

Лекция 5

1. Постановка задачи численного интегрирования
2. Методы прямоугольников
3. Метод трапеций
4. Метод Симпсона
5. Погрешности численного интегрирования. Правило Рунге

Определенный интеграл

Из курса математического анализа известно, что, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема, то определенный интеграл от этой функции в пределах от a до b существует и может быть вычислен по формуле Ньютона-Лейбница:

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad \text{где} \quad f(x) = F'(x)$$

Методы интегрирования

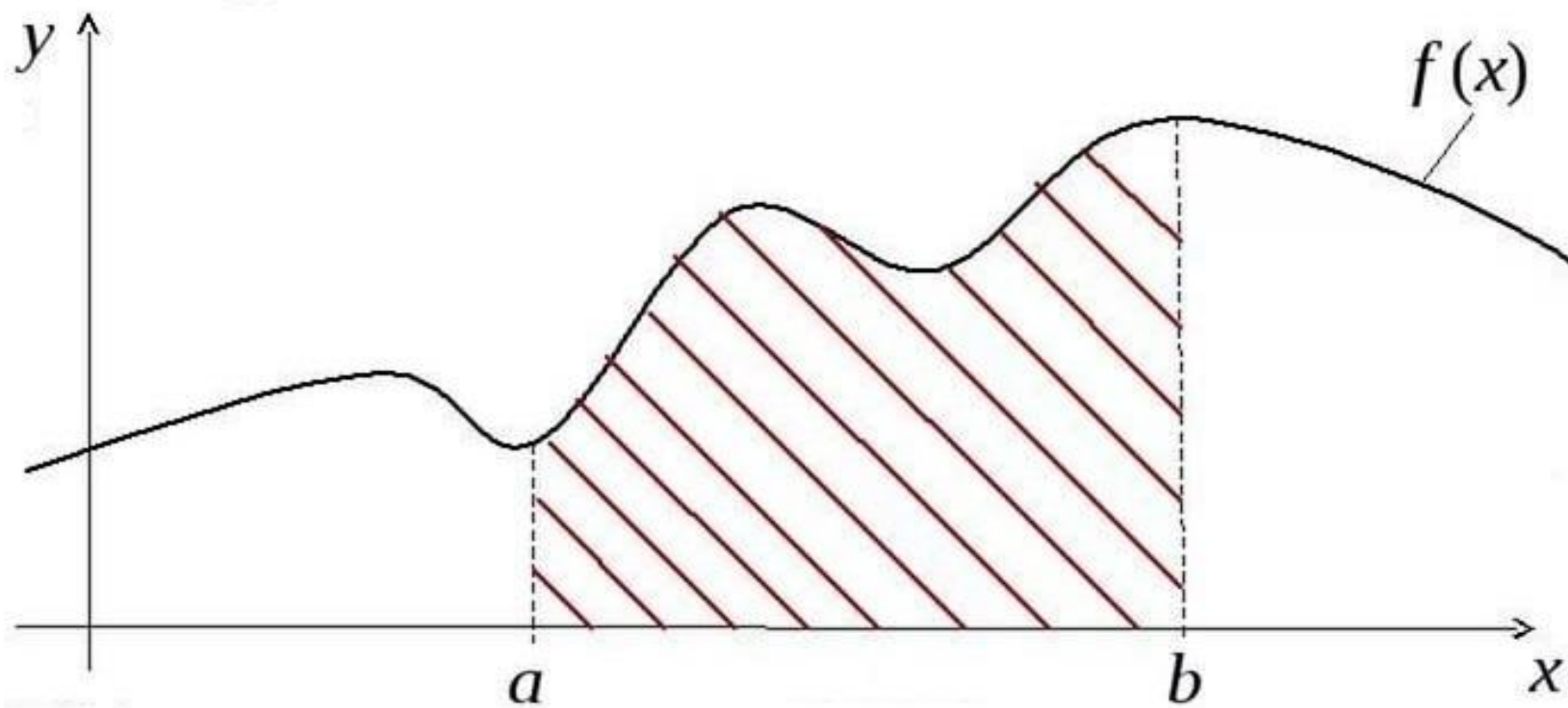
Некоторые методы интегрирования

- *Интегрирование по формулам.*
 - *Внесение под знак дифференциала*
 - *Интегрирование $\int f(x)g(x)dx$ посредством замены переменной.*
 - *Интегрирование по частям.*
-

Геометрический смысл определенного интеграла

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Определенный интеграл S численно равен площади криволинейной трапеции под графиком функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$



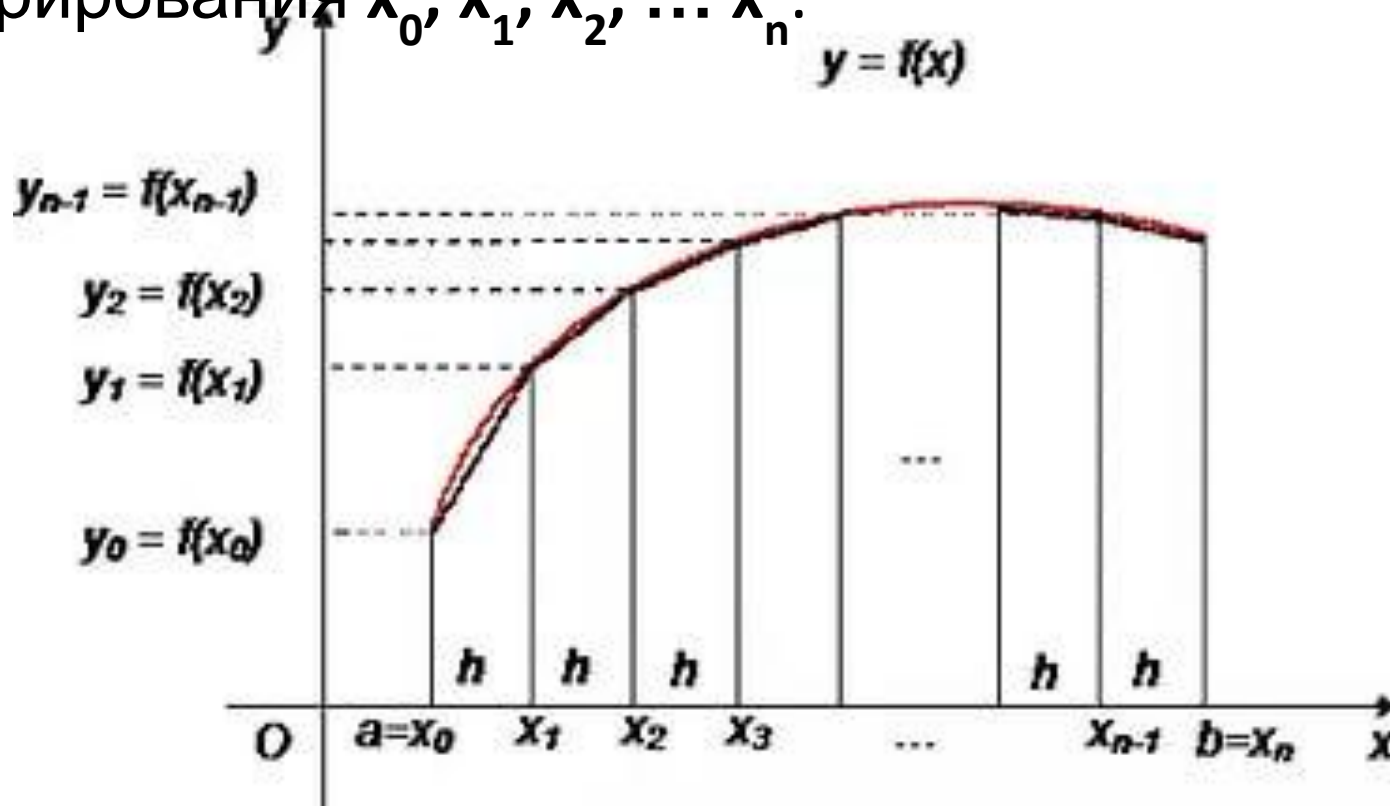
Приближенное вычисление площади криволинейной трапеции

Для приближенного вычисления этой площади отрезок $[a;b]$ разбивается на n частей, внутри которых подинтегральная функция $f(x)$ заменяется с некоторой степенью точности более простыми функциями $g_i(x)$, которые могут быть проинтегрированы аналитически. Тогда

$$S = \int_a^b f(x) dx \cong \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} g_i(x) dx$$

Замена подинтегральной функции интерполяционными полиномами

В качестве заменяющих функций обычно используют интерполяционные полиномы с узлами интерполяции в точках разбиения отрезка интегрирования $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$.



Методы численного интегрирования

Для получения простых формул используют полиномы нулевой, первой и второй степени и, соответственно, получают следующие методы и формулы численного интегрирования:

- методы прямоугольников;
- метод трапеций;
- метод Симпсона.

Очевидно, что во всех случаях замена функции $f(x)$ интерполирующим полиномом приводит к образованию погрешности вычисления значения интеграла. Увеличение числа отрезков разбиения n (уменьшение длины шага интегрирования h) ведет к уменьшению погрешности.

Методы прямоугольников

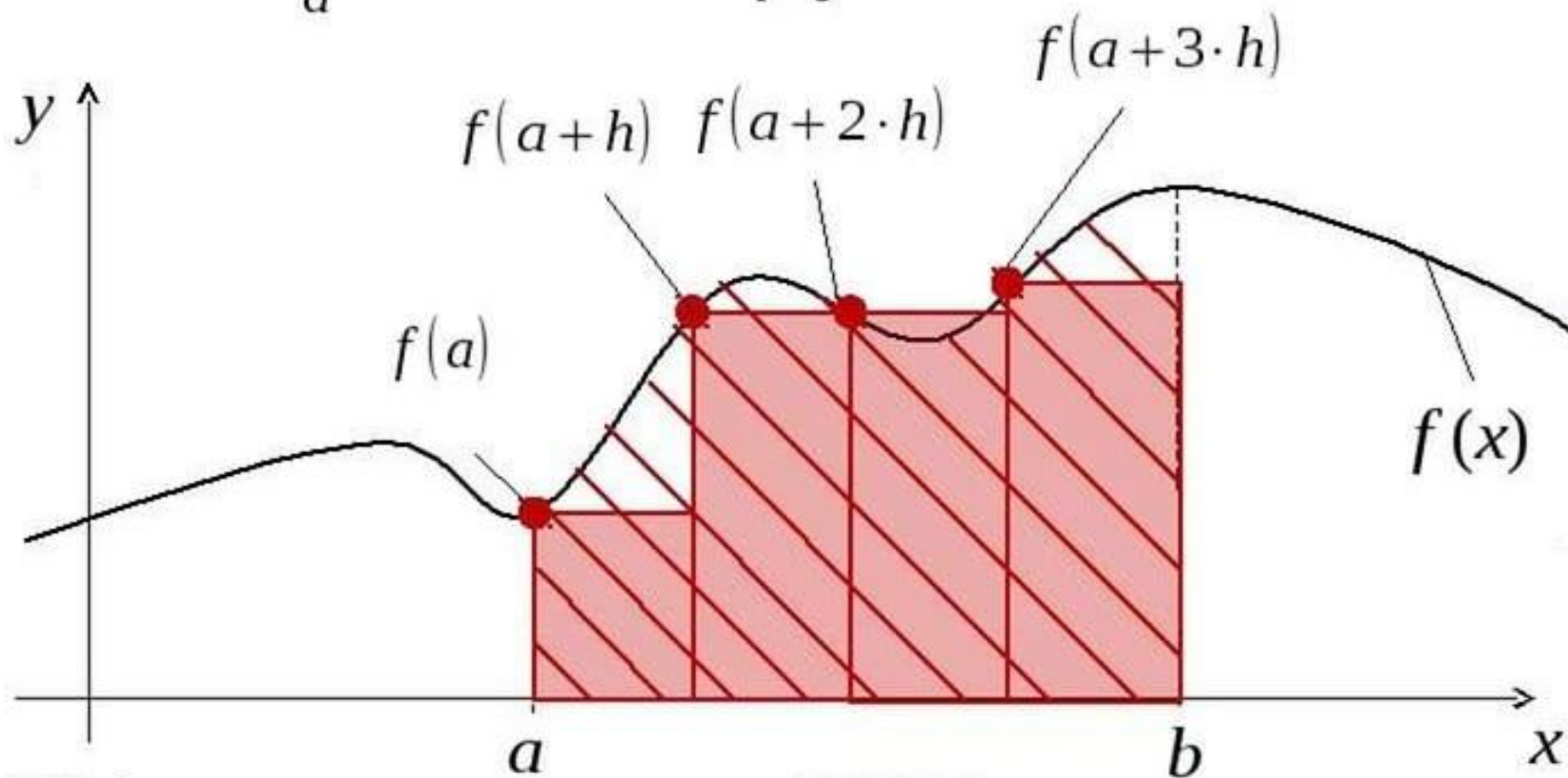
В методах прямоугольников подинтегральная функция $f(x)$ заменяется в пределах каждого элементарного отрезка $[x_i; x_{i+1}]$ интерполяционным полиномом нулевой степени, то есть постоянной величиной. При этом значение элементарного интеграла равно площади прямоугольника, а интеграл на отрезке $[a; b]$ – сумме этих площадей.

Если в качестве значения подинтегральной функции берется ее значение в **левом** конце отрезка, то получается **формула левых прямоугольников**. При использовании значения подинтегральной функции в **правом** конце отрезка получается **формула правых прямоугольников**.

При одном и том же числе отрезков разбиения n большую точность дает **метод средних прямоугольников**, в котором используется значение подинтегральной функции в **середине** отрезка. Поскольку объем вычислений во всех трех случаях одинаков, то более предпочтительным оказывается

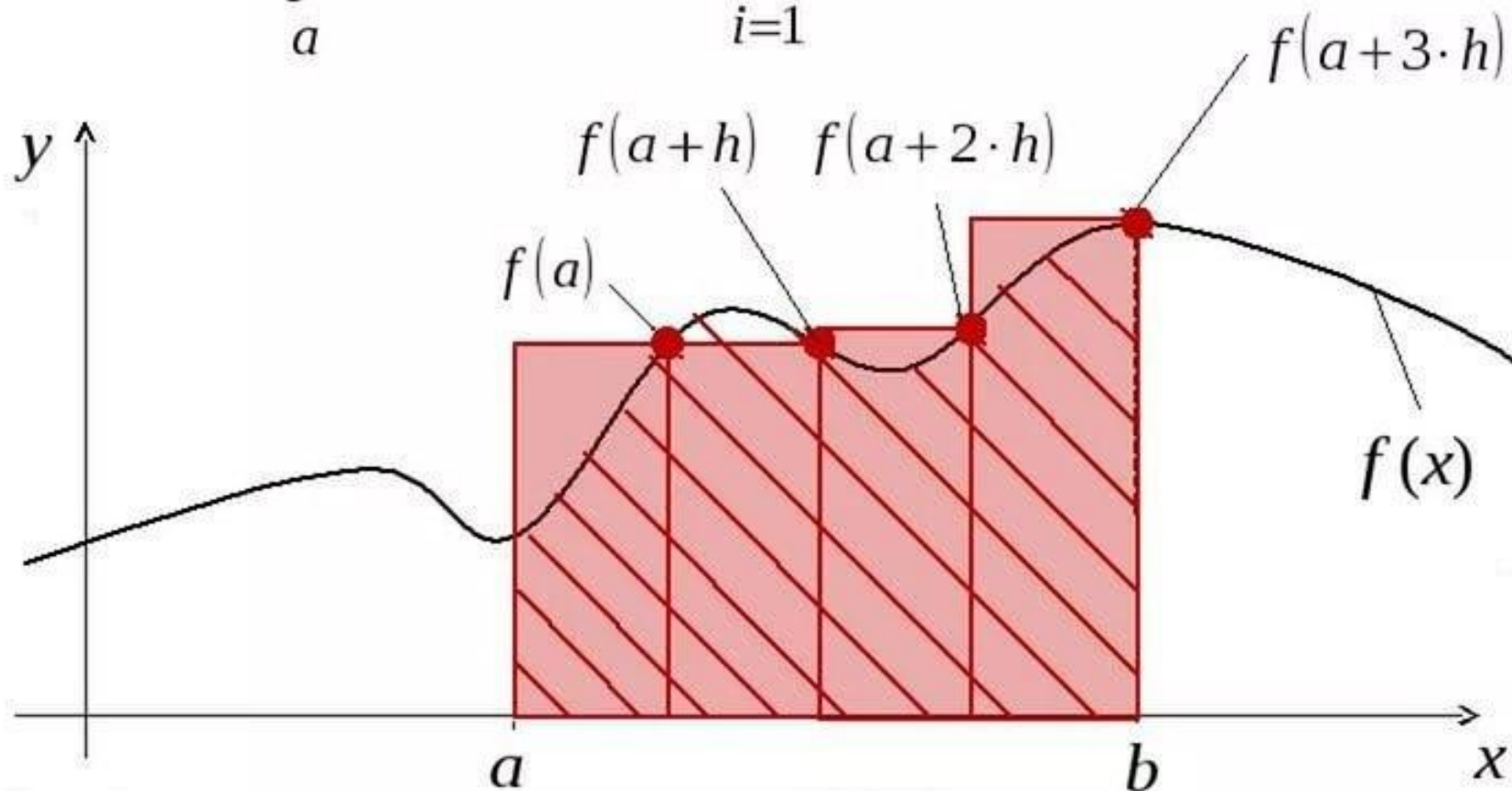
Приближенное вычисление определенного интеграла (метод левых прямоугольников)

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} h \cdot f(a + i \cdot h)$$



Приближенное вычисление определенного интеграла (метод правых прямоугольников)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n h \cdot f(a + i \cdot h)$$



Приближенное вычисление определенного интеграла (метод прямоугольников)

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} h \cdot f\left(a + (i + 0,5) \cdot h\right)$$

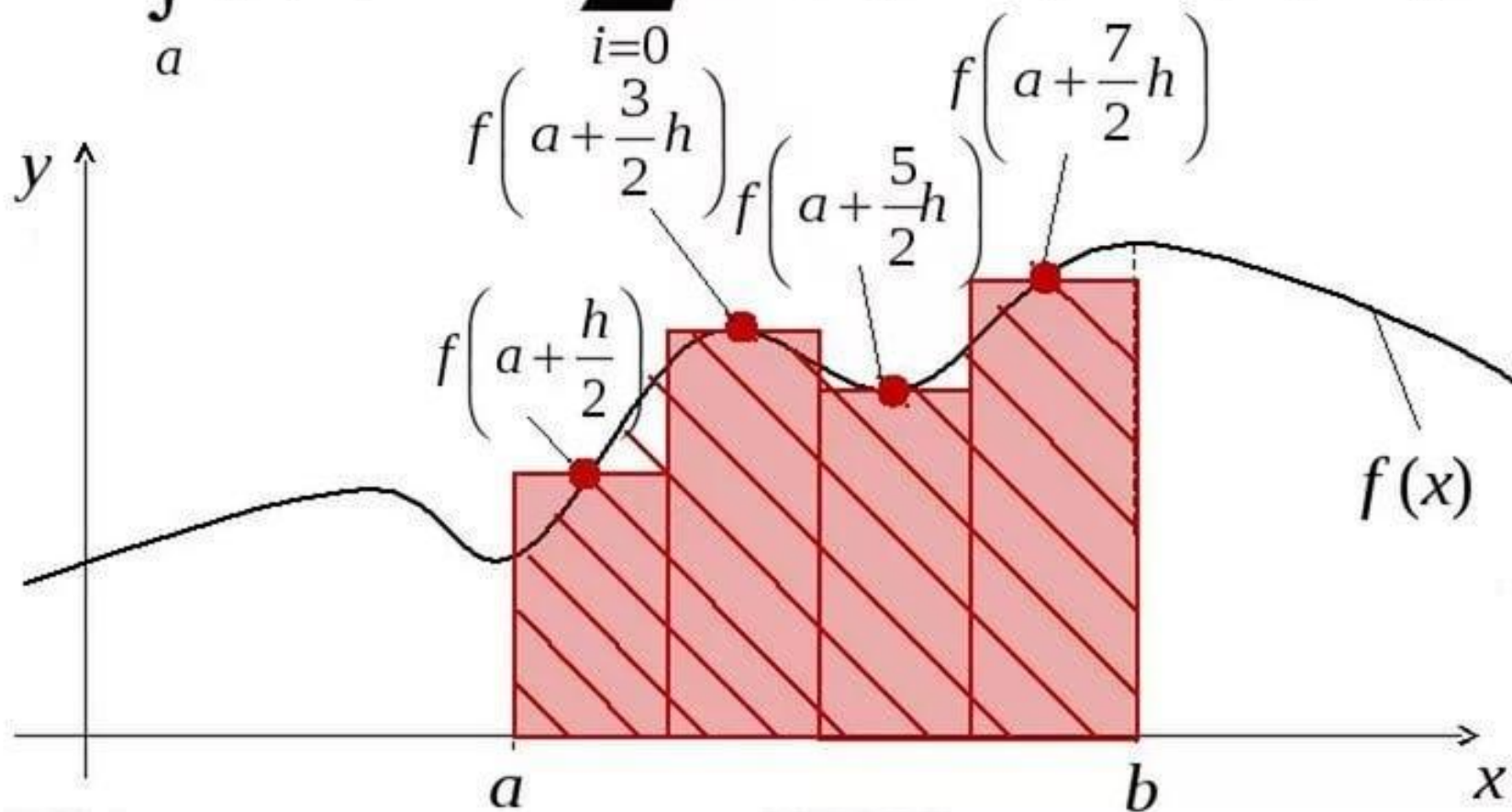
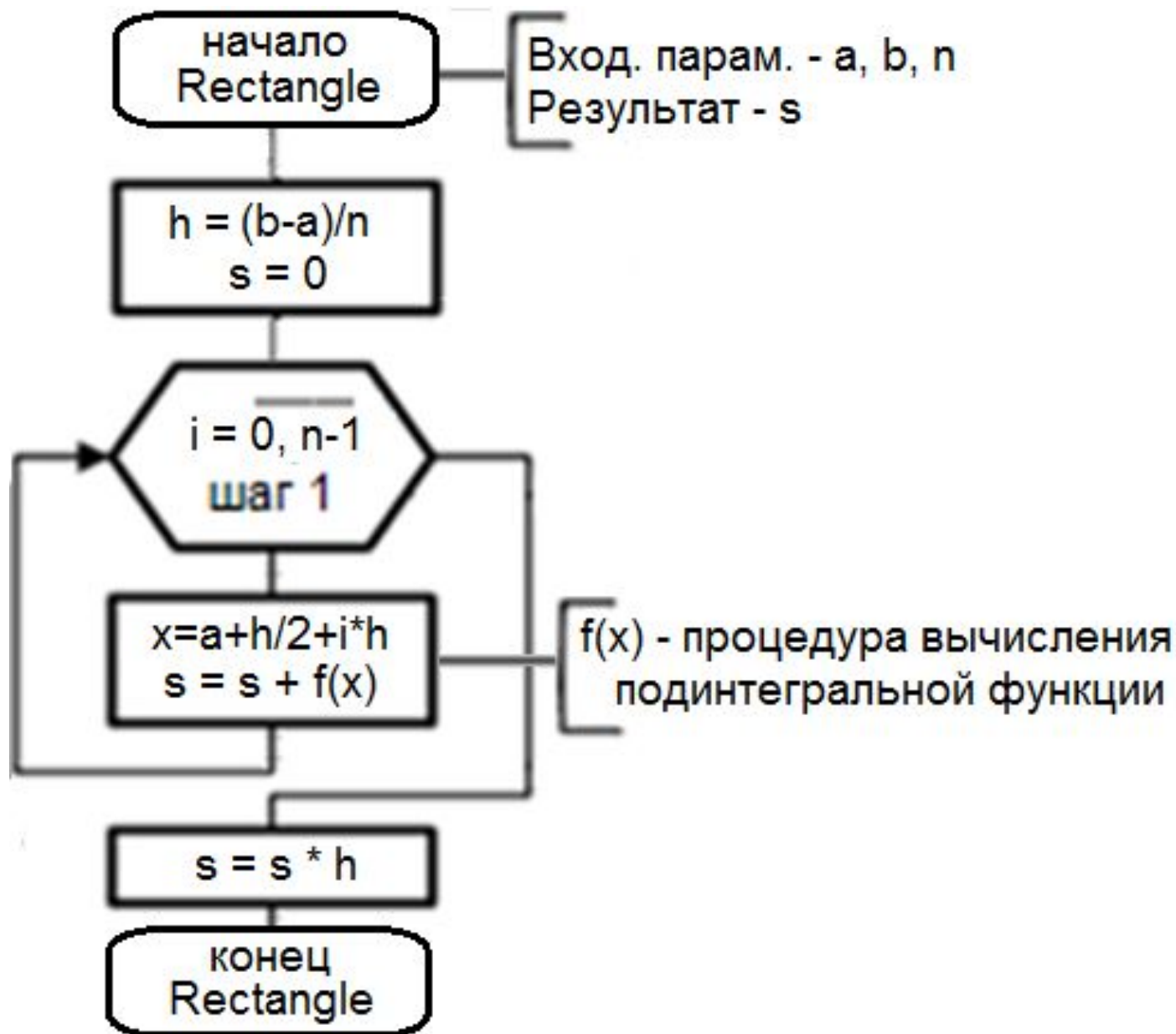


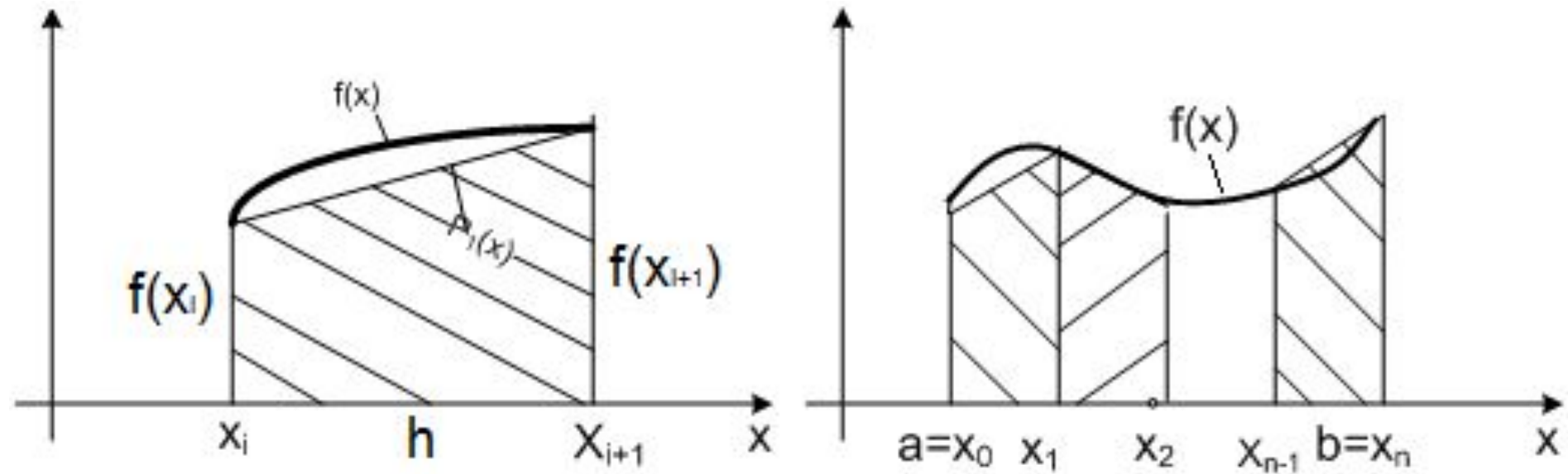
Схема алгоритма метода прямоугольников



Метод трапеций

В методе трапеций подинтегральная функция $f(x)$ на каждом элементарном отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ заменяется интерполяционным полиномом первой степени. При этом значение элементарного интеграла равно площади прямоугольной трапеции с высотой h и основаниями $f(x_i)$ и $f(x_{i+1})$, а интеграл на отрезке $[a; b]$ – сумме этих площадей.

Метод трапеций



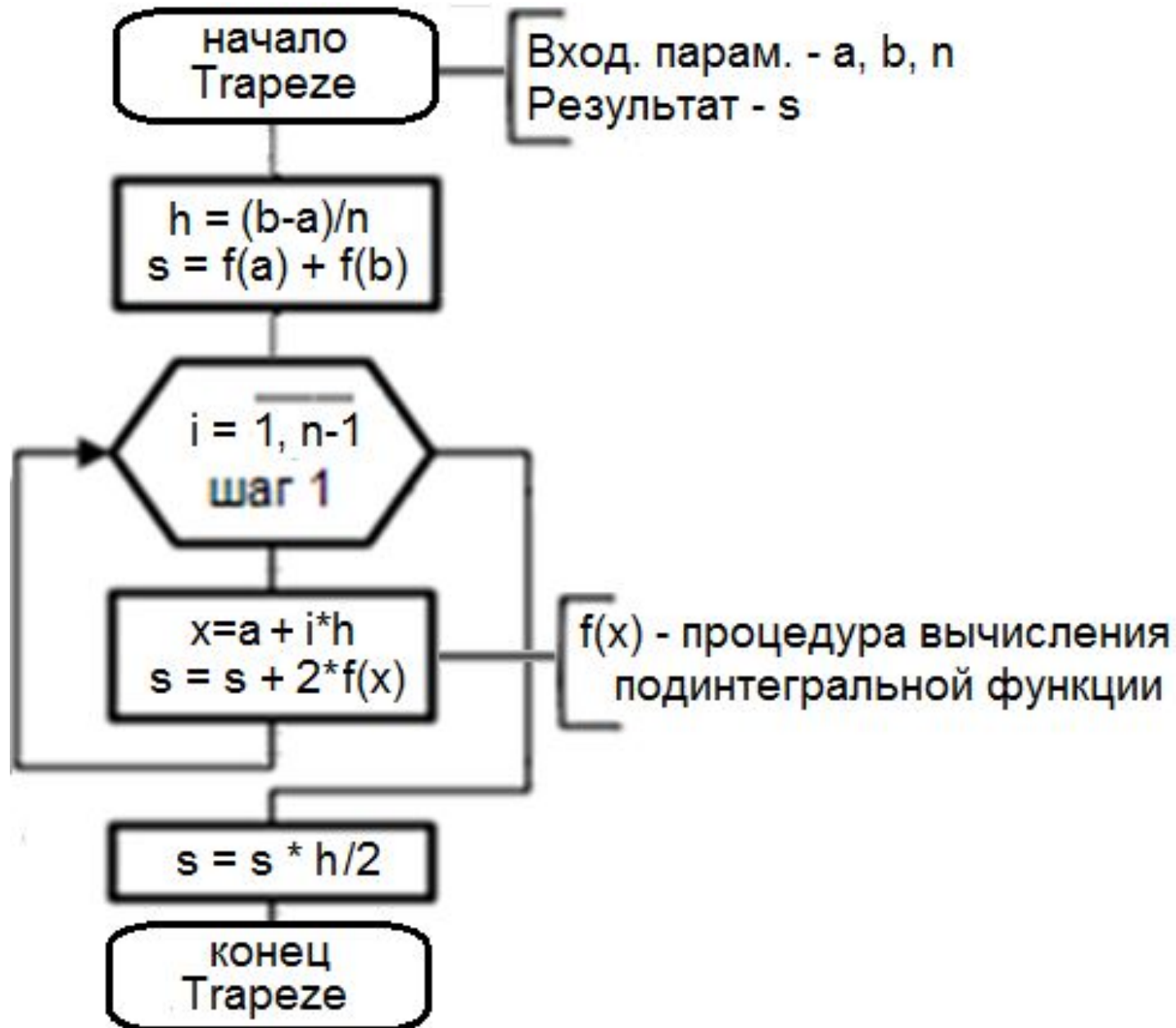
Вывод формулы трапеций

$$S_0 = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \cdot h, \quad S_1 = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \cdot h, \quad S_2 = \frac{f(x_2) + f(x_3)}{2} \cdot h, \quad \dots$$

$$S_{n-2} = \frac{f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})}{2} \cdot h, \quad S_{n-1} = \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \cdot h$$

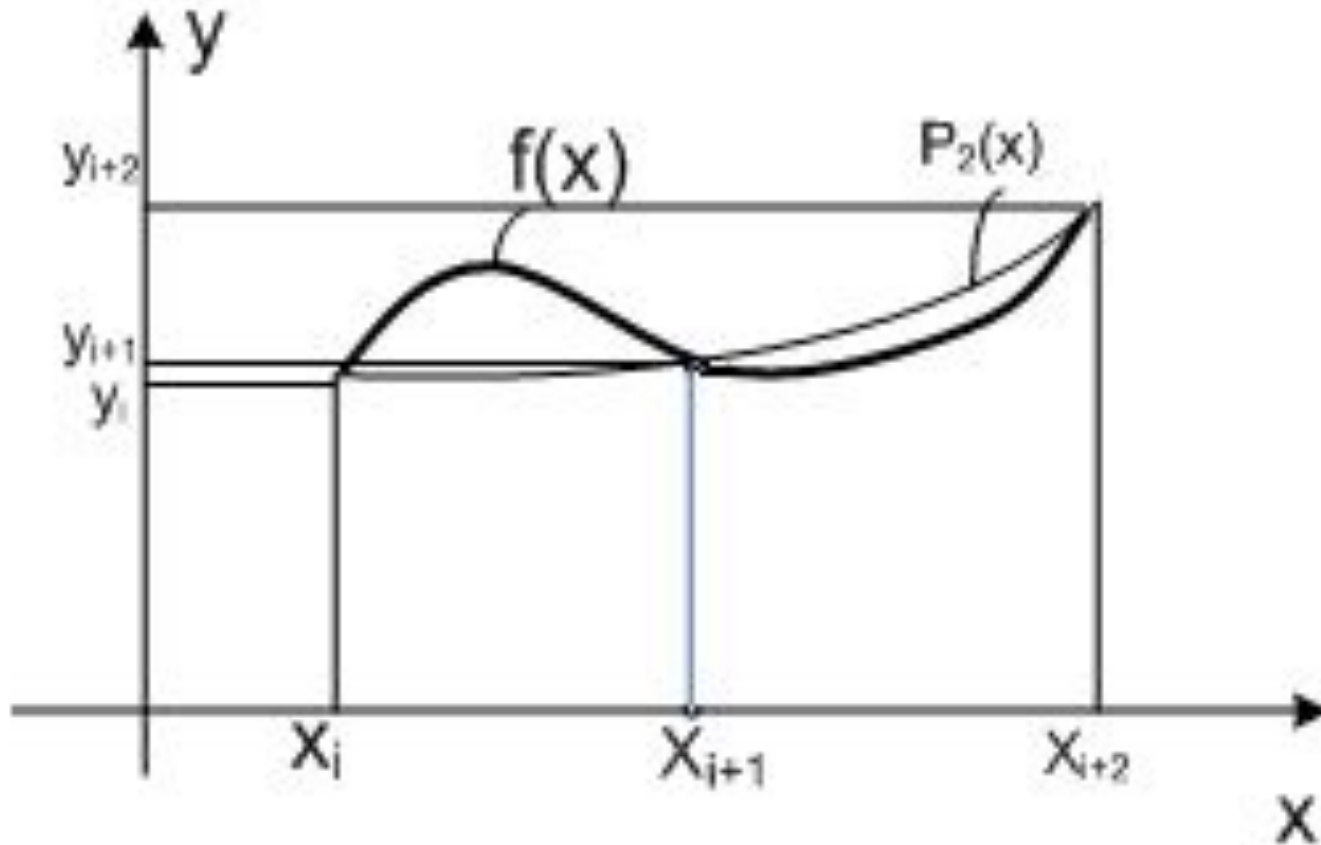
$$S = \sum_{i=0}^{n-1} S_i = \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_n)) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) = \frac{b-a}{2n} (f(x_0) + f(x_n)) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)$$

Схема алгоритма метода трапеций

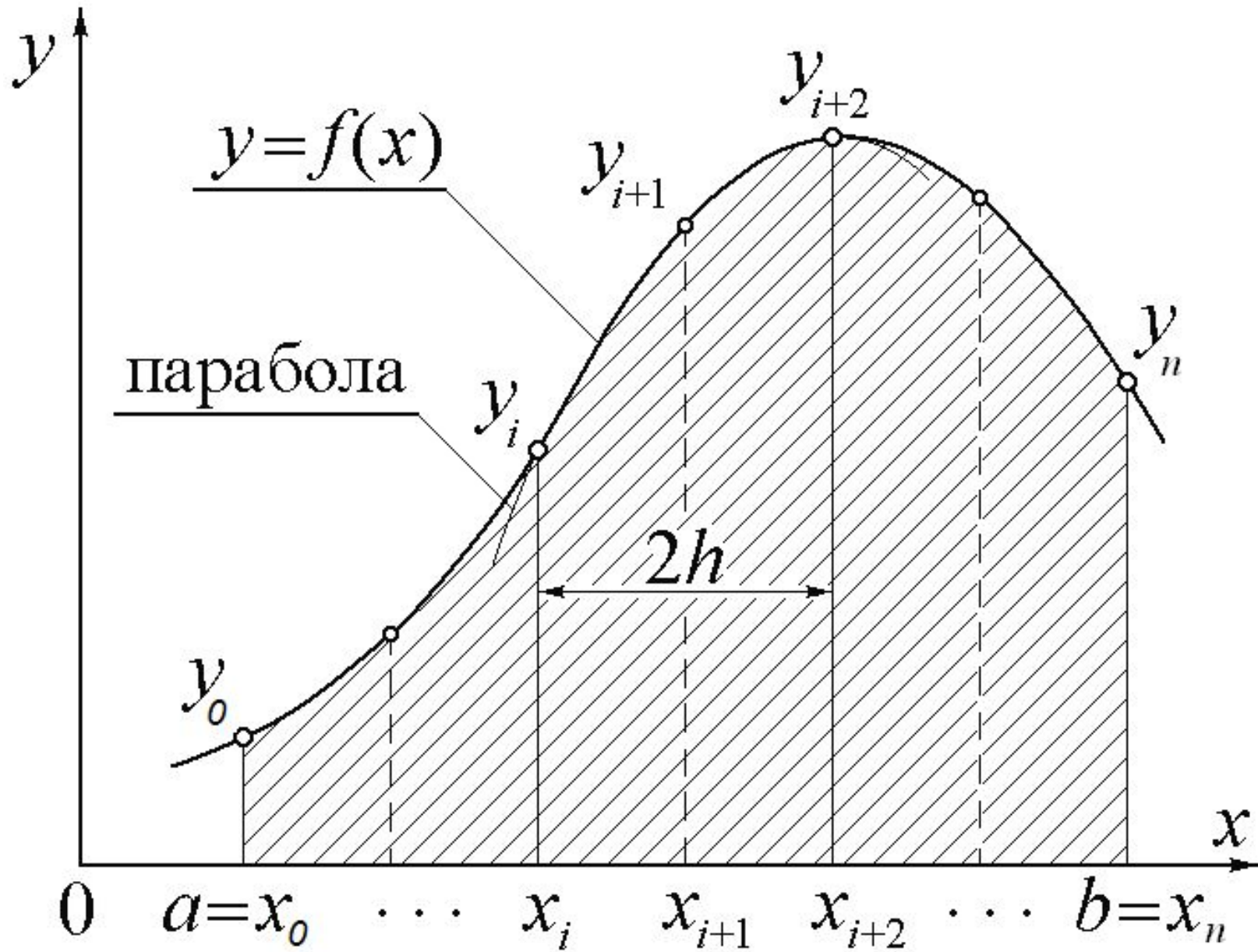


Метод Симпсона

В методе Симпсона применяется интерполирующий полином второй степени, поэтому за элементарный отрезок интерполирования принимается отрезок $[x_i; x_{i+2}]$, а весь отрезок интегрирования $[a; b]$ разбивается на четное число частей $n = 2m$.



Метод Симпсона



Вывод формулы Симпсона

Для получения интерполирующей функции на интервале $[x_i; x_{i+2}]$ воспользуемся первой интерполяционной формулой Ньютона, используя в качестве узлов интерполяции точки x_i , x_{i+1} и x_{i+2} .

$$f(x) \approx y_i + \frac{\Delta y_i}{1!h}(x - x_i) + \frac{\Delta^2 y_i}{2!h^2}(x - x_i)(x - x_{i+1}), \quad x \in [x_i, x_{i+2}].$$

Тогда в пределах отрезка $[x_i; x_{i+2}]$ получим следующую приближенную формулу:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x) dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+2}} \left[y_i + \frac{\Delta y_i}{1!h}(x - x_i) + \frac{\Delta^2 y_i}{2!h^2}(x - x_i)(x - x_{i+1}) \right] dx = \frac{h}{3}(y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2}).$$

В частности, для отрезка $[x_0; x_2]$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Для отрезка $[x_2; x_4]$

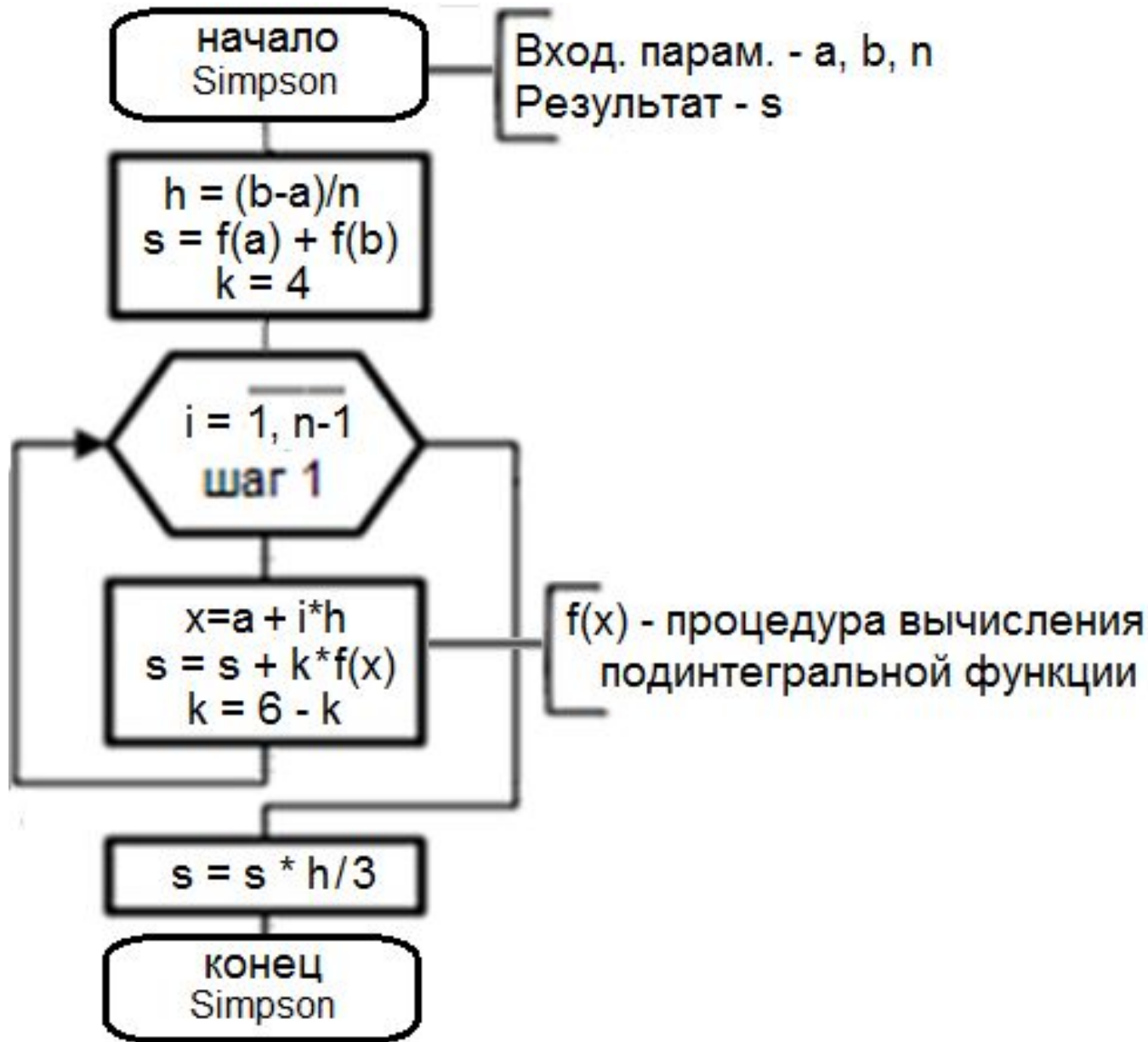
$$\int_{x_2}^{x_4} f(x) dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4).$$

Вывод формулы Симпсона

Просуммировав подобные выражения на всем отрезке интегрирования $[a; b]$, получим *формулу Симпсона*:

$$\begin{aligned} S &= \frac{h}{3} [(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + (y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m})] = \\ &= \frac{h}{3} [y_0 + y_{2m} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2})] = \\ &= \frac{h}{3} (y_0 + y_{2m} + 4 \sum_{i=1}^m y_{2i-1} + 2 \sum_{i=2}^m y_{2i-2}), \quad \text{где } y_i = f(x_i) \end{aligned}$$

Схема алгоритма метода Симпсона



Погрешности численного интегрирования

Замена подинтегральной функции интерполяционным полиномом приводит к погрешности вычисления определенного интеграла

$R = |S - S^*|$, где S^* – точное значение интеграла.

Имеются следующие оценки этой погрешности для рассмотренных нами методов и случаев аналитического или табличного задания подинтегральной функции:

Оценки погрешности численного интегрирования

- при использовании метода средних прямоугольников

$$R \leq \frac{b-a}{24} h^2 \cdot \max_{x \in [a;b]} |f''(x)| \quad \text{при аналитически заданной } f(x)$$

$$R \leq \frac{b-a}{24} |\overline{\Delta^2 y}| \quad \text{при таблично заданной } f(x)$$

- при использовании метода трапеций

$$R \leq \frac{b-a}{12} h^2 \cdot \max_{x \in [a;b]} |f''(x)| \quad \text{при аналитически заданной } f(x)$$

$$R \leq \frac{b-a}{12} |\overline{\Delta^2 y}| \quad \text{при таблично заданной } f(x)$$

- при использовании метода Симпсона

$$R \leq \frac{b-a}{180} h^4 \cdot \max_{x \in [a;b]} |f^{(4)}(x)| \quad \text{при аналитически заданной } f(x)$$

$$R \leq \frac{b-a}{180} |\overline{\Delta^4 y}| \quad \text{при таблично заданной } f(x)$$

где $\overline{\Delta^{(k)} y}$ – среднее арифметическое конечных разностей k -го порядка.

Сравнение погрешностей методов

Из приведенных формул видно, что уменьшение шага интегрирования h приводит к уменьшению погрешности. Метод Симпсона при шаге h дает примерно ту же точность, что и методы прямоугольников и трапеций при шаге $h/2$, а при одинаковой точности метод Симпсона требует примерно вдвое меньше вычислений.

Метод двойного просчета (правило Рунге)

Однако практическое использование этих формул ограничено в связи с трудоемкостью вычислений и зависимостью оценок от свойств конкретных подинтегральных функций. На практике для оценки погрешности численного интегрирования используют *метод двойного просчета (правило Рунге)*. Приближенное значение интеграла вычисляют дважды: вначале с шагом \mathbf{h} , а затем с шагом $\mathbf{h}/2$. Полученные значения интегралов \mathbf{S}_h и $\mathbf{S}_{h/2}$ могут быть применены для оценки погрешности последнего, более точного значения $\mathbf{S}_{h/2}$ по формуле:

$$\mathbf{R} \leq \frac{|\mathbf{S}_h - \mathbf{S}_{h/2}|}{2^k - 1}$$

где $\mathbf{k}=2$ – для методов трапеций и средних прямоугольников;

$\mathbf{k}=4$ – для метода Симпсона.

Метод двойного просчета может быть использован для автоматического выбора шага интегрирования при заданной допустимой погрешности.

Схема алгоритма метода двойного просчета

