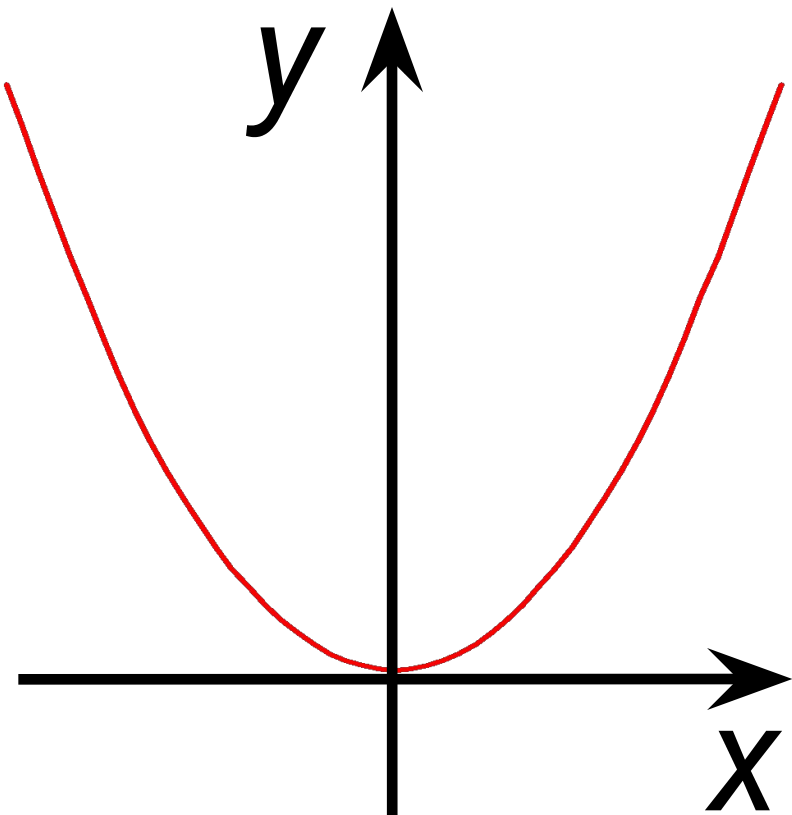




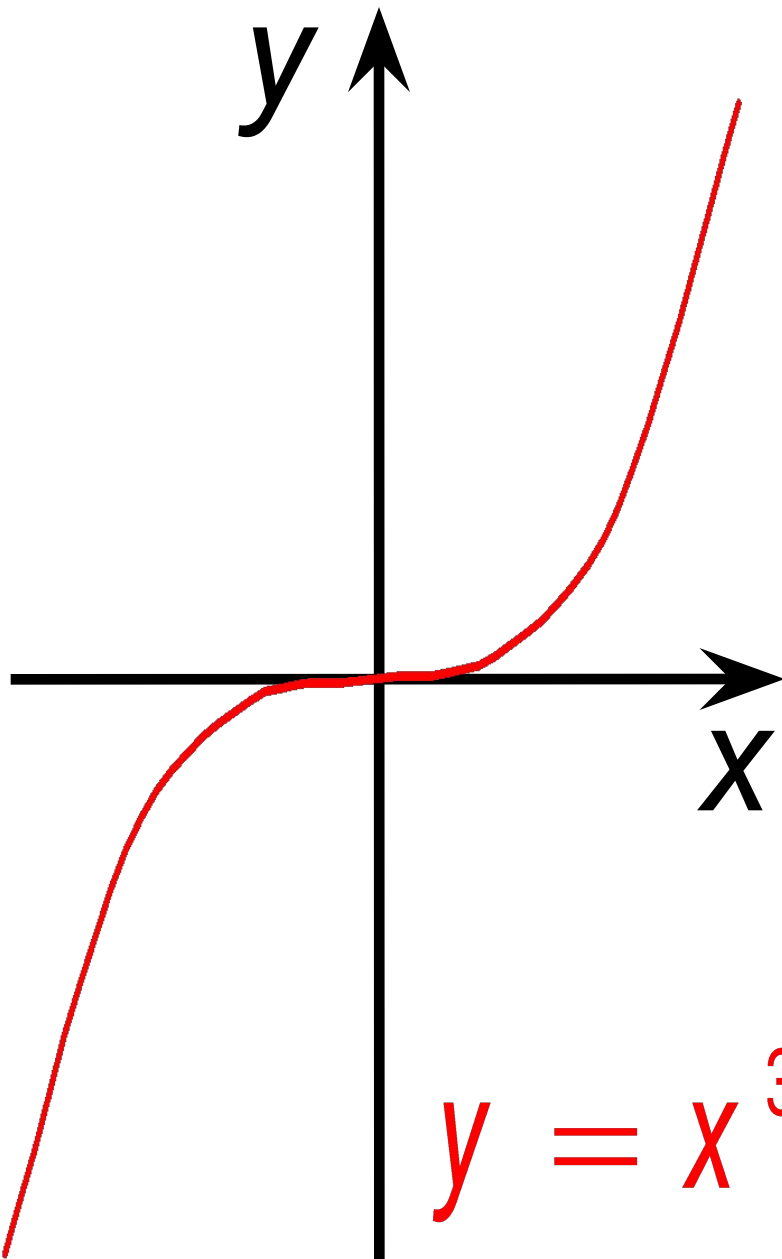
Необходимое условие экстремума функции (теорема Ферма). Если  $x_0$ -точка экстремума функции и в ней существует производная, то она в этой точке равна 0.

$$x_0 \text{ — экстремум} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$





$$y = x^2$$



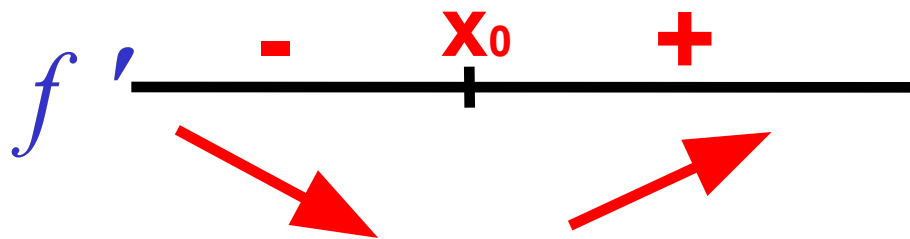
$$y = x^3$$



3. Достаточное условие экстремума функции.  
**Теорема (1-е достаточное условие существования экстремума).**

Пусть  $x_0$  - критическая точка функции  $y=f(x)$  (т.е.  $f'(x_0) = 0$  или не существует).  
Если производная при переходе через  $x_0$  меняет знак, то  $x_0$  является точкой экстремума.

$f'$  , то  $x_0$  – т. max



, то  $x_0$  – т. min



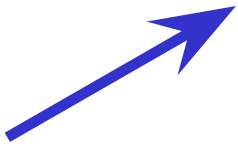
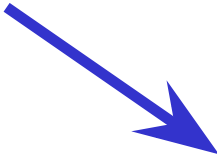
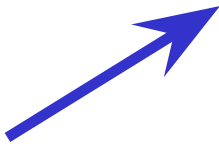
# Схема исследования функции на МОНОТОННОСТЬ И ЭКСТРЕМУМЫ.

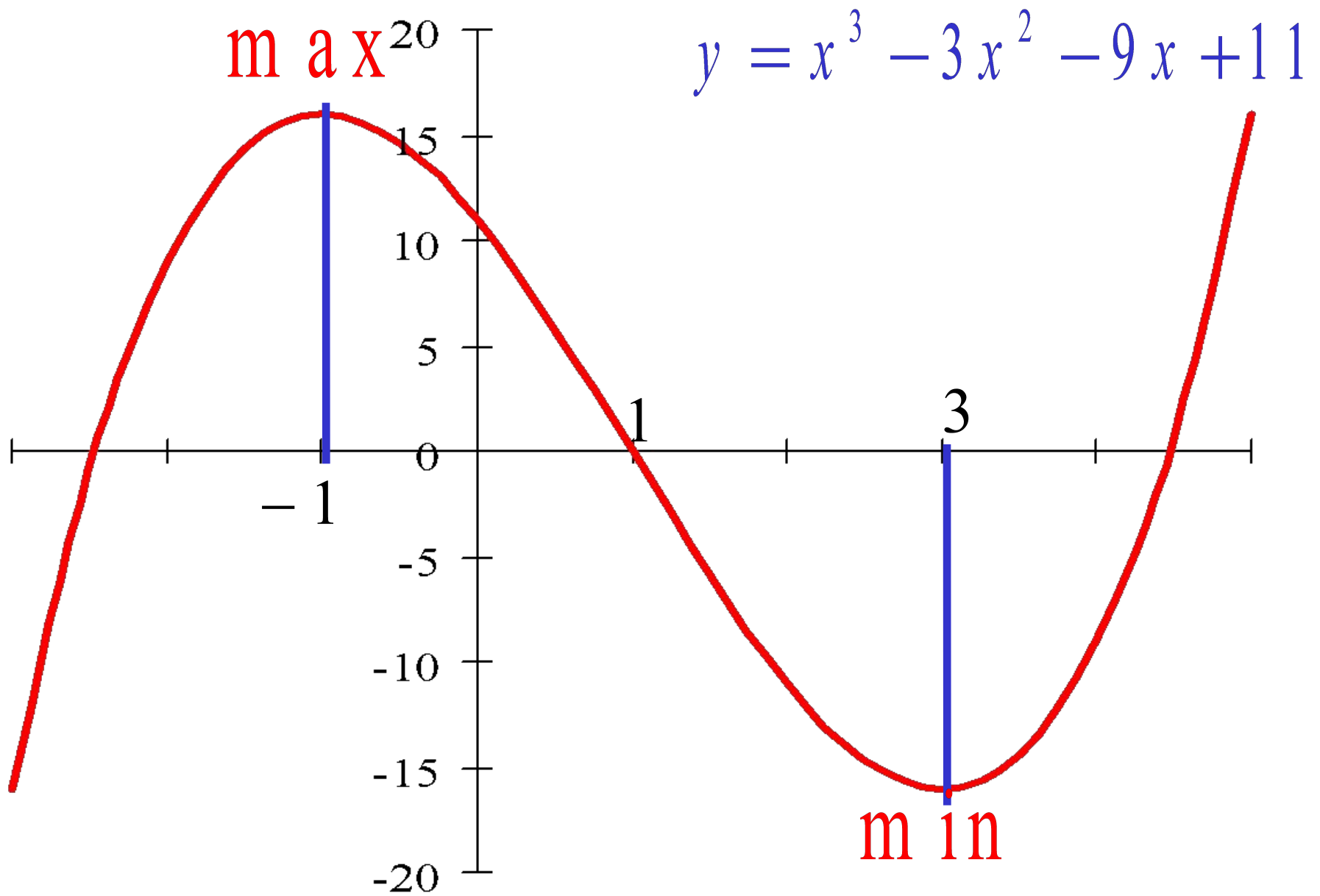
1. Найти  $f'(x)$
2. Найти критические точки 1-го рода.  
(т.е. решить уравнение  $f'(x) = 0$ )
3. Установить знаки производной при переходе через критические точки и определить точки экстремума.
4. Найти значения функции в точках экстремума.

**Пример. Исследовать функцию**

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$$

**на монотонность, точки экстремума.**

<b><math>x</math></b>	$(-\infty; -1)$	<b>-1</b>	$(-1; 3)$	<b>3</b>	$(3; +\infty)$
<b><math>y'</math></b>	<b>+</b>	<b>0</b>	<b>-</b>	<b>0</b>	<b>+</b>
<b><math>y</math></b>		<b>Max 16</b>		<b>Min -16</b>	



**Исследование на экстремум с  
помощью производных высших  
порядков.**

## Теорема (2-е достаточное условие существования экстремума).

Пусть  $x_0$  - критическая точка функции, т.е.  $f'(x_0) = 0$  или не существует. Если вторая производная функции в точке  $x_0$  положительна, то  $x_0$  - точка минимума.

$$f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 - T . \min$$

Если вторая производная функции в точке  $x_0$  отрицательна, то  $x_0$  - точка максимума.

$$f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 - T . \max$$

**Пример** **Функцию**  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$   
**исследовать на точки экстремума по**  
**2-му достаточному условию.**

$$1) y' = 0 \implies x_1 = 3 \quad x_2 = -1$$

## Задание на самоподготовку:

Дана функция  $y = x^3 - 12x + 4$

1) исследовать функцию на  
монотонность и экстремумы (2-мя  
способами)