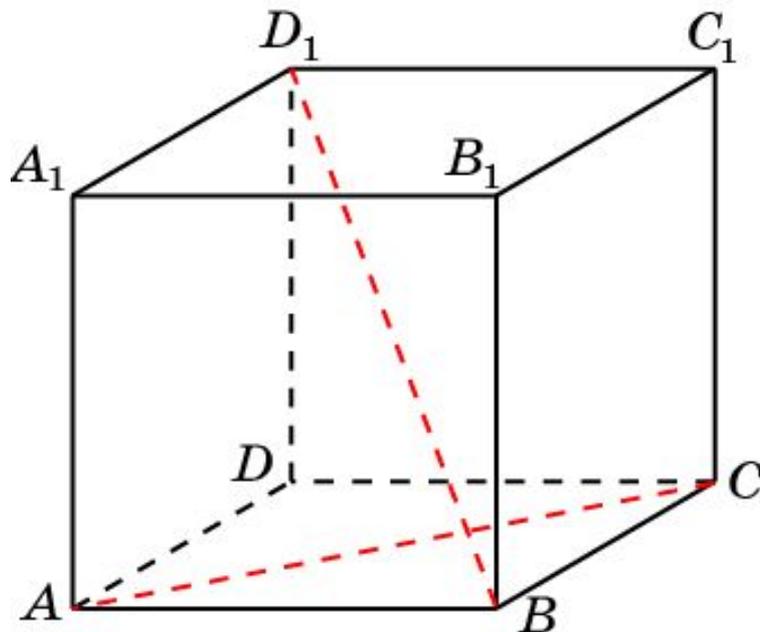


Куб 1

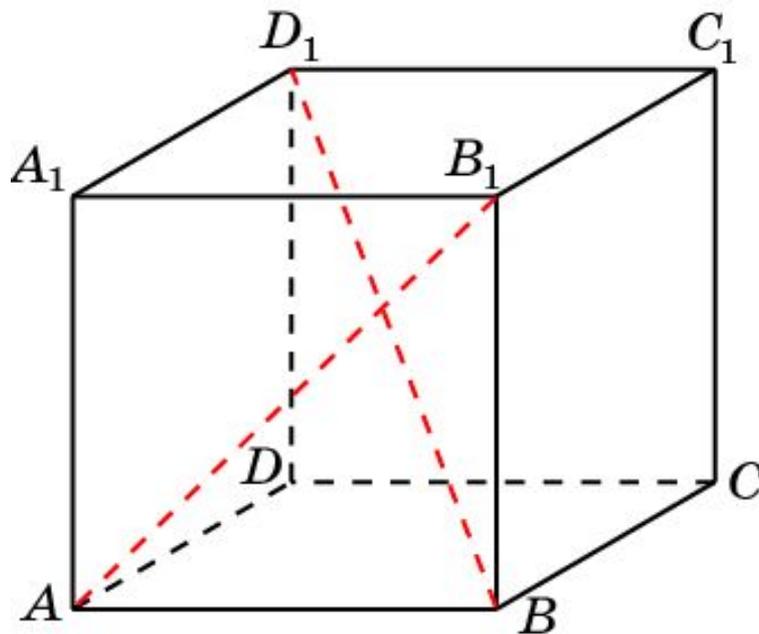
В кубе $A\dots D_1$ найдите угол между прямыми AC и BD_1 .



Ответ. 90° .

Куб 2

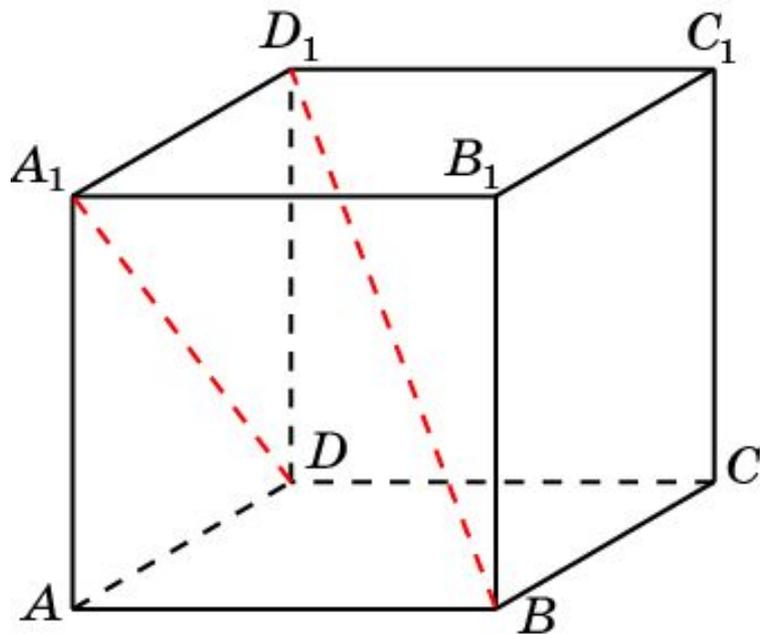
В кубе $A\dots D_1$ найдите угол между прямыми AB_1 и BD_1 .



Ответ. 90° .

Куб 3

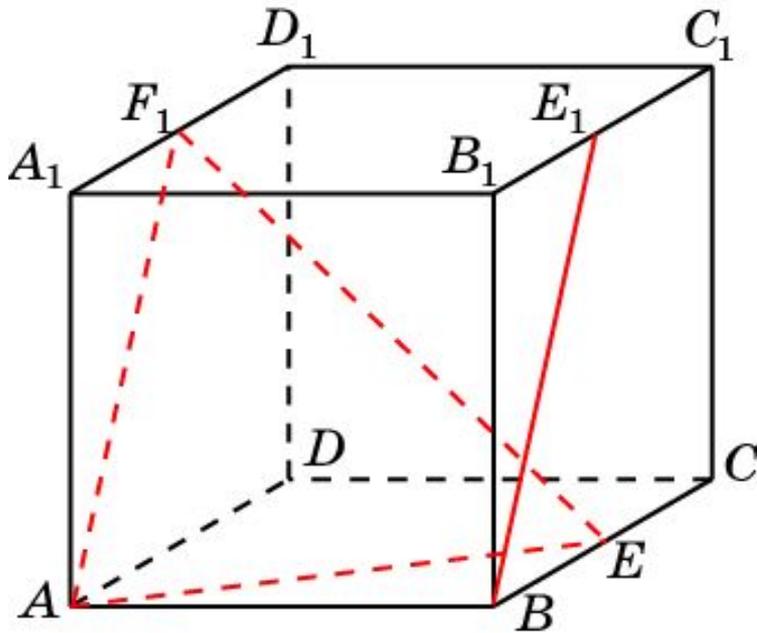
В кубе $A\dots D_1$ найдите угол между прямыми DA_1 и BD_1 .



Ответ. 90° .

Куб 4

В единичном кубе $A\dots D_1$ найдите косинус угла между прямыми AE и BE_1 , где E и E_1 – середины ребер соответственно BC и B_1C_1 .



Решение. Через точку A проведем прямую AF_1 , параллельную BE_1 . Искомый угол равен углу EAF_1 . В треугольнике AEF_1

$$AE = AF_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad EF_1 = \sqrt{2}.$$

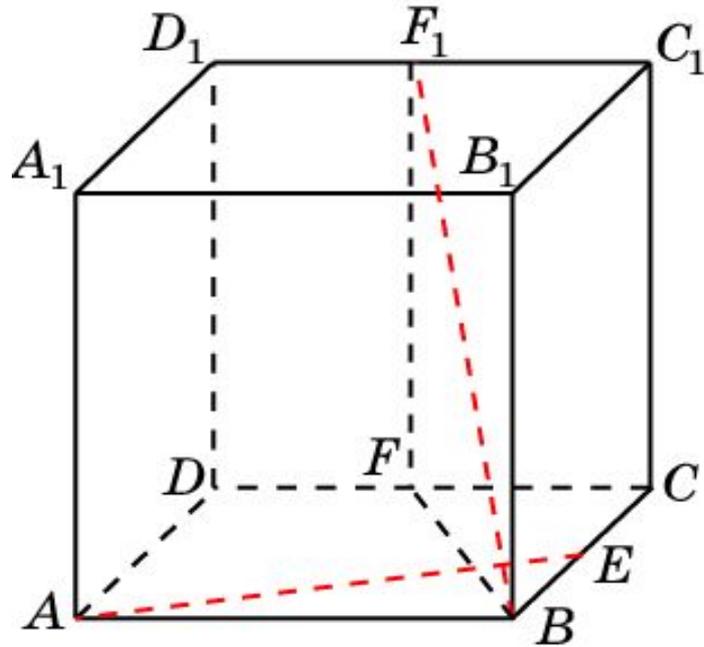
По теореме косинусов находим

$$\cos \angle EAF_1 = 0,2.$$

Ответ. $\cos \angle EAF_1 = 0,2$.

Куб 5

В кубе $A\dots D_1$ найдите угол между прямыми AE и BF_1 , где E и F_1 – середины ребер соответственно BC и C_1D_1 .

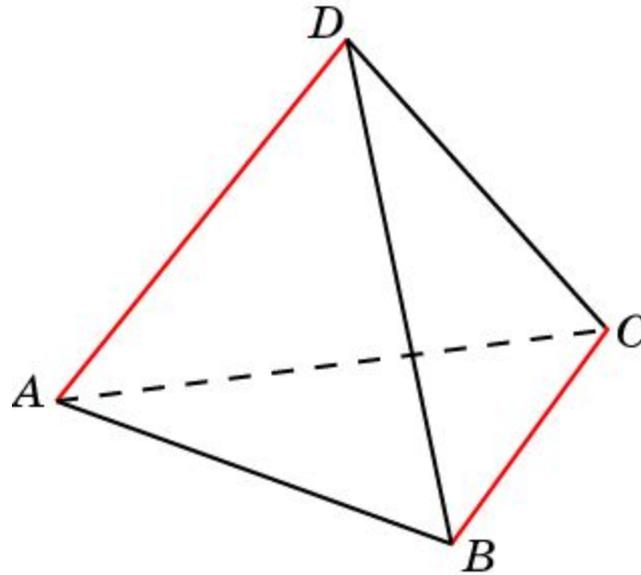


Решение. Из точки F_1 опустим перпендикуляр F_1F на прямую CD . Прямая AE перпендикулярна BF , следовательно, она перпендикулярна BF_1 .

Ответ. 90° .

Пирамида 1

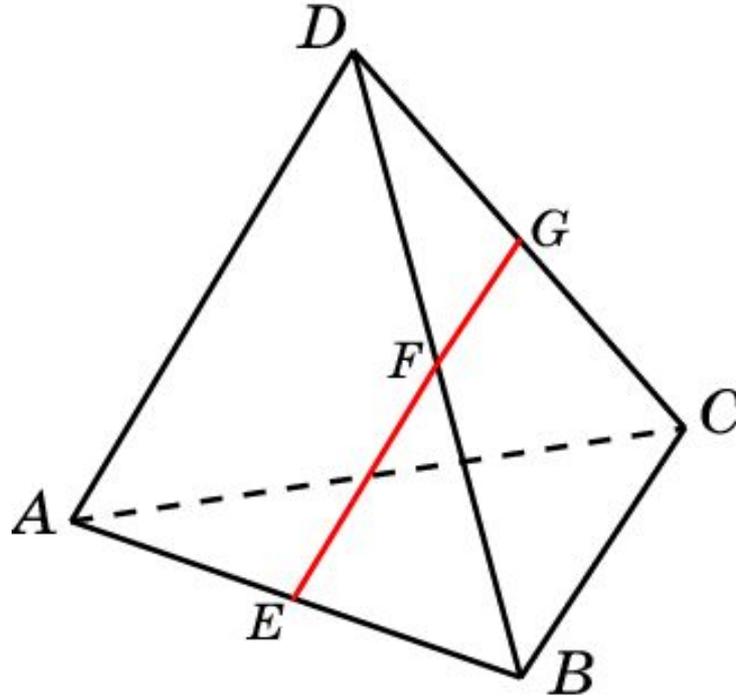
В правильном тетраэдре $ABCD$ найдите угол между прямыми AD и BC .



Ответ: 90° .

Пирамида 1

В правильном тетраэдре $ABCD$ точки E, F, G – середины ребер AB, BD, CD . Найдите угол EFG .

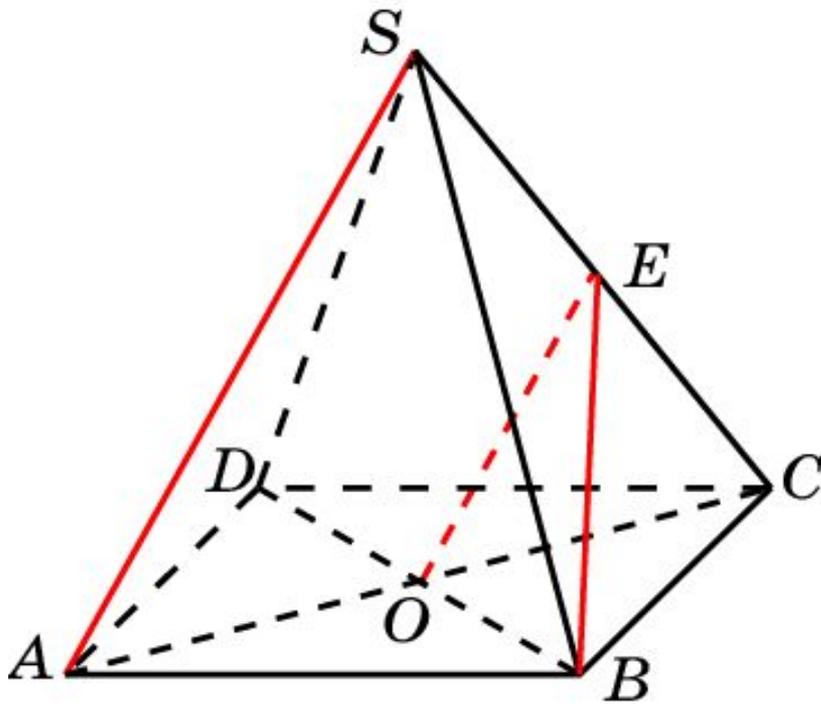


Решение. Прямые EF и FG параллельны прямым AD и BC , которые перпендикулярны. Следовательно, угол между ними равен 90° .

Ответ: 90° .

Пирамида 2

В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точка E – середина ребра SC . Найдите тангенс угла между прямыми SA и BE .



Решение. Через точку E проведем прямую, параллельную SA . Она пересечет основание в точке O . Искомый угол φ равен углу OEB . В прямоугольном треугольнике OEB имеем:

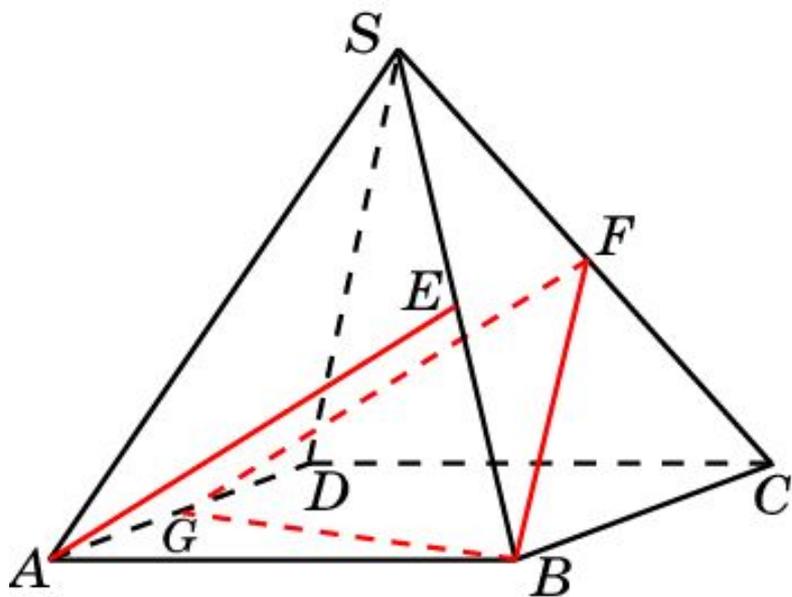
$$OB = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad OE = \frac{1}{2}. \quad \text{Следовательно,}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{2}.$$

Ответ: $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{2}$.

Пирамида 3

В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точки E, F – середины ребер SB и SC . Найдите косинус угла между прямыми AE и BF .



Решение. Обозначим G серединой ребра AD . Прямая GF параллельна AE . Искомый угол равен углу BFG . В треугольнике BFG имеем:

$$BF = GF = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad BG = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

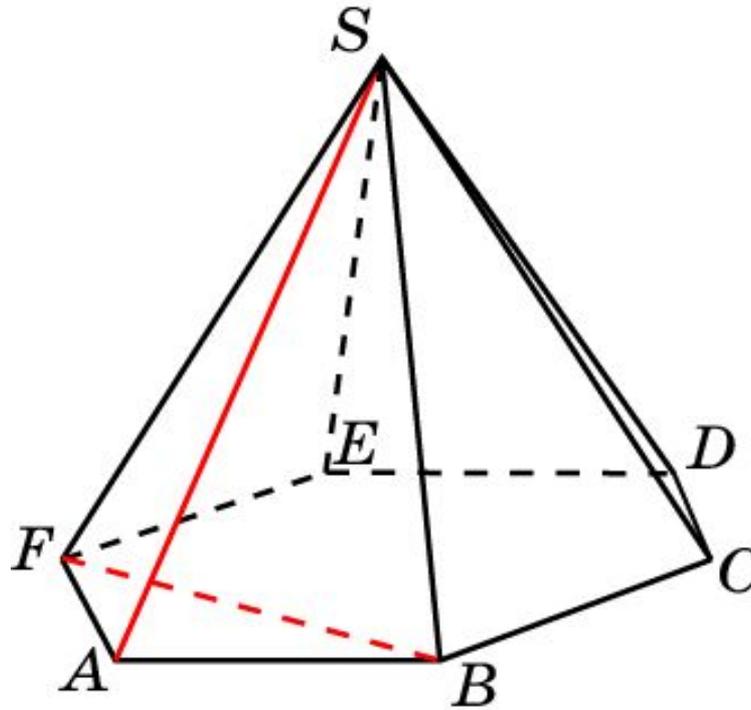
По теореме косинусов находим

$$\cos \angle BFG = \frac{1}{6}.$$

Ответ: $\cos \angle BFG = \frac{1}{6}$.

Пирамида 4

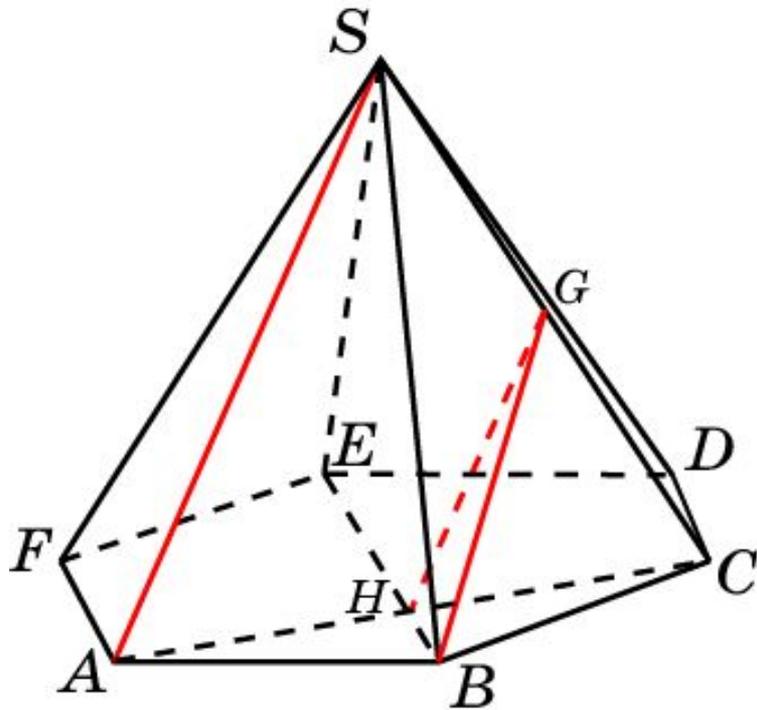
В правильной пирамиде $SAB CDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите угол между прямыми SA и BF .



Ответ: 90° .

Пирамида 5

В правильной пирамиде $SAB CDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, точка G – середина ребра SC . Найдите тангенс угла между прямыми SA и BG .



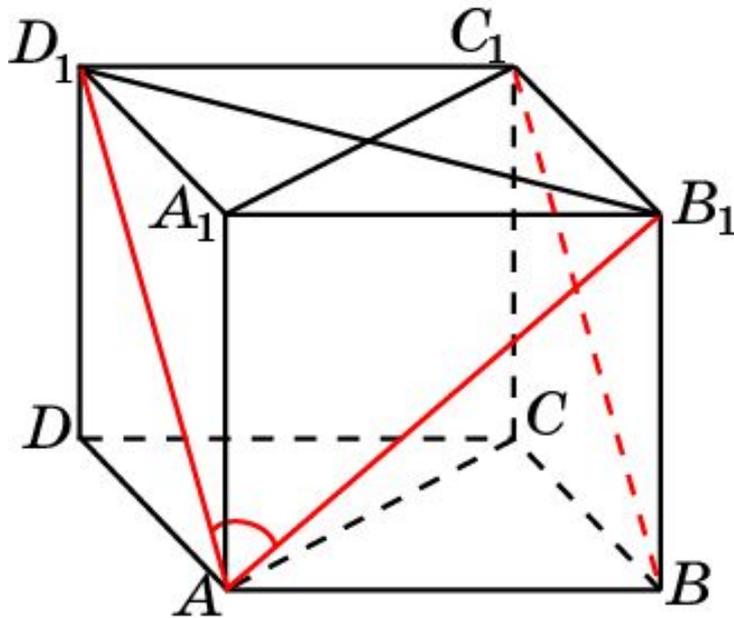
Решение. Обозначим H серединой отрезка AC . Прямая GH параллельна SA . Искомый угол равен углу BGH . В треугольнике BGH имеем:

$$BH = 0,5, \quad GH = 1. \quad \operatorname{tg} \angle BGH = 0,5.$$

Ответ: $\operatorname{tg} \angle BGH = 0,5$.

Призма 1

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1 .



Решение: Достроим призму до 4-х угольной призмы. Проведем AD_1 параллельно BC_1 . Искомый угол будет равен углу B_1AD_1 .

В треугольнике AB_1D_1

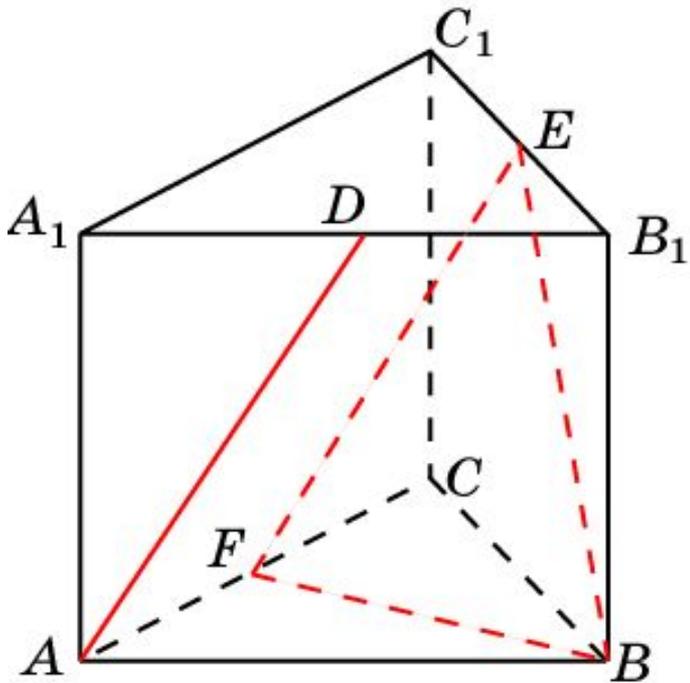
$$AB_1 = AD_1 = \sqrt{2}, B_1D_1 = \sqrt{3}.$$

Используя теорему косинусов, находим

$$\cos \varphi = \frac{1}{4}.$$

Призма 2

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точки D, E – середины ребер A_1B_1 и B_1C_1 . Найдите косинус угла между прямыми AD и BE .



Решение. Обозначим F середину отрезка AC . Прямая EF параллельна AD . Искомый угол равен углу BEF .

В треугольнике BGF имеем:

$$BE = FE = \frac{\sqrt{5}}{2}, BF = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

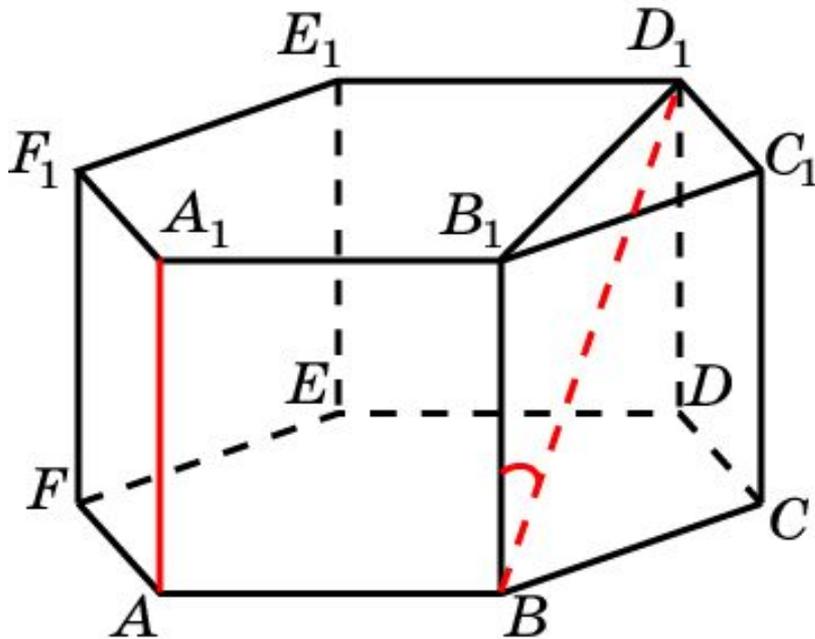
По теореме косинусов находим

$$\cos \angle BEF = 0,7.$$

Ответ. $\cos \angle BEF = 0,7$.

Призма 3

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AA_1 и BD_1 .

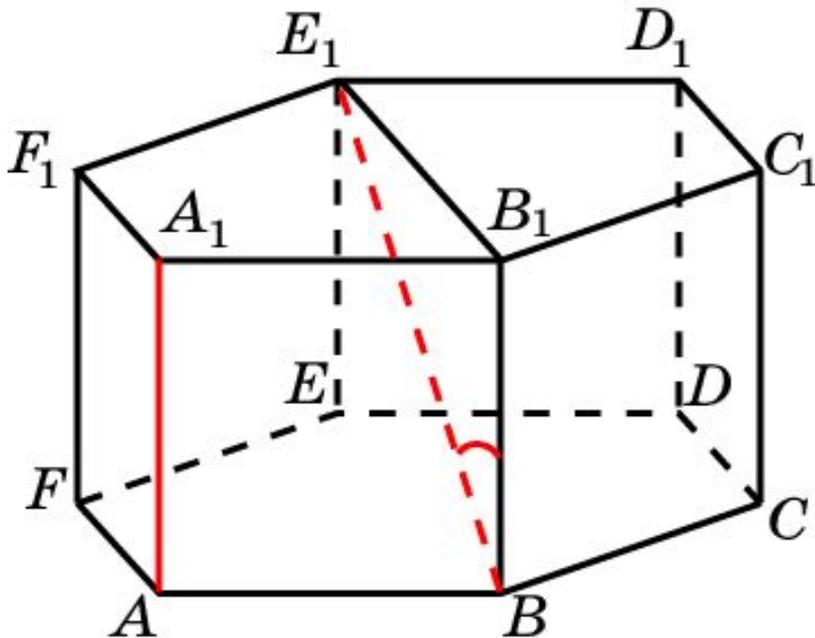


Решение: Искомый угол равен углу B_1BD_1 . В прямоугольном треугольнике B_1BD_1 $B_1D_1 = \sqrt{3}$; $B_1B = 1$; $BD_1 = 2$. Следовательно, искомый угол равен 60° .

Ответ. 60° .

Призма 4

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямыми AA_1 и BE_1 .

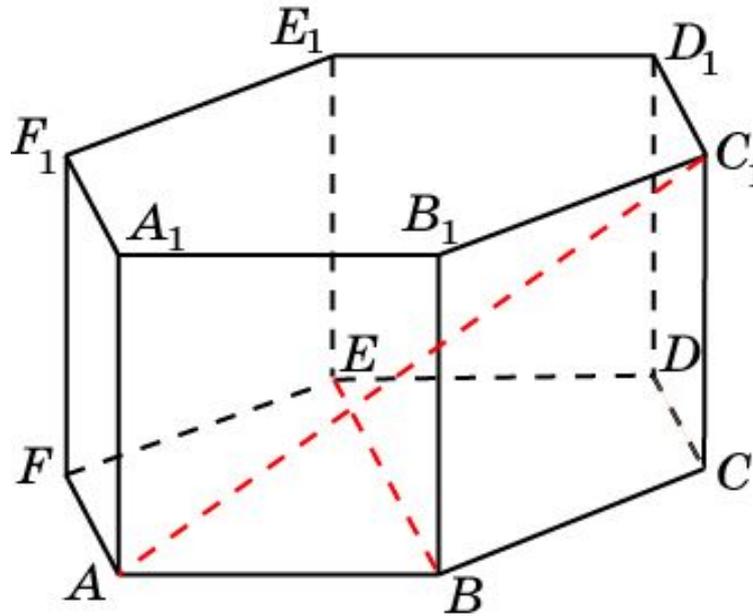


Решение: Искомый угол равен углу B_1BE_1 . В прямоугольном треугольнике B_1BE_1 катет B_1E_1 равен 2; катет B_1B равен 1. Следовательно, $tg \angle B_1BE_1 = 2$.

Ответ. 2.

Призма 5

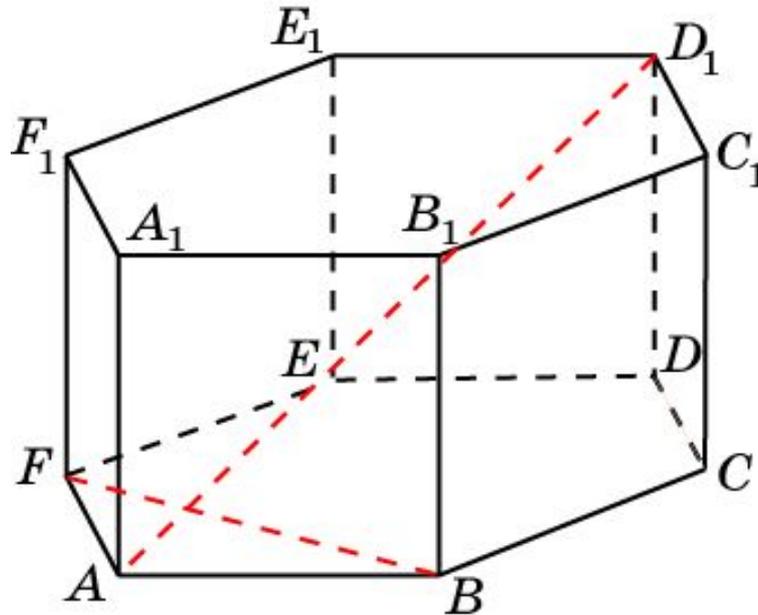
В правильной 6-й призме $A\dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AC_1 и BE .



Ответ. 90° .

Призма 6

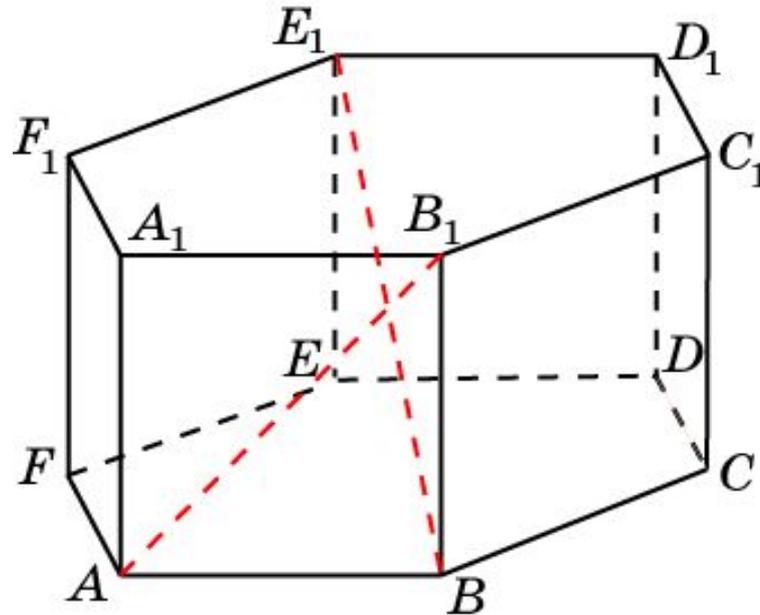
В правильной 6-й призме $A\dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AD_1 и BF .



Ответ. 90° .

Призма 7

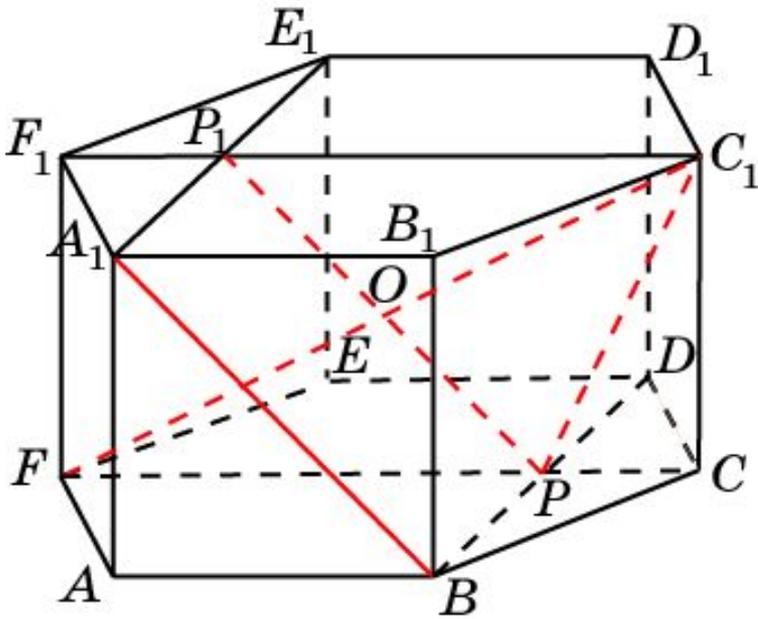
В правильной 6-й призме $A\dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и BE_1 .



Ответ. 90° .

Призма 8

В правильной 6-й призме $A\dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми BA_1 и FC_1 .



Решение: Через середину O отрезка FC_1 проведем прямую PP_1 , параллельную BA_1 . Искомый угол равен углу POC_1 . В треугольнике POC_1 имеем:

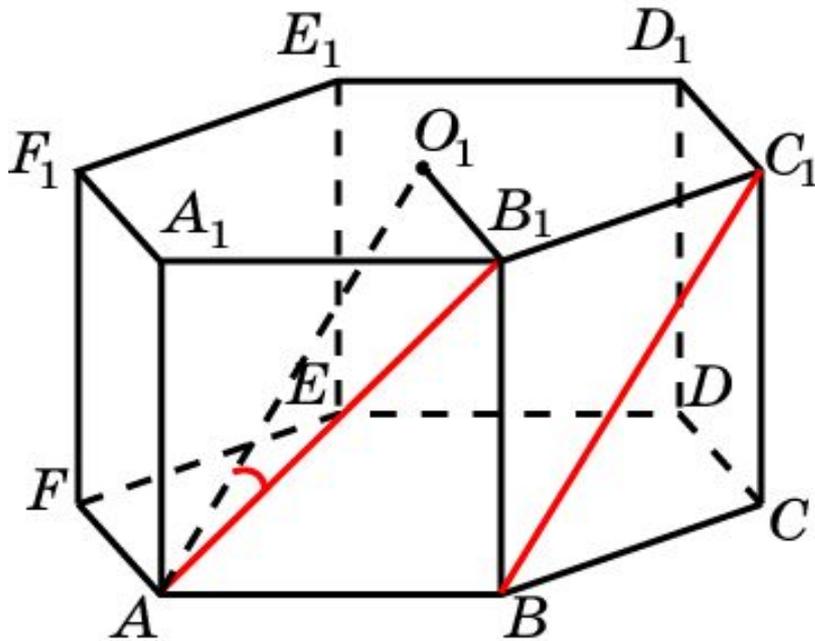
$$PO = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad OC_1 = PC_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Следовательно, } \cos \angle POC_1 = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Ответ. $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Призма 9

В правильной 6-й призме $A\dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1 .

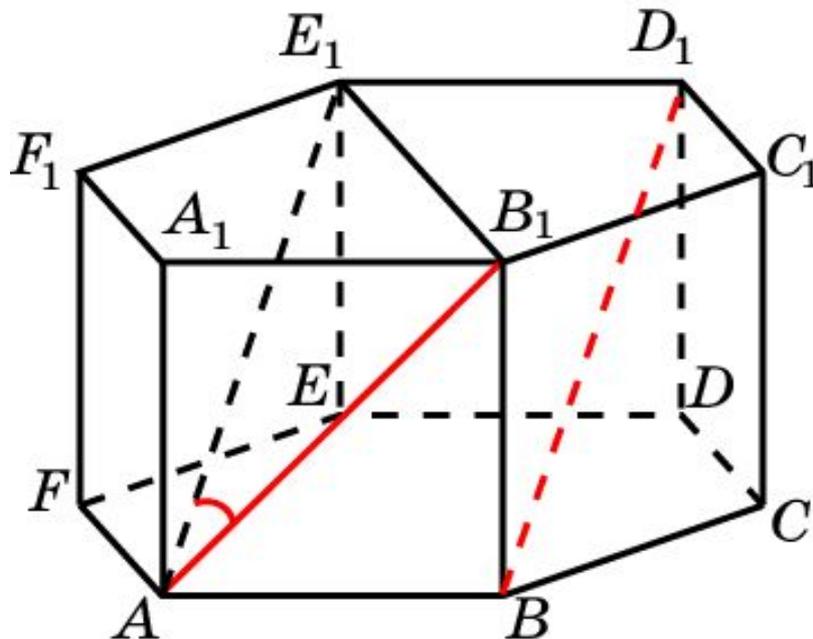


Решение: Пусть O_1 – центр правильного 6-ка $A_1\dots F_1$. Тогда AO_1 параллельна BC_1 , и искомый угол равен углу B_1AO_1 . В равнобедренном треугольнике B_1AO_1 $O_1B_1=1$; $AB_1=AO_1=\sqrt{2}$. Применяя теорему косинусов, получим

$$\cos \varphi = \frac{3}{4}.$$

Призма 10

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BD_1 .

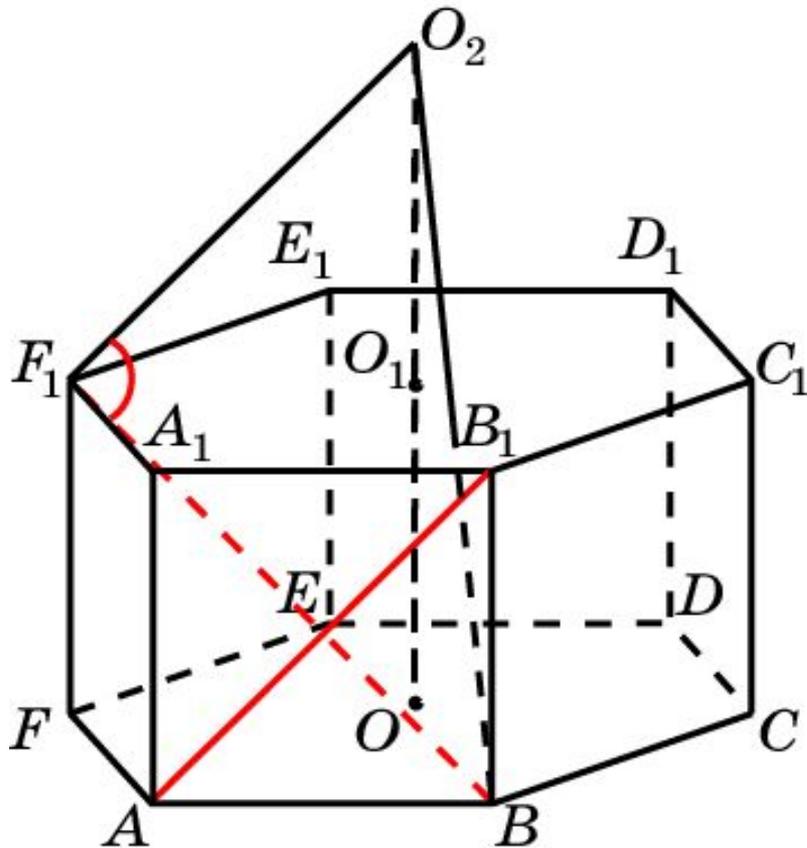


Решение: Искомый угол равен углу B_1AE_1 . В треугольнике B_1AE_1 $AB_1 = \sqrt{2}$; $B_1E_1 = AE_1 = 2$. Следовательно,

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Призма 11

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BF_1 .

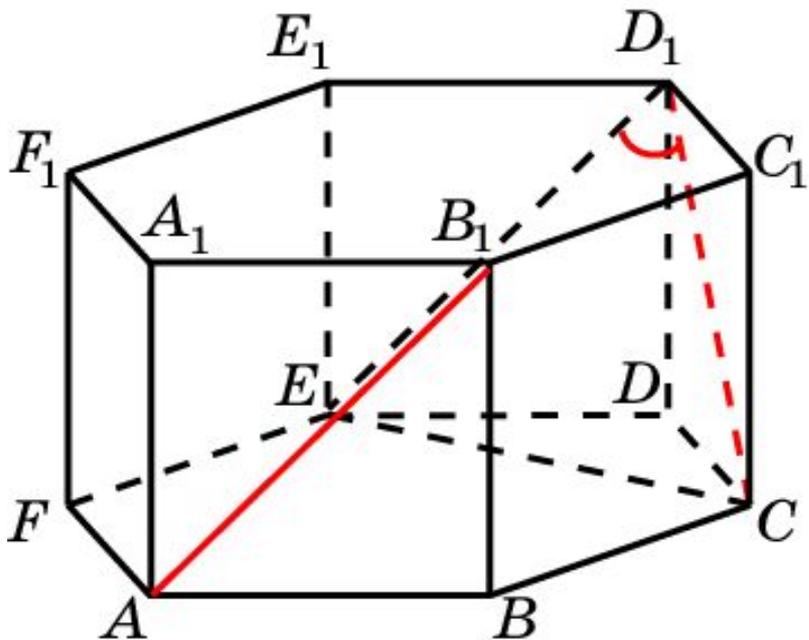


Решение: Пусть O, O_1 – центры оснований призмы. На оси призмы отложим $O_1O_2 = OO_1$. Тогда F_1O_2 будет параллельна AB_1 , и искомый угол будет равен углу BF_1O_2 . В треугольнике BF_1O_2 $BO_2 = BF_1 = 2$; $F_1O_2 = \sqrt{5}$. По теореме косинусов, имеем

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

Призма 12

В правильной 6-й призме $A\dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и CD_1 .

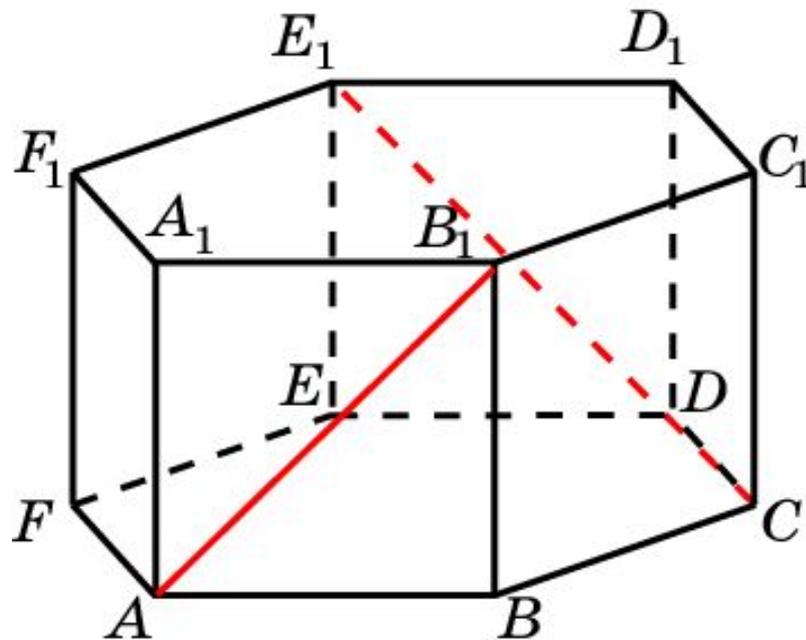


Решение: Искомый угол равен углу CD_1E . В треугольнике CD_1E $CD_1 = ED_1 = \sqrt{2}$; $CE = \sqrt{3}$. По теореме косинусов, имеем

$$\cos \varphi = \frac{1}{4}.$$

Призма 13

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и CE_1 .

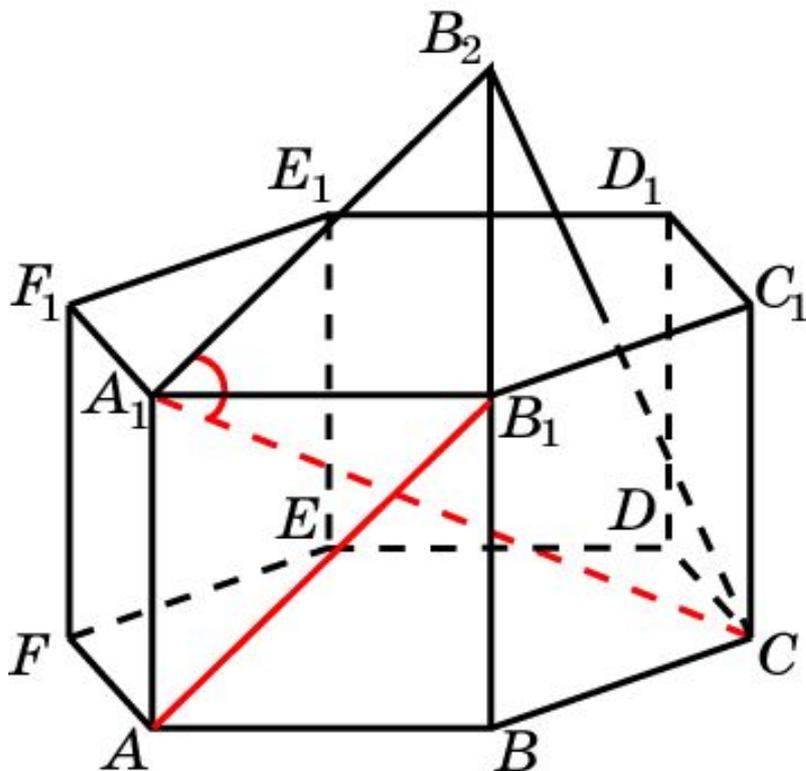


Решение: Заметим, что CE_1 параллельна BF_1 . Следовательно, искомый угол равен углу между AB_1 и BF_1 , который был найден ранее. А именно,

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

Призма 15

В правильной 6-й призме $A\dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и CA_1 .

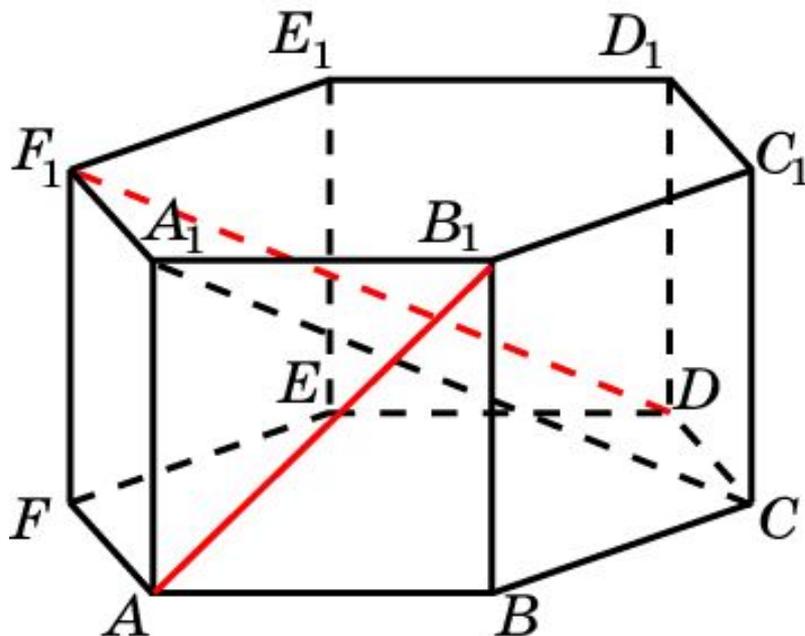


Решение: На продолжении BB_1 отложим $B_1B_2 = BB_1$. Тогда A_1B_2 будет параллельна AB_1 , и искомый угол будет равен углу CA_1B_2 . В треугольнике CA_1B_2 $CA_1 = 2$; $CB_2 = \sqrt{5}$; $A_1B_2 = \sqrt{2}$. Тогда

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

Призма 16

В правильной 6-й призме $A\dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и DF_1 .

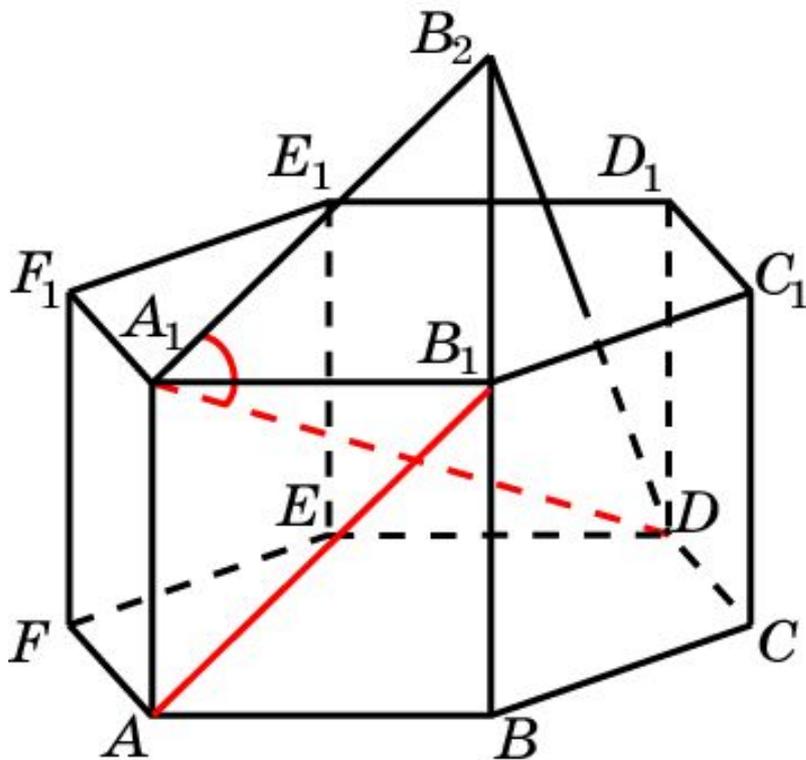


Решение: Заметим, что DF_1 параллельна CA_1 . Следовательно, искомый угол равен углу между AB_1 и CA_1 , который был найден ранее. А именно,

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

Призма 17

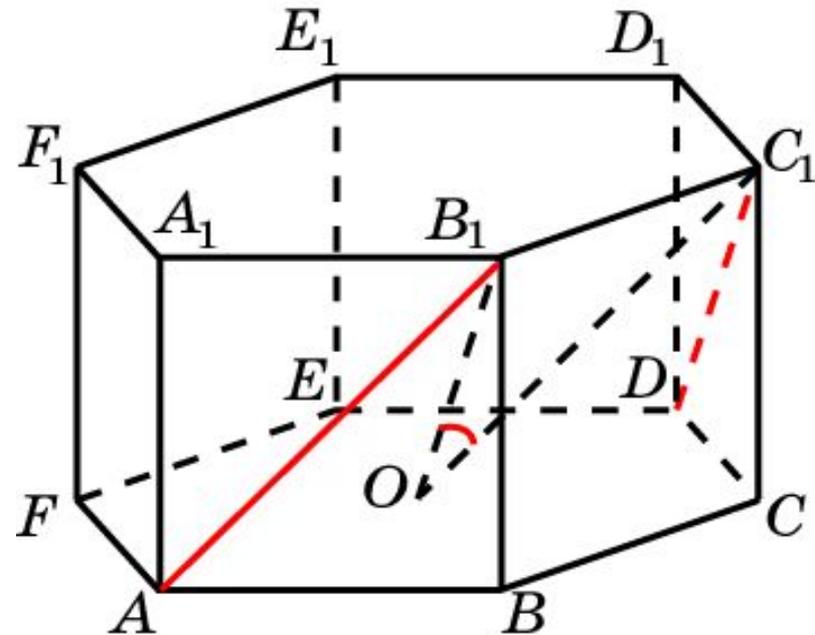
В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и DA_1 .



Решение: На продолжении BB_1 отложим $B_1B_2 = BB_1$. Тогда A_1B_2 будет параллельна AB_1 , и искомый угол будет равен углу DA_1B_2 . В треугольнике DA_1B_2 $DA_1 = \sqrt{5}$; $DB_2 = \sqrt{7}$; $A_1B_2 = \sqrt{2}$. Следовательно, искомый угол равен 90° .

Призма 18

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и DC_1 .

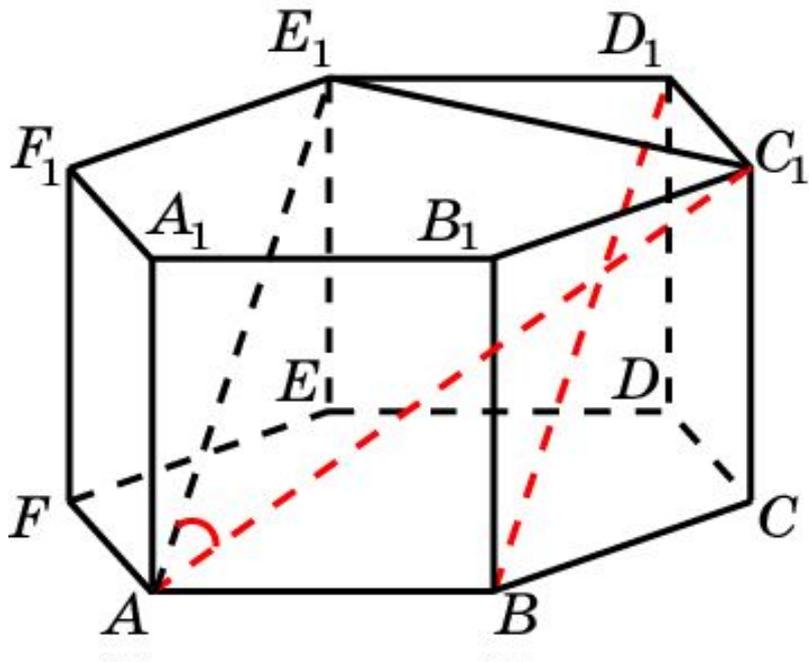


Решение: Пусть O – центр основания призмы. Отрезки OC_1 и OB_1 будут равны и параллельны отрезкам AB_1 и DC_1 , соответственно. Искомый угол будет равен углу B_1OC_1 . В треугольнике B_1OC_1 $OB_1 = OC_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $B_1C_1 = 1$. Тогда, по теореме косинусов

$$\cos \varphi = \frac{3}{4}.$$

Призма 19

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AC_1 и BD_1 .

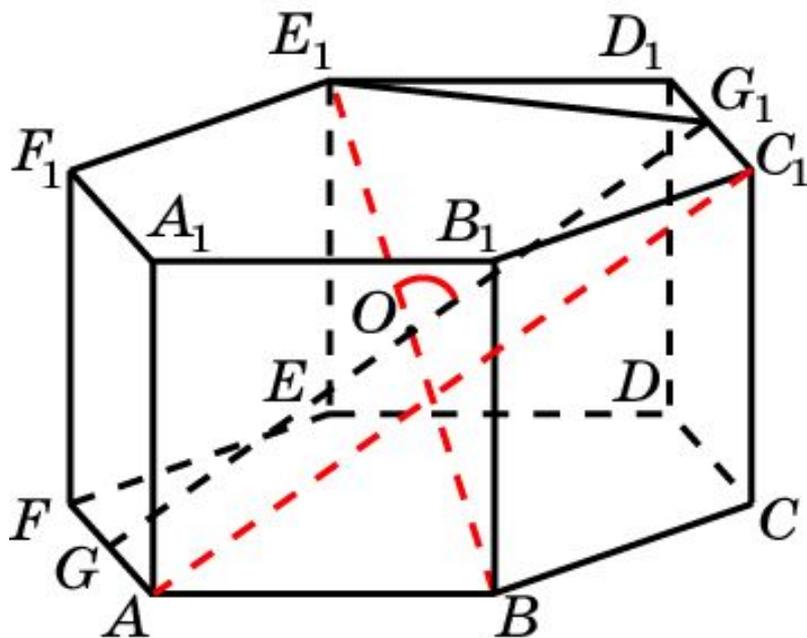


Решение: Заметим, что AE_1 параллельна BD_1 . Следовательно, искомый угол равен углу C_1AE_1 . В треугольнике C_1AE_1 $AC_1 = AE_1 = 2$; $C_1E_1 = \sqrt{3}$. По теореме косинусов, имеем

$$\cos \varphi = \frac{5}{8}.$$

Призма 20

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AC_1 и BE_1 .



Решение: Заметим, что отрезок GG_1 , проходящий через середины ребер AF и C_1D_1 , параллелен и равен отрезку AC_1 . Искомый угол равен углу G_1OE_1 . В треугольнике G_1OE_1
 $OG_1 = 1$; $OE_1 = \sqrt{5}$; $G_1E_1 = \sqrt{7}$.

По теореме косинусов, имеем²

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{10}.$$