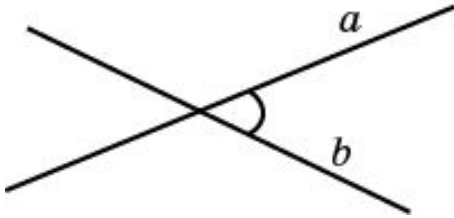
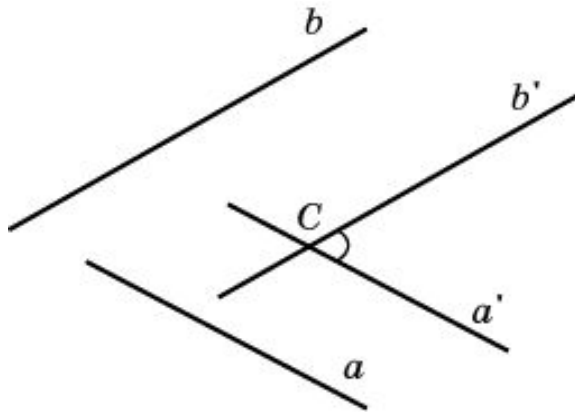


# Угол между прямыми в пространстве



Углом между двумя пересекающимися **прямыми** в пространстве называется наименьший из углов, образованных лучами этих прямых с вершиной в точке их пересечения.



Углом между **скрещивающимися** **прямыми** называется угол между пересекающимися **прямыми**, соответственно **параллельными** данным.

Две прямые называются **перпендикулярными**, если угол между ними прямой.

## Упражнение 1

Дана прямая в пространстве, на ней взята точка. Сколько можно построить прямых, проходящих через эту точку и перпендикулярных данной прямой?

**Ответ:** Бесконечно много.

## Упражнение 2

Даны прямая и точка вне ее. Сколько можно построить прямых, проходящих через эту точку и перпендикулярных данной прямой?

**Ответ:** Бесконечно много.

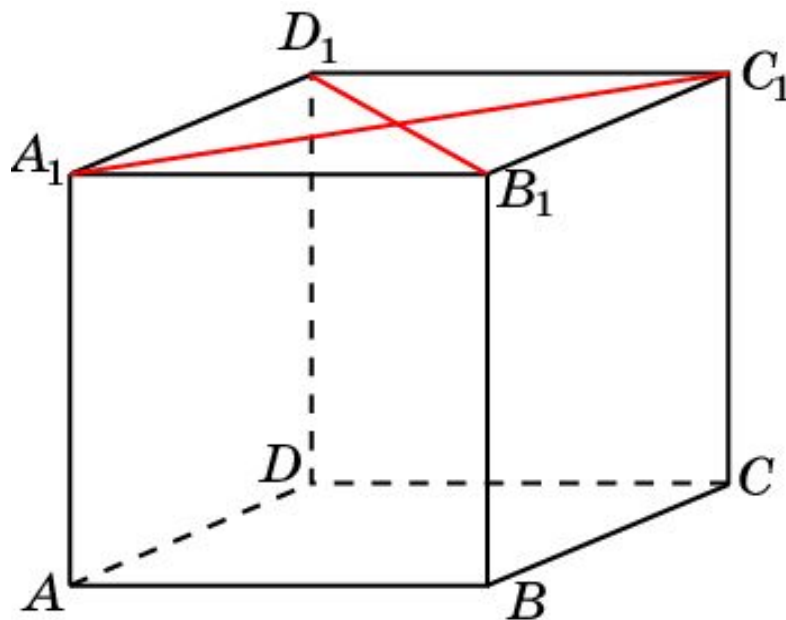
## Упражнение 3

Из планиметрии известно, что две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны. Верно ли это утверждение для стереометрии?

Ответ: Нет.

## Куб 1

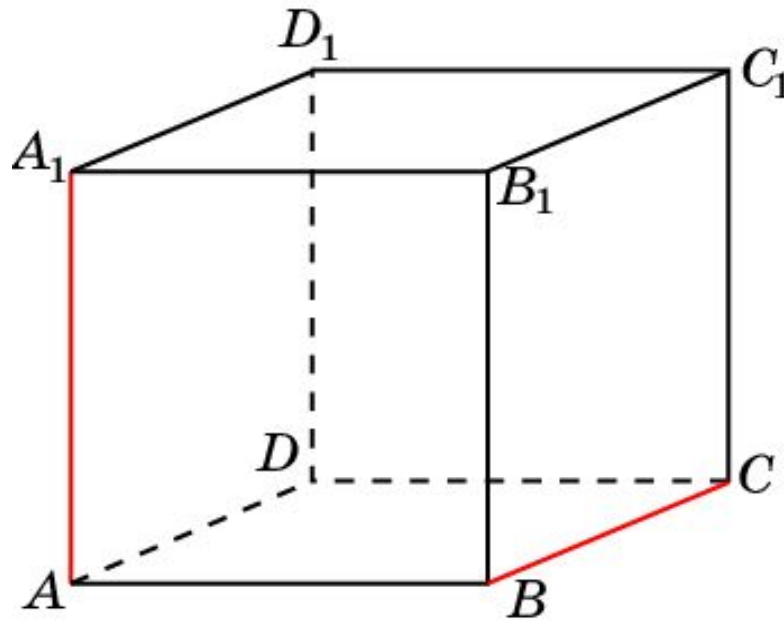
В кубе  $A...D_1$  найдите угол между прямыми  $A_1C_1$  и  $B_1D_1$ .



Ответ:  $90^\circ$ .

## Куб 2

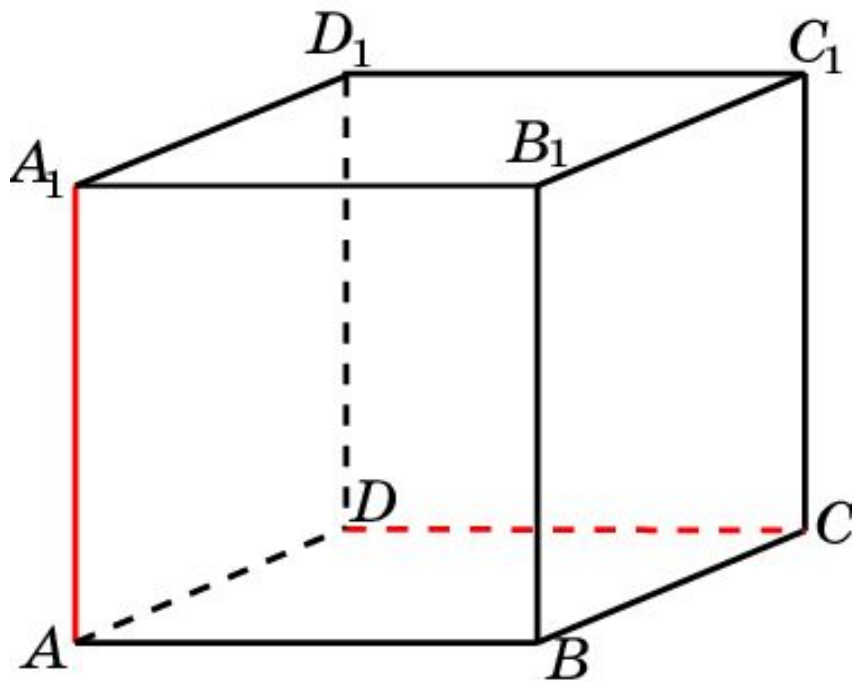
В кубе  $A...D_1$  найдите угол между прямыми  $AA_1$  и  $BC$ .



Ответ:  $90^\circ$ .

## Куб 3

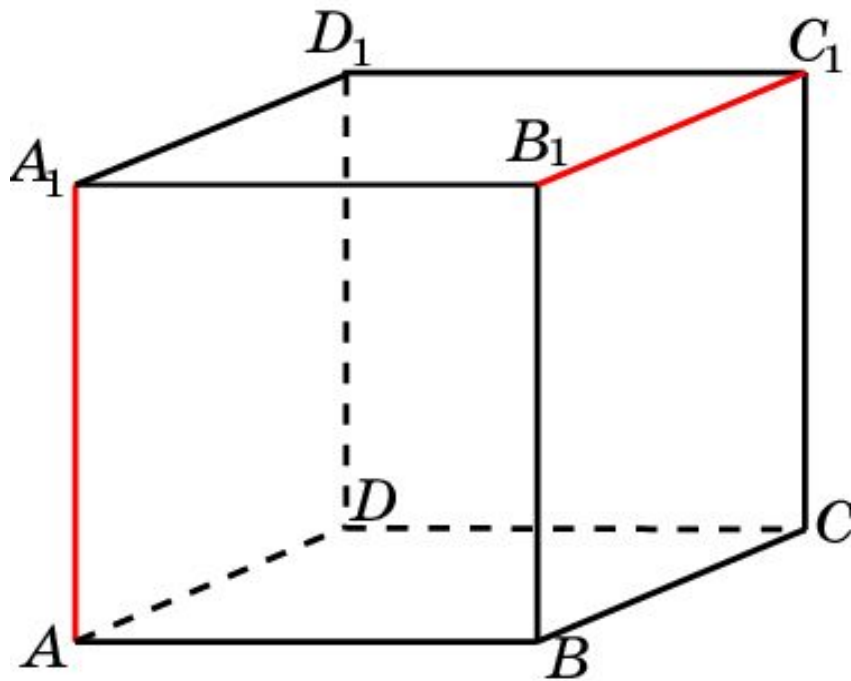
В кубе  $A\dots D_1$  найдите угол между прямыми  $AA_1$  и  $CD$ .



Ответ:  $90^\circ$ .

## Куб 4

В кубе  $A\dots D_1$  найдите угол между прямыми  $AA_1$  и  $B_1C_1$ .

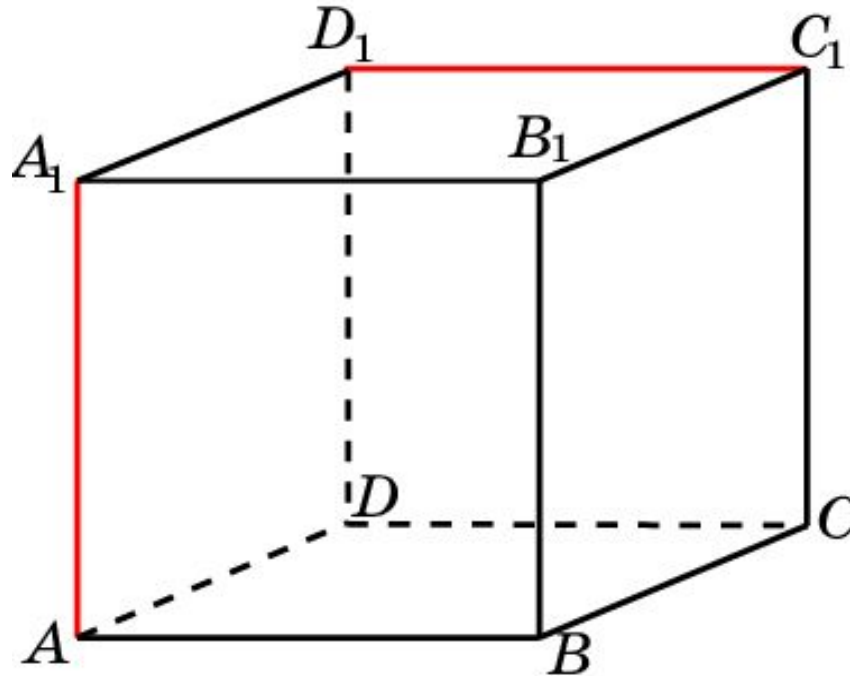


Ответ:  $90^\circ$ .



## Куб 5

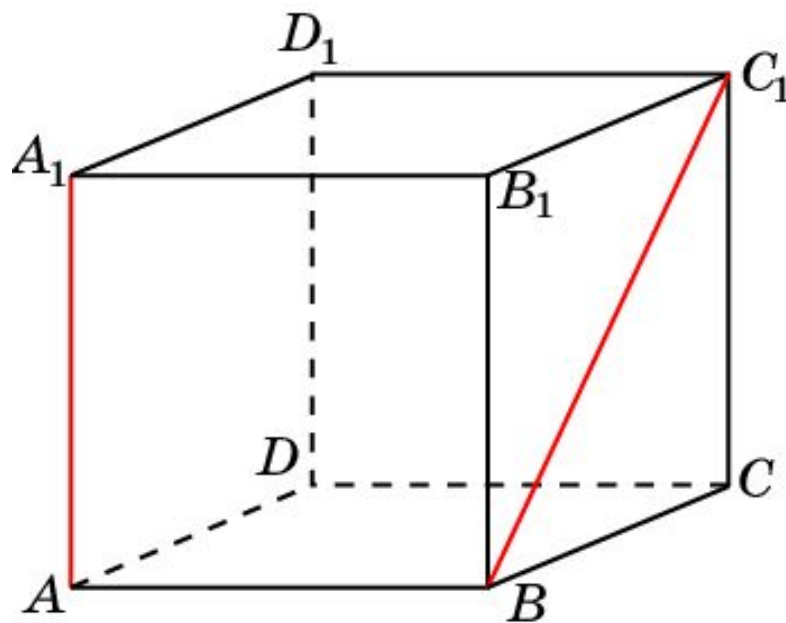
В кубе  $A\dots D_1$  найдите угол между прямыми  $AA_1$  и  $C_1D_1$ .



Ответ:  $90^\circ$ .

## Куб 5

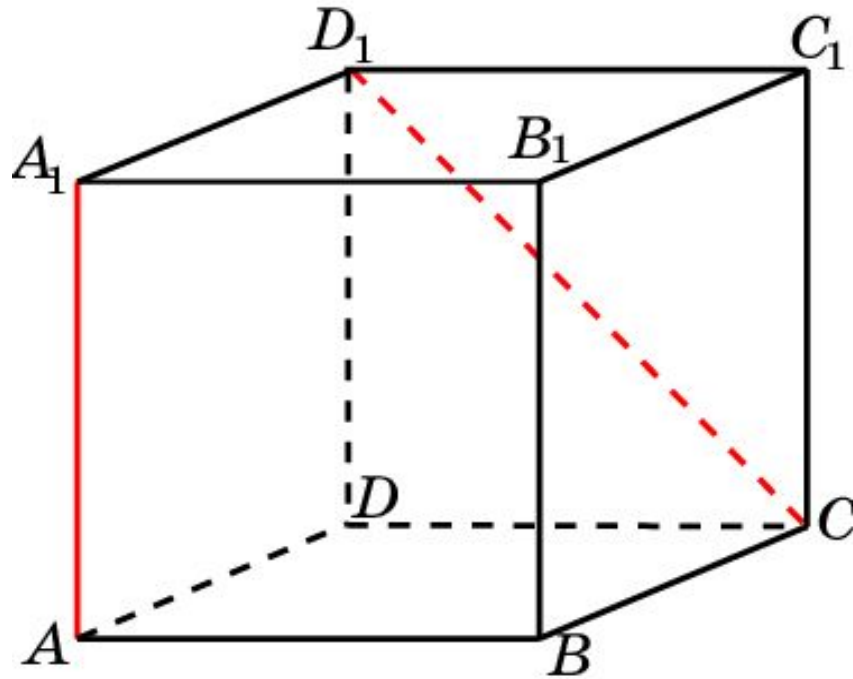
В кубе  $A...D_1$  найдите угол между прямыми  $AA_1$  и  $BC_1$ .



Ответ:  $45^\circ$ .

## Куб 6

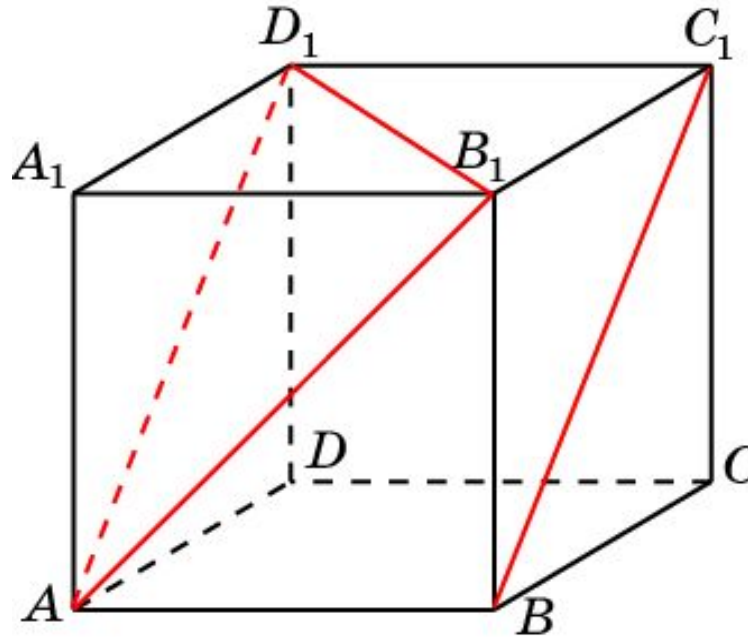
В кубе  $A...D_1$  найдите угол между прямыми  $AA_1$  и  $CD_1$ .



Ответ:  $45^\circ$ .

## Куб 7

В кубе  $A\dots D_1$  найдите угол между прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$ .

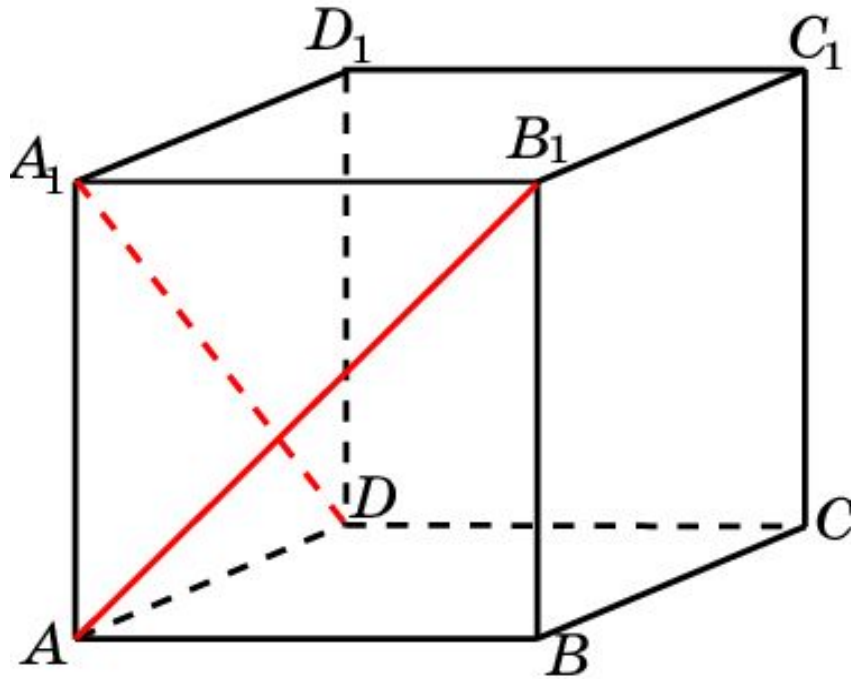


**Решение.** Через точку  $A$  проведем прямую  $AD_1$ , параллельную  $BC_1$ . Искомый угол равен углу  $B_1AD_1$ . Треугольник  $B_1AD_1$  – равносторонний. Следовательно, искомый угол равен  $60^\circ$ .

**Ответ:**  $60^\circ$ .

## Куб 8

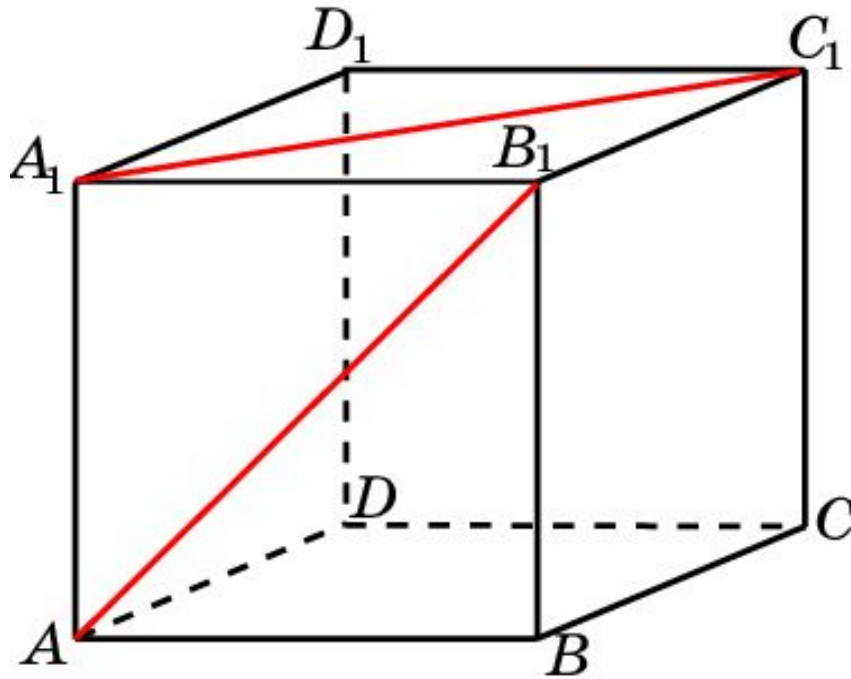
В кубе  $A\dots D_1$  найдите угол между прямыми  $AB_1$  и  $DA_1$ .



Ответ:  $60^\circ$ .

## Куб 9

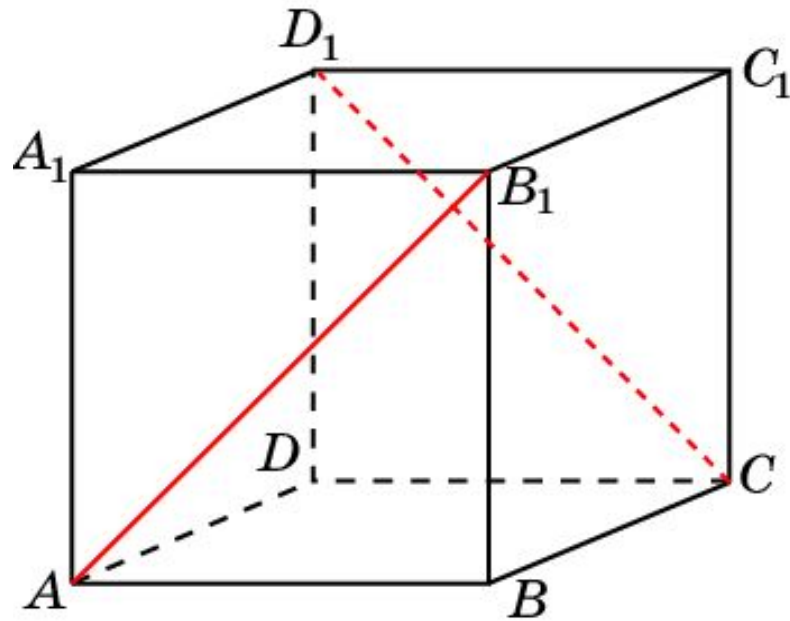
В кубе  $A...D_1$  найдите угол между прямыми  $AB_1$  и  $A_1C_1$ .



Ответ:  $60^\circ$ .

## Куб 10

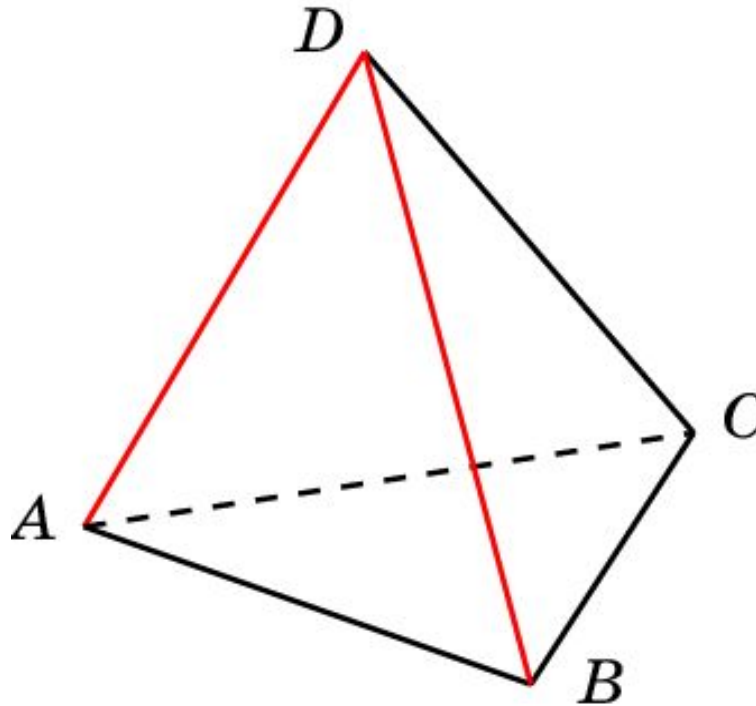
В кубе  $A\dots D_1$  найдите угол между прямыми  $AB_1$  и  $CD_1$ .



Ответ:  $90^\circ$ .

## Пирамида 1

В правильном тетраэдре  $ABCD$  найдите угол между прямыми  $AD$  и  $BC$ .

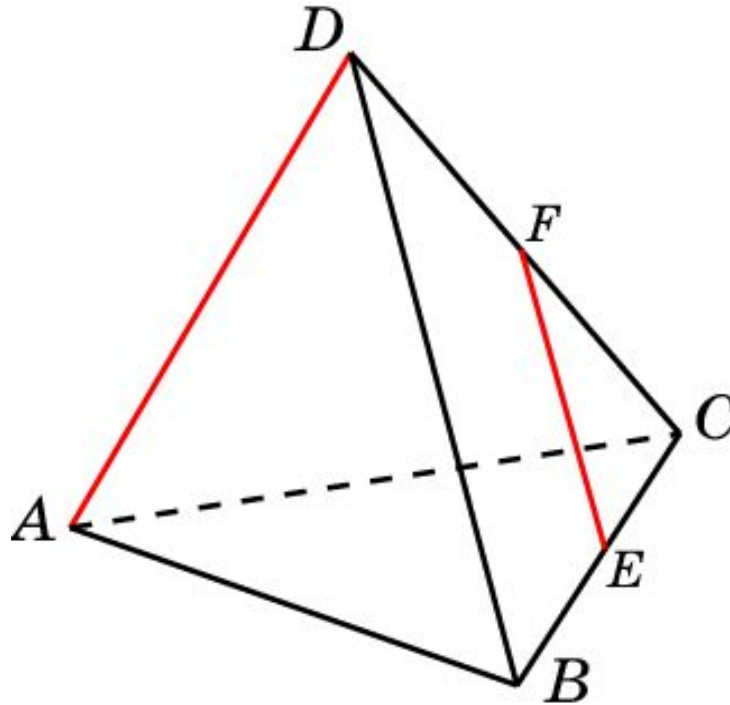


Ответ:  $60^\circ$ .



## Пирамида 2

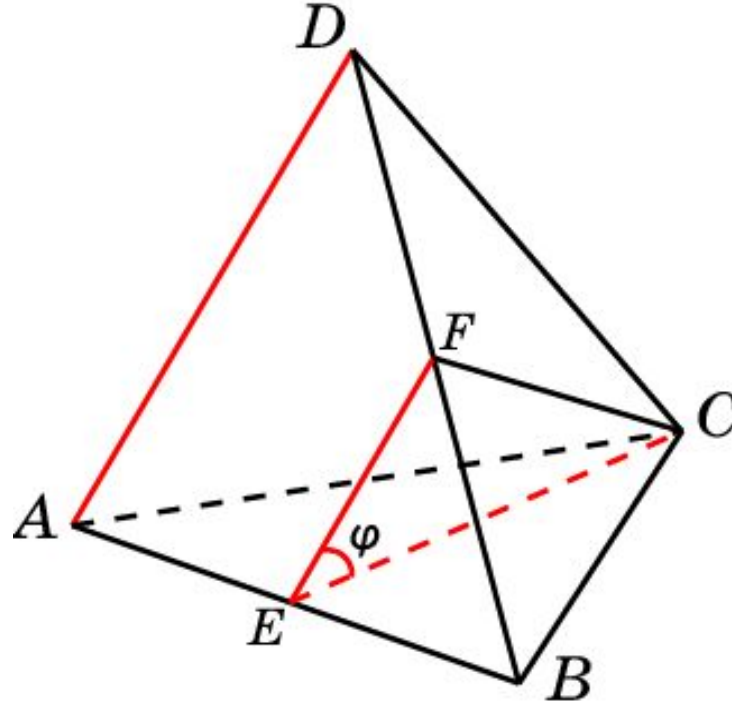
В правильном тетраэдре  $ABCD$  точки  $E$  и  $F$  – середины ребер  $BC$  и  $CD$ . Найдите угол между прямыми  $AD$  и  $EF$ .



Ответ:  $60^\circ$ .

## Пирамида 3

В правильном тетраэдре  $ABCD$  точка  $E$  – середина ребра  $AB$ . Найдите косинус угла между прямыми  $AD$  и  $CE$ .



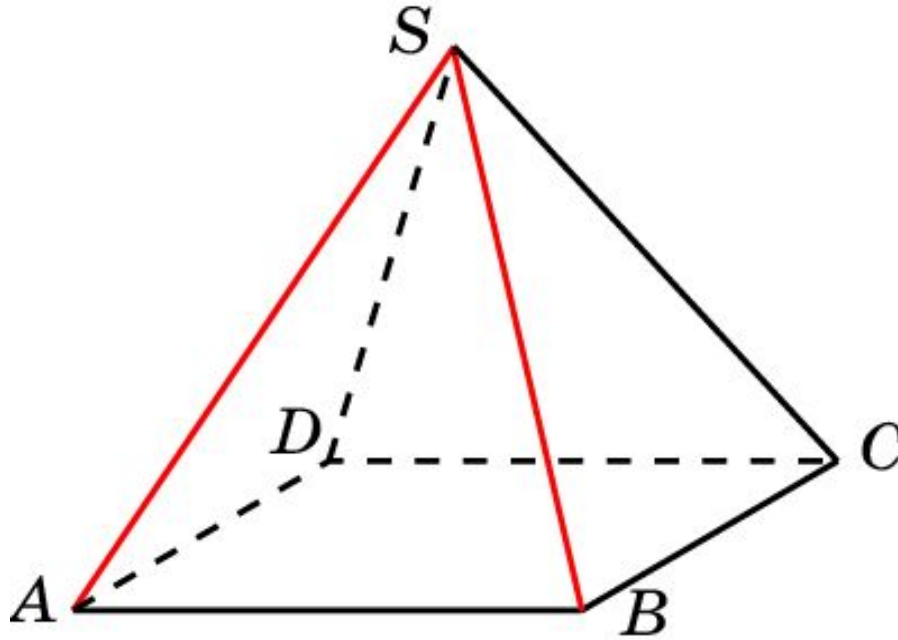
**Решение.** Через точку  $E$  проведем прямую  $EF$ , параллельную  $AD$ . Искомым углом  $\varphi$  будет угол  $CEF$ . В треугольнике  $CEF$  имеем

$$EF = \frac{1}{2}, \quad CE = CF = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \text{Следовательно, } \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

**Ответ:**  $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{6}$ .

## Пирамида 4

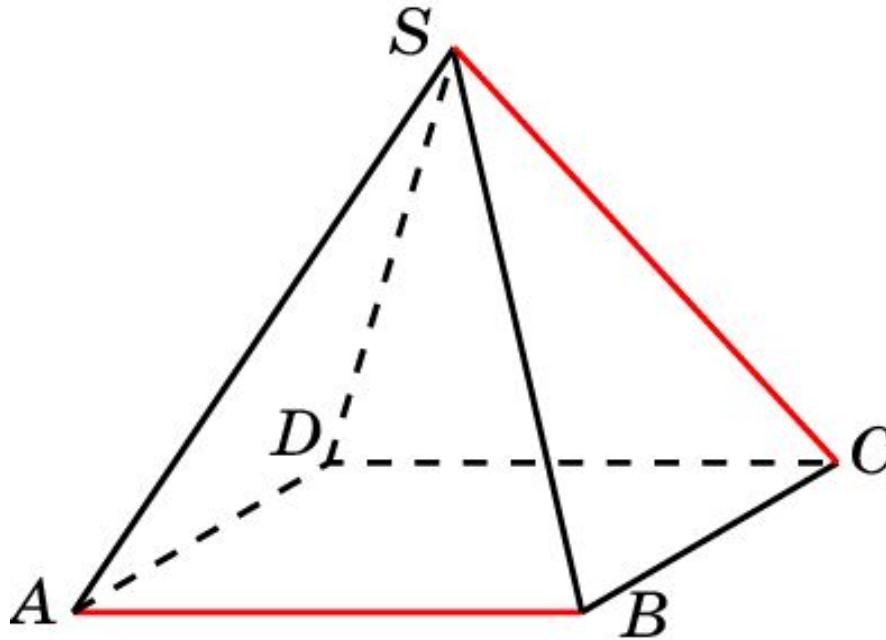
В правильной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми  $SA$  и  $SB$ .



Ответ:  $60^\circ$ .

## Пирамида 5

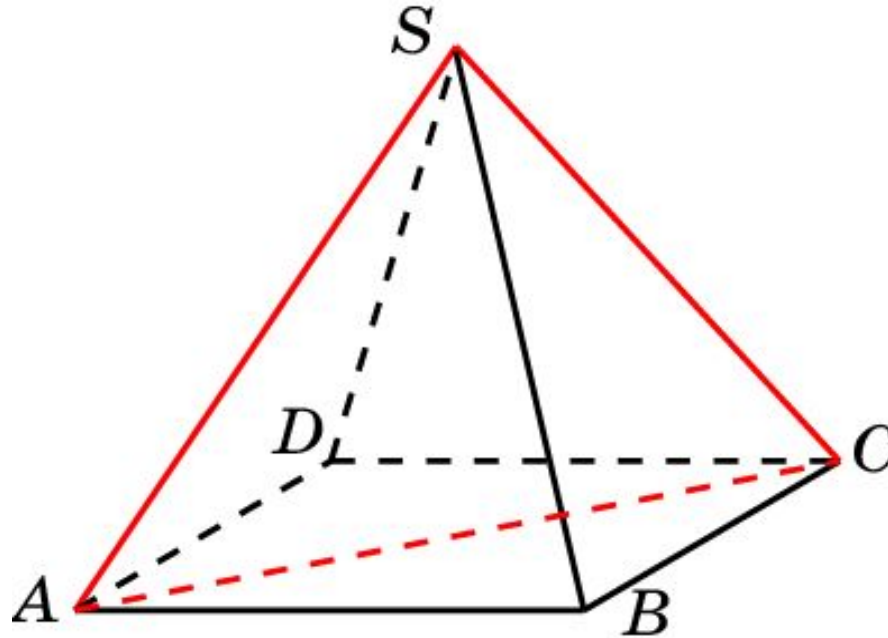
В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми  $AB$  и  $SC$ .



Ответ:  $60^\circ$ .

## Пирамида 6

В правильной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми  $SA$  и  $SC$ .

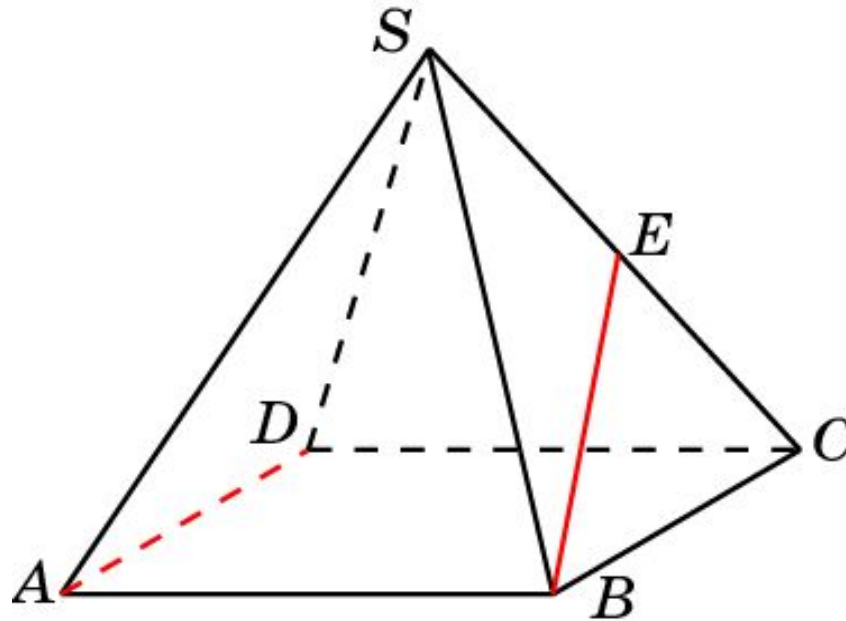


**Решение.** В треугольнике  $SAC$   $SA = SC = 1$ ,  $AC = \sqrt{2}$ . Следовательно, искомый угол равен  $90^\circ$ .

**Ответ:**  $90^\circ$ .

## Пирамида 7

В правильной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны 1, точка  $E$  – середина ребра  $SC$ . Найдите угол между прямыми  $AD$  и  $BE$ .

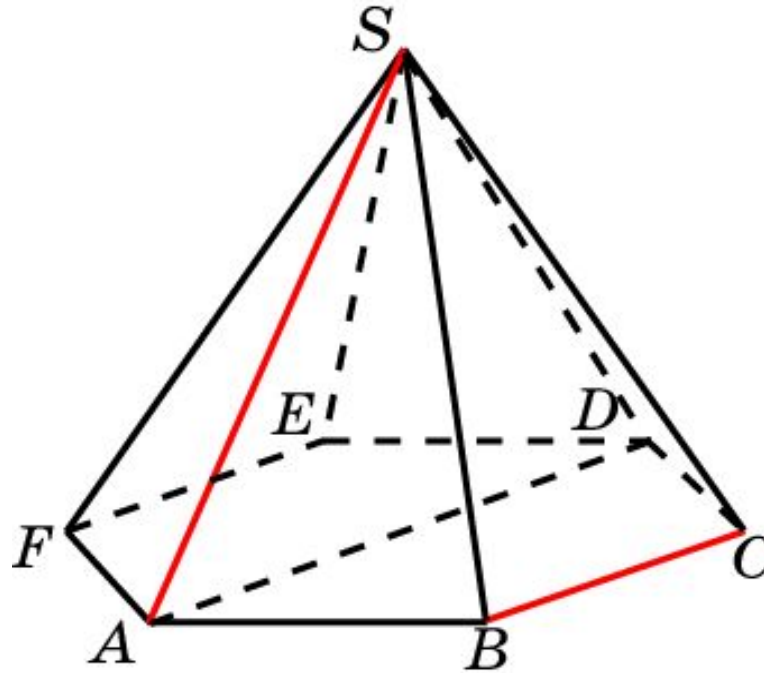


**Решение.** Искомый угол равен углу  $CBE$ . Он равен  $30^\circ$ .

**Ответ:**  $30^\circ$ .

## Пирамида 8

В правильной 6-ой пирамиде  $SAB CDEF$ , боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите угол между прямыми  $SA$  и  $BC$ .

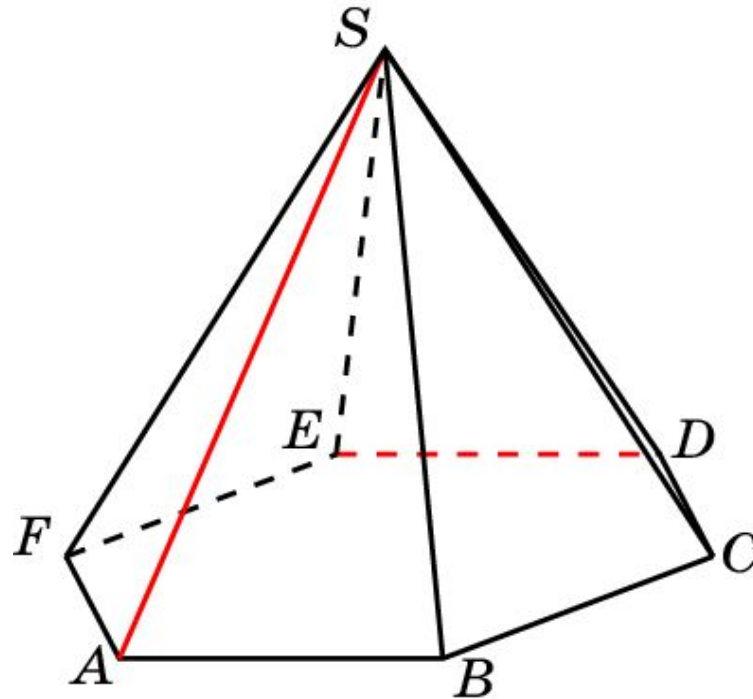


**Решение:** Искомый угол равен углу  $SAD$ . Треугольник  $SAD$  – равносторонний, следовательно,  $\angle SAD = 60^\circ$ .

**Ответ:**  $60^\circ$ .

## Пирамида 9

В правильной 6-ой пирамиде  $SAB CDEF$ , боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите косинус угла между прямыми  $SA$  и  $DE$ .

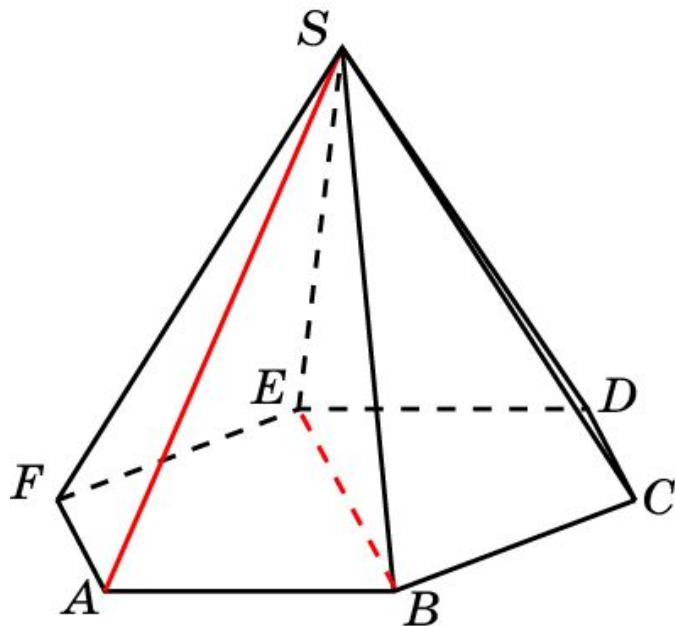


Ответ:  $\cos \varphi = \frac{1}{4}$ .



## Пирамида 10

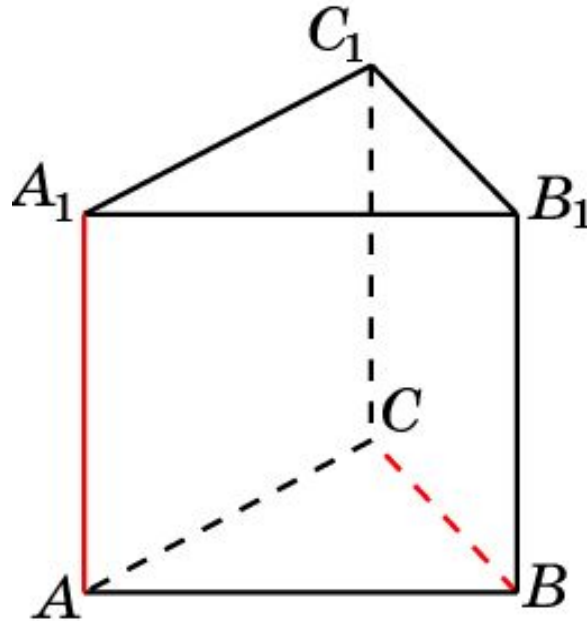
В правильной 6-ой пирамиде  $SAB CDEF$ , боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите косинус угла между прямыми  $SA$  и  $BE$ .



Ответ:  $\cos \varphi = \frac{1}{4}$ .

## Призма 1

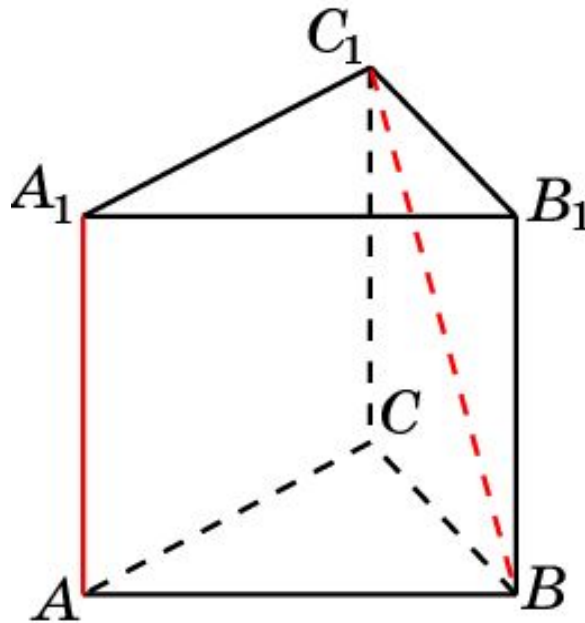
В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми  $AA_1$  и  $BC$ .



Ответ:  $90^\circ$ .

## Призма 2

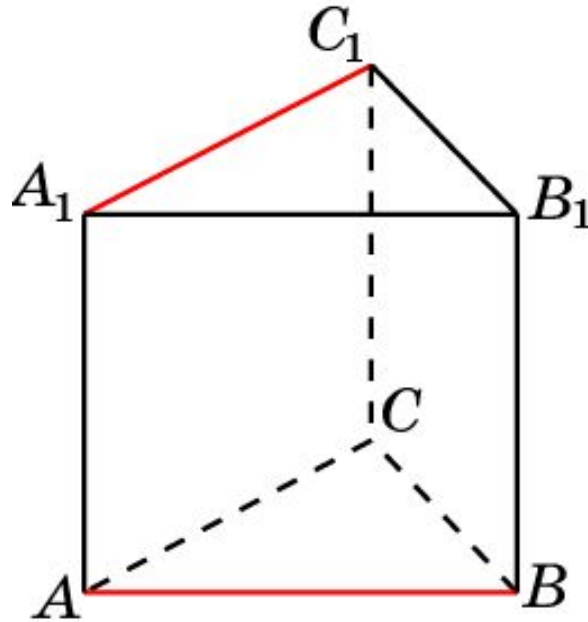
В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми  $AA_1$  и  $BC_1$ .



Ответ:  $45^\circ$ .

## Призма 3

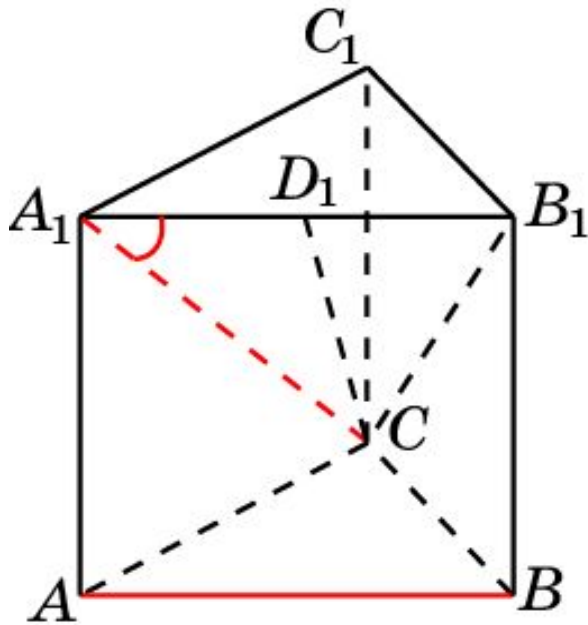
В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми  $AB$  и  $A_1C_1$ .



Ответ:  $60^\circ$ .

## Призма 4

В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми  $AB$  и  $A_1C$ .

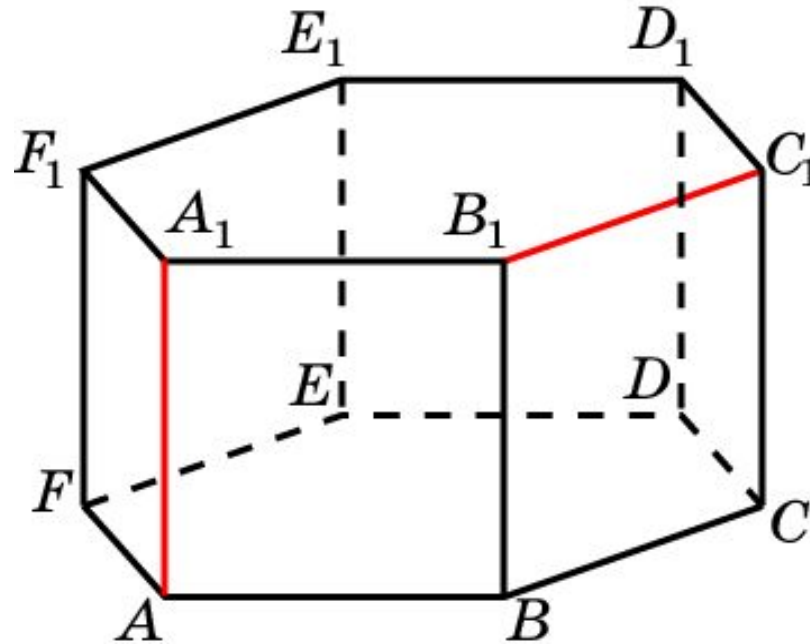


**Решение:** Искомый угол равен углу  $B_1A_1C$ . В треугольнике  $B_1A_1C$  проведем высоту  $CD_1$ . В прямоугольном треугольнике  $A_1CD_1$  катет  $A_1D_1$  равен 0,5; гипотенуза  $A_1C$  равна  $\sqrt{2}$ . Следовательно,

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

## Призма 5

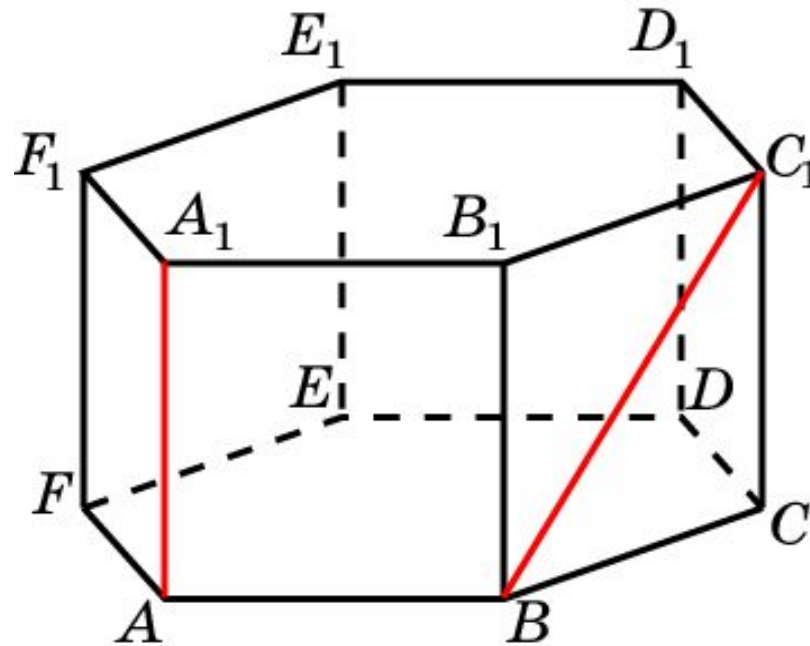
В правильной 6-й призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми  $AA_1$  и  $B_1 C_1$ .



Ответ:  $90^\circ$ .

## Призма 6

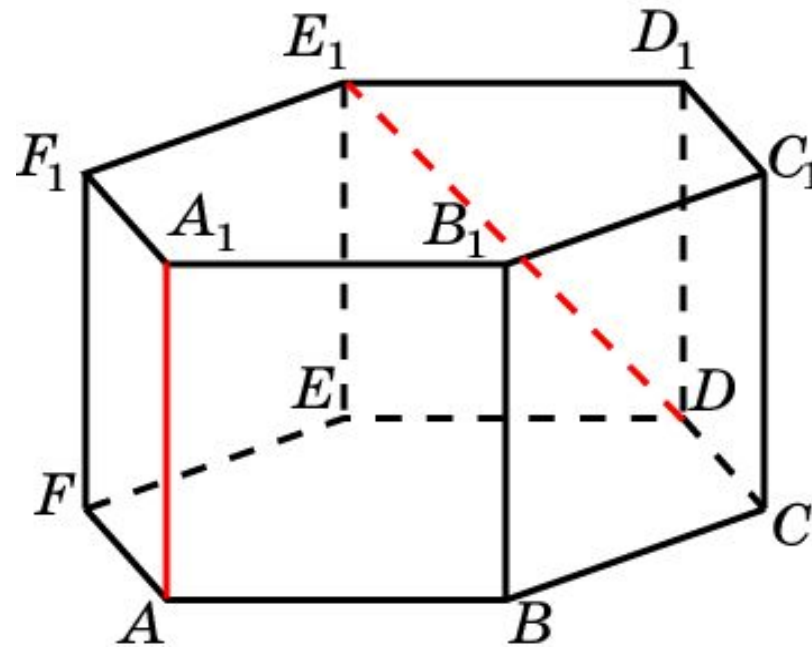
В правильной 6-й призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми  $AA_1$  и  $BC_1$ .



Ответ:  $45^\circ$ .

## Призма 7

В правильной 6-й призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми  $AA_1$  и  $DE_1$ .

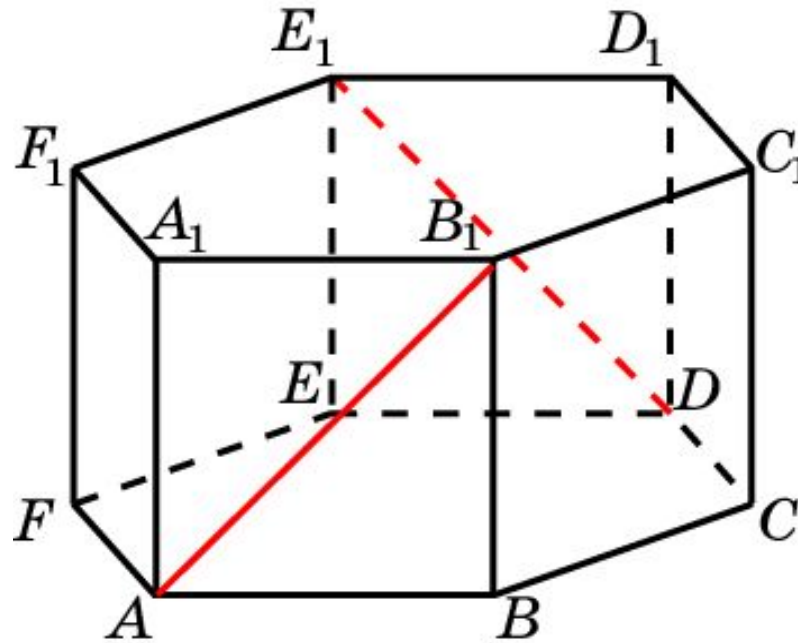


Ответ:  $45^\circ$ .



## Призма 8

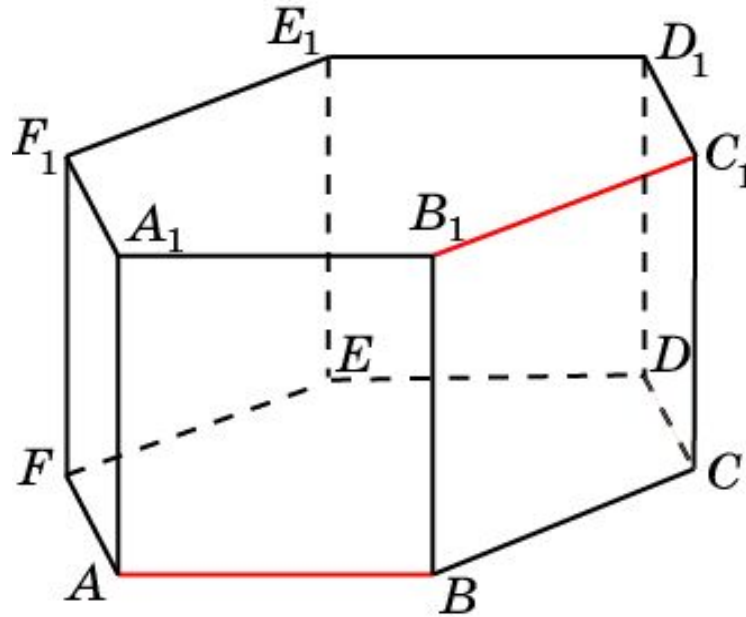
В правильной 6-й призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми  $AB_1$  и  $DE_1$ .



Ответ:  $90^\circ$ .

## Призма 9

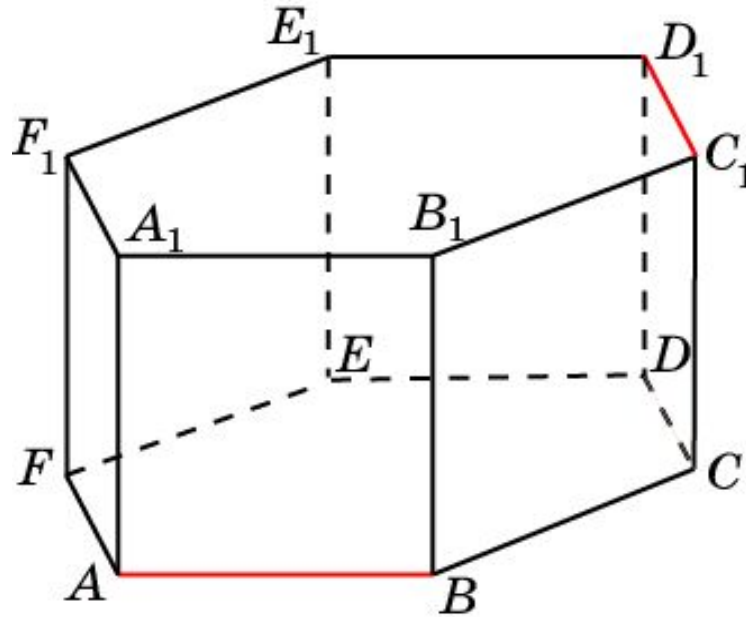
В правильной 6-й призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми  $AB$  и  $B_1 C_1$ .



Ответ:  $60^\circ$ .

## Призма 10

В правильной 6-й призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми  $AB$  и  $C_1 D_1$ .



Ответ:  $60^\circ$ .