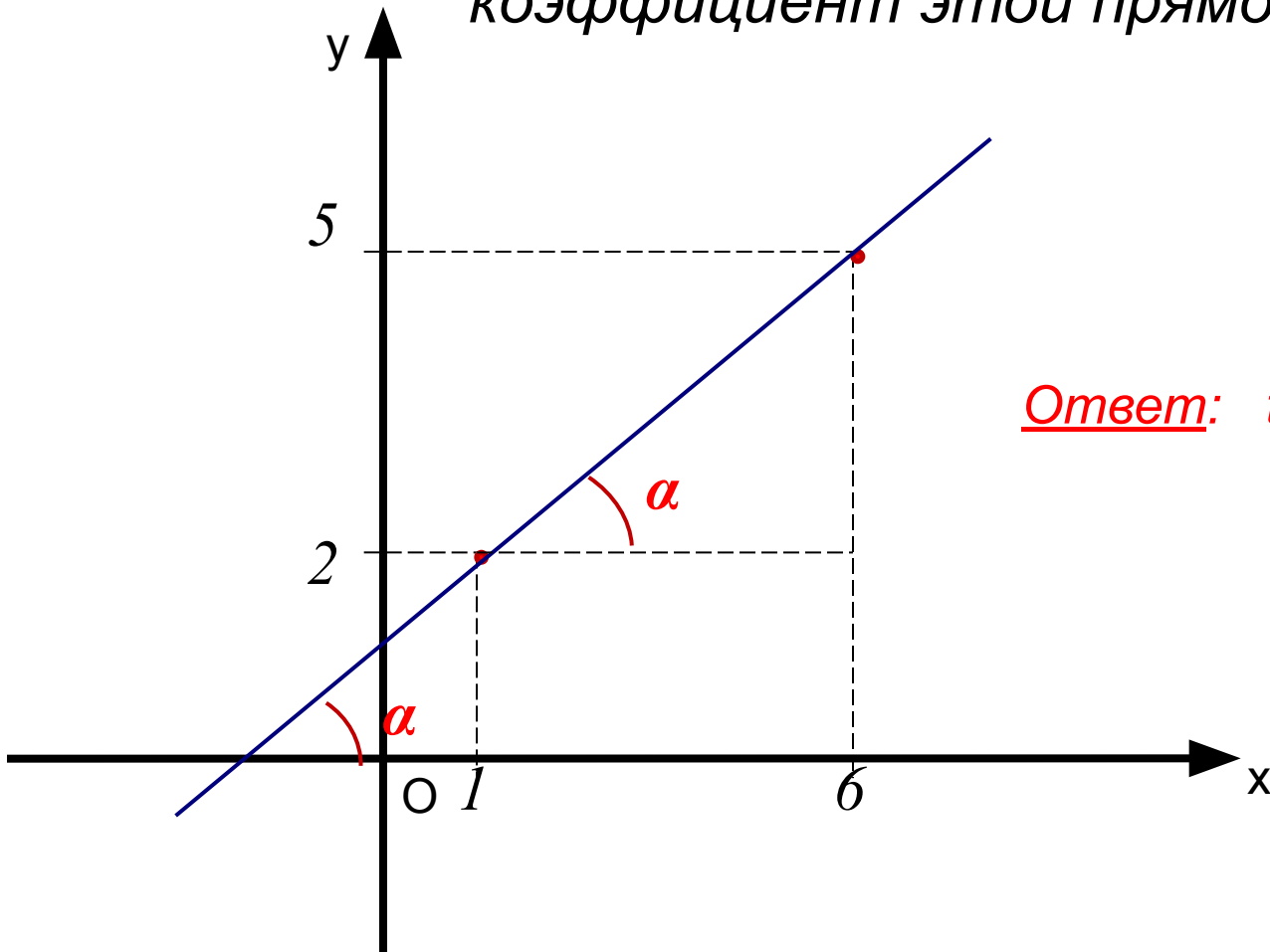


Устные упражнения

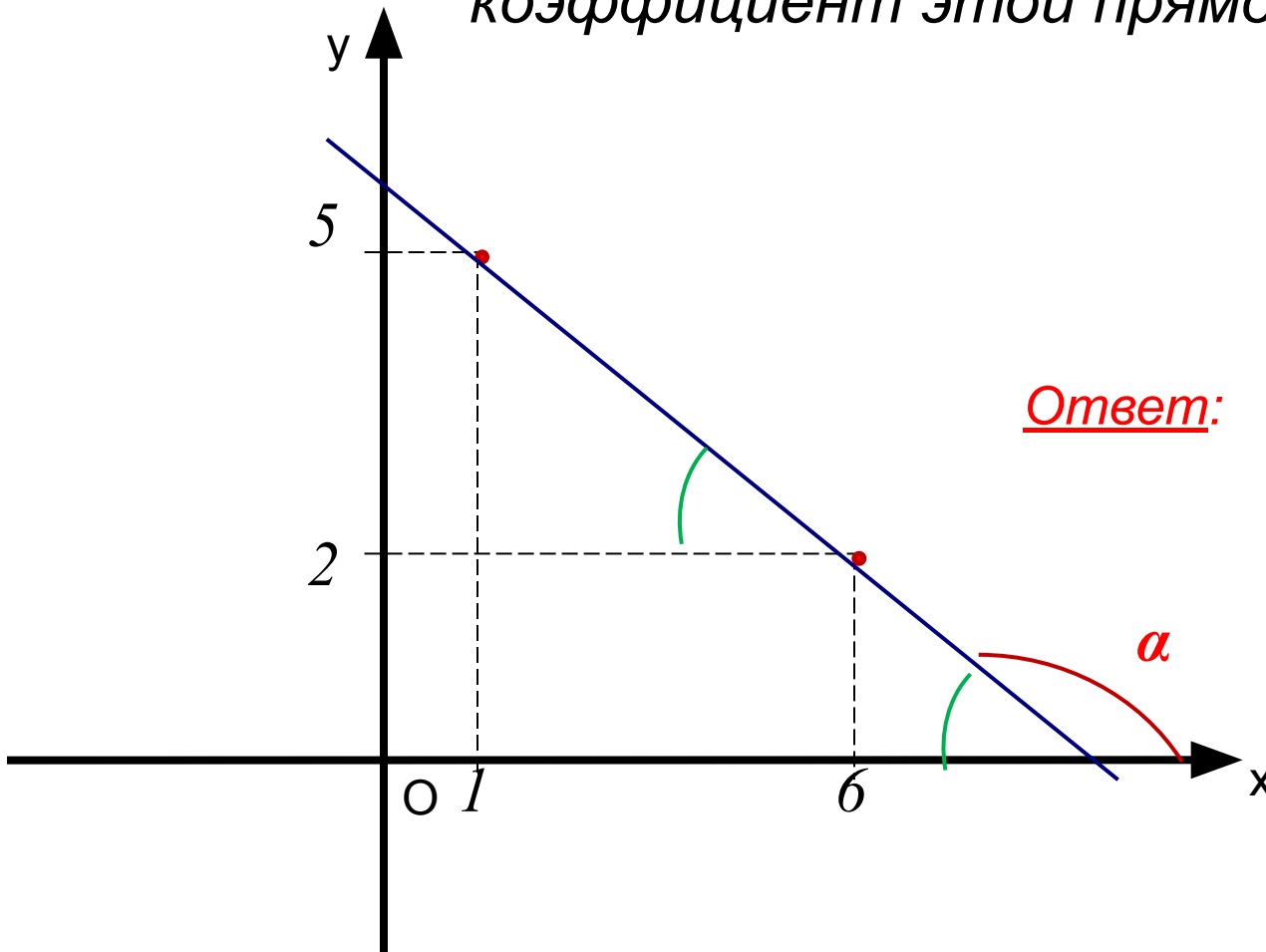
Найдите тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси абсцисс и угловой коэффициент этой прямой



Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = 0,6$; $k = 0,6$.

Устные упражнения

Найдите тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси абсцисс и угловой коэффициент этой прямой

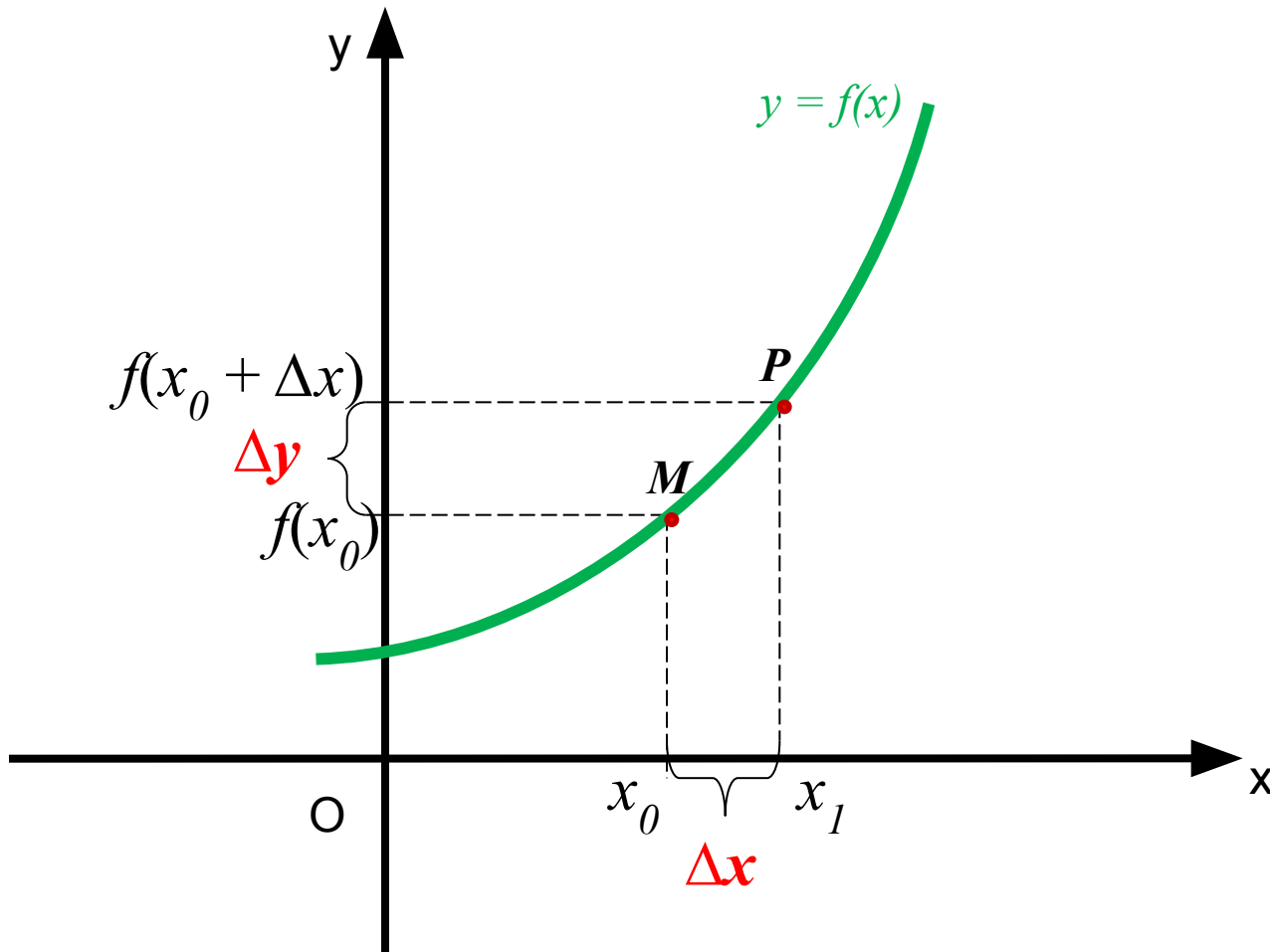


Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = -0,6$; $k = -0,6$.

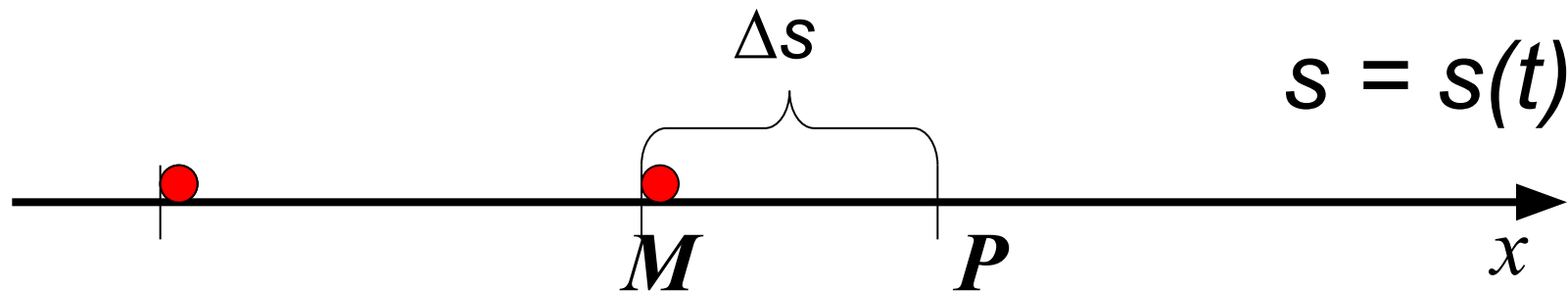
Определение 2

$\Delta x = x_1 - x_0$ – приращение аргумента

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – приращение функции



Задача 1



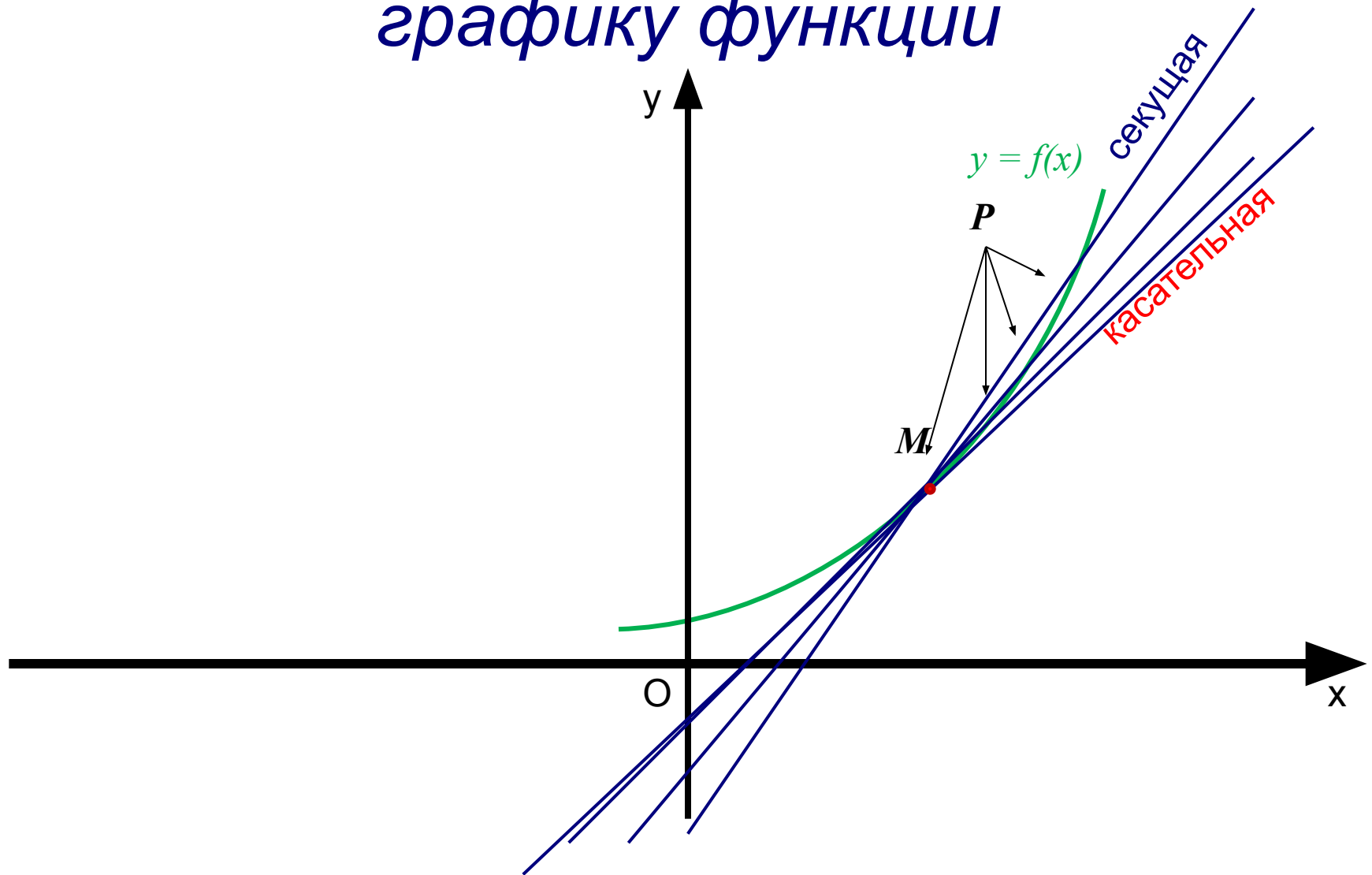
$$O \quad OM = s(t) \quad OP = s(t + \Delta t)$$

$$MP = OP - OM = s(t + \Delta t) - s(t) = \Delta s$$

$$v_{cp.} = \frac{\Delta s}{\Delta t} (\text{м / с})$$

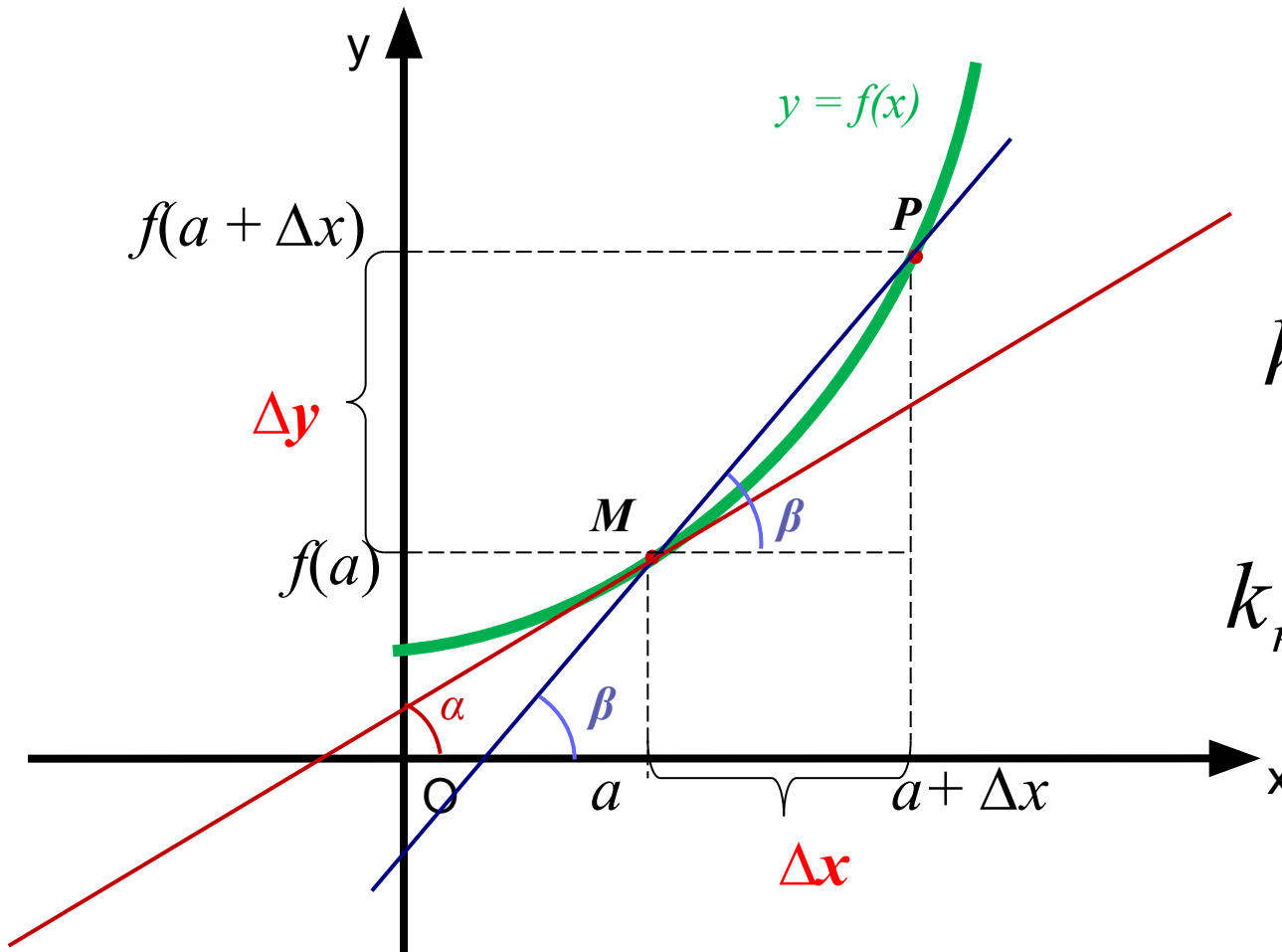
$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} (\text{м / с})$$

Определения секущей и касательной к графику функции



Задача 2

(о касательной к графику функции).



$$k_{\text{сек.}} = \operatorname{tg} \beta$$

$$k_{\text{сек.}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

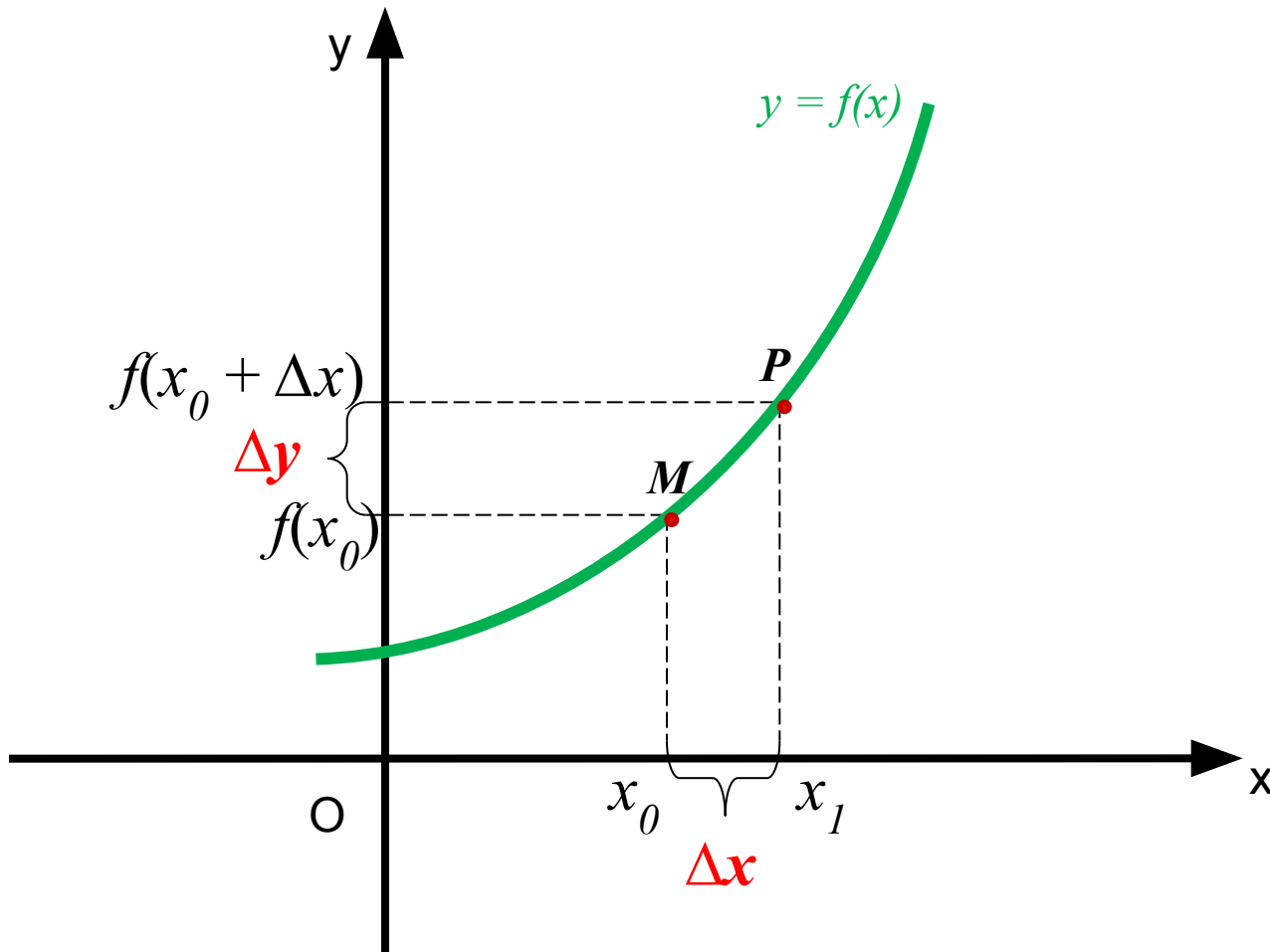
$$k_{\text{кас.}} = \operatorname{Lim}_{\Delta x \rightarrow 0} k_{\text{сек.}}$$

$$k_{\text{кас.}} = \operatorname{Lim}_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$k_{\text{кас.}} = \operatorname{tg} \alpha$$

Определение.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



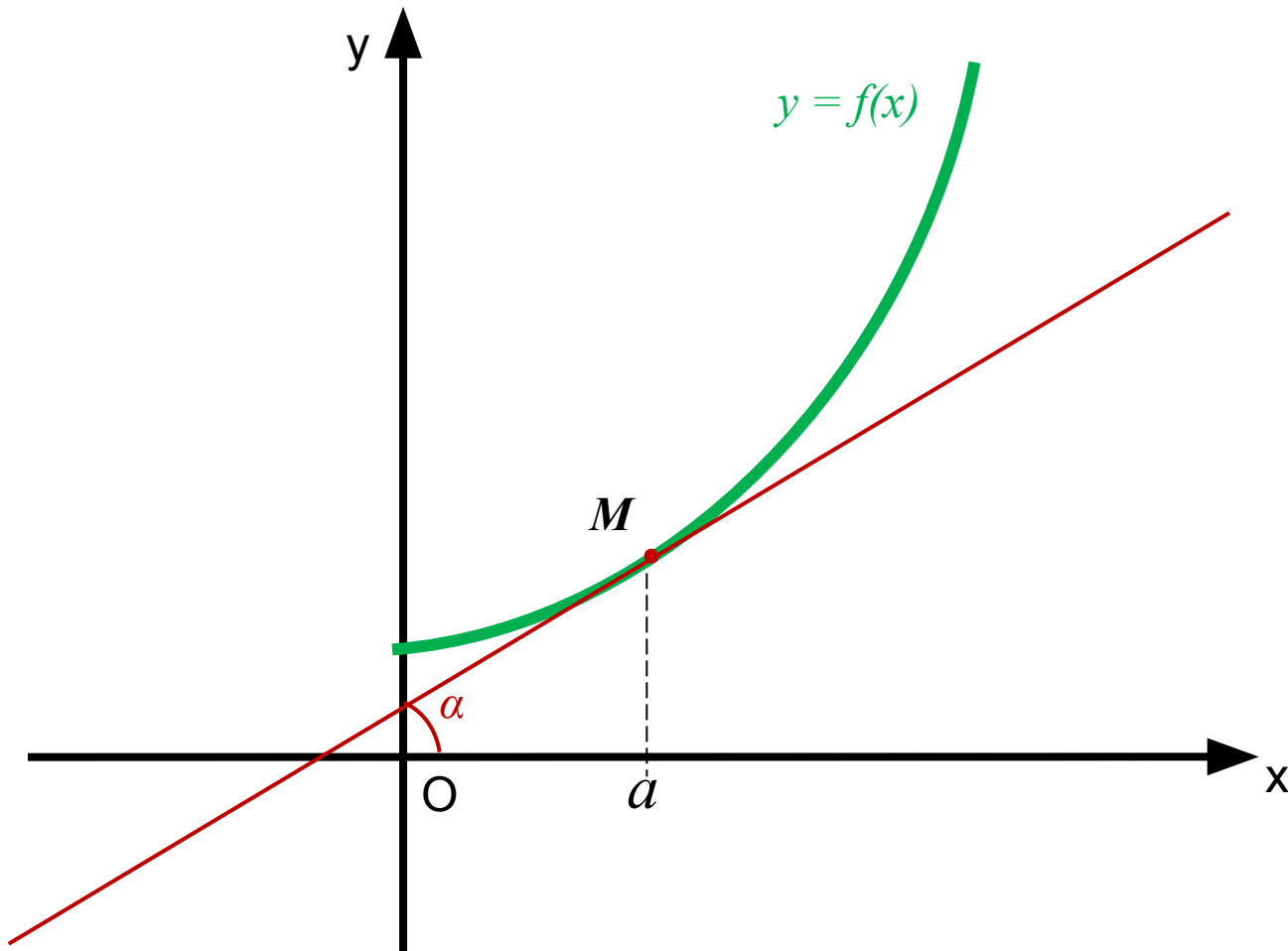
Физический смысл производной



$$v(t) = s'(t)$$

Геометрический смысл производной


$$f'(a) = k_{\text{кас.}} = \operatorname{tg} \alpha$$



Алгоритм нахождения производной функции $y = f(x)$

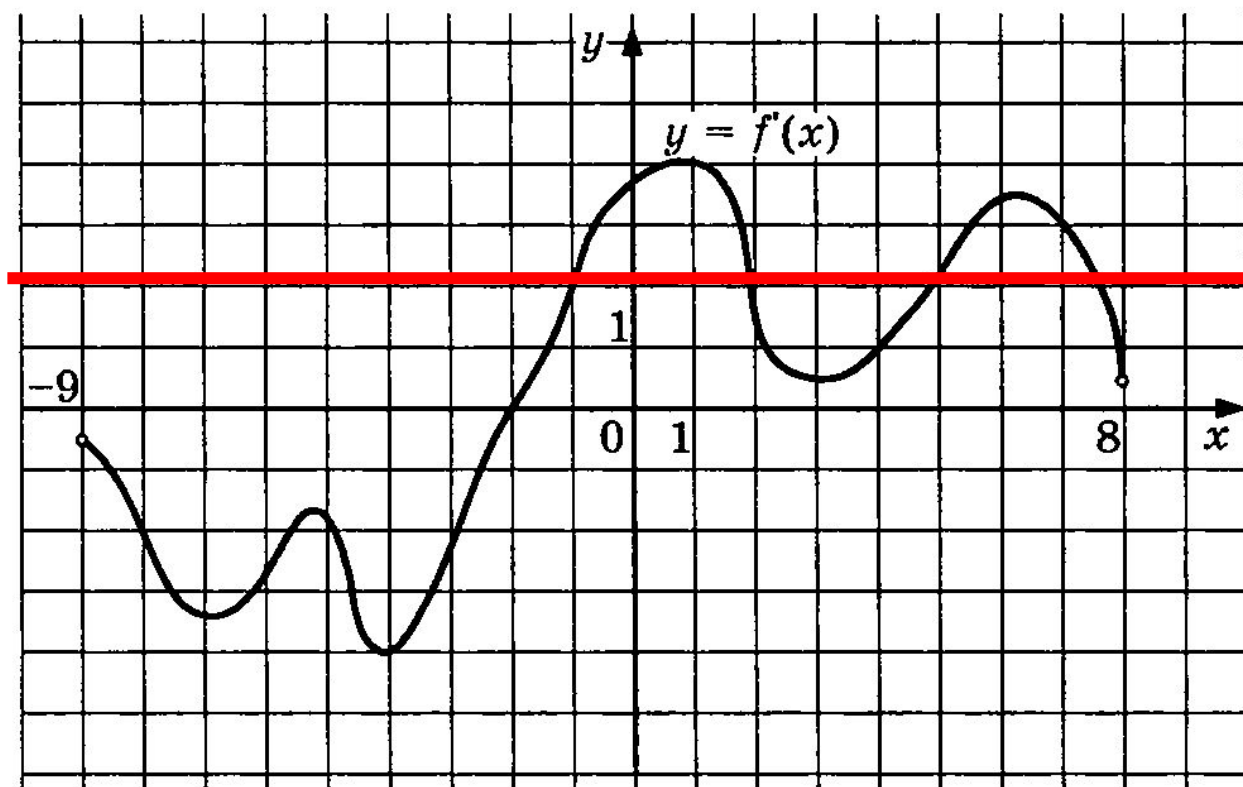
1. Зафиксировать значение x , найти $f(x)$.
2. Дать аргументу приращение Δx , перейти в новую точку $x + \Delta x$, найти $f(x + \Delta x)$.
3. Найти приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
4. Составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
5. Вычислить $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Этот предел и есть $f'(x)$.



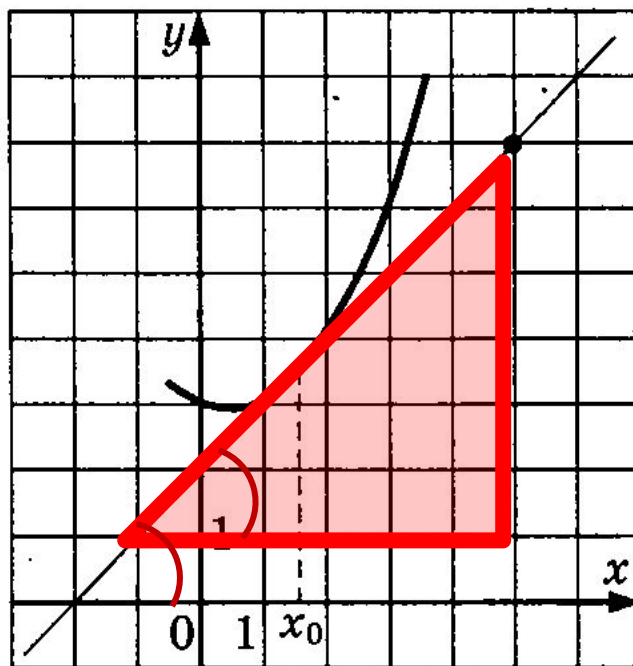
*Примеры применения
геометрического смысла
производной.*

1679. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-9; 8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x + 5$ или совпадает с ней.



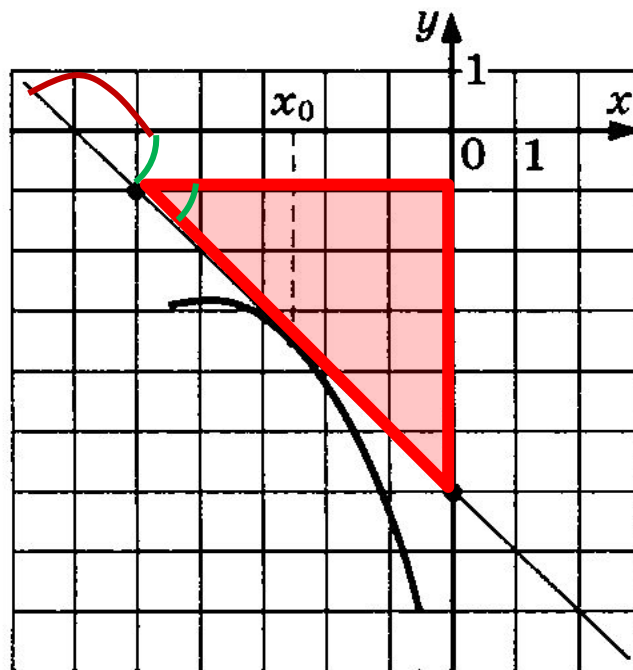
Ответ: 4.

1872. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: 1

1896. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: -1

Формулы дифференцирования

$$C' = 0$$

$$x' = 1$$

$$(kx + m)' = k$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Таблица производных функций

$$1. (C)' = 0.$$

$$2. (x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

$$3. (a^x)' = a^x \cdot \ln a,$$

$$(e^x)' = e^x.$$

$$4. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$5. (\sin x)' = \cos x.$$

$$6. (\cos x)' = -\sin x.$$

$$7. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$8. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$9. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$10. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$11. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$12. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Правила вычисления производных

Если функции U и V дифференцируемы в точке x_0 , то

$$1. (U + V)' = U' + V'$$

$$2. (UV)' = U'V + UV'$$

$$3. \left(\frac{U}{V} \right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$$

Если функция U дифференцируема в точке x_0 , а C - постоянная, то

$$(CU)' = CU'$$

Решение задач

Найти производную функции

Пример №1

$$y = x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 7x.$$

Решение: Применяя правила вычисления производной алгебраической суммы функций, вынесения постоянного множителя за знак производной и формулу производной степени получим

$$\begin{aligned} y' &= (x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 7x)' = (x^5)' - (4x^3)' + (2x^2)' - (7x)' = \\ &= (x^5)' - 4(x^3)' + 2(x^2)' - 7(x)' = 5x^4 - 12x^2 + 4x - 7. \end{aligned}$$

Общая формула производной степенной функции:

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

Производная от x равна 1, следовательно $7 \cdot 1$ и получаем просто 7

Пример №2

Найти производную функции

$$y = (1 - x^3)(x^4 + 4x).$$

Решение: Применим правило дифференцирования произведения, а затем найдём производные сомножителей, так же, как в предыдущей задаче, пользуясь формулой 3 из таблицы производных. Тогда получим

$$\begin{aligned} y' &= [(1 - x^3)(x^4 + 4x)]' = (1 - x^3)'(x^4 + 4x) + (x^4 + 4x)'(1 - x^3) = \\ &= -3x^2(x^4 + 4x) + (4x^3 + 4)(1 - x^3) = -7x^6 - 12x^3 + 4. \end{aligned}$$

Общая формула производной степенной функции:

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

Общая формула дифференцирования произведения:

$$(U + V)' = U' + V'$$



Пример №3

Найти производную функции

$$\frac{1+x^2}{1-x^2}$$

Решение: Применим правило дифференцирования частного:

$$y' = \frac{(1-x^2)(1+x^2)' - (1+x^2)(1-x^2)'}{(1-x^2)^2}$$

Затем, так же как и выше, вычислим производные в числителе. Имеем

$$y' = \frac{(1-x^2)2x - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

Общая формула производной степенной функции:

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

Общая формула дифференцирования частного:

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$$

Пример № 4

Найти производную функции

$\cos(5x - 3)$

Находим для начала производную от функции $\cos x$, она будет равна $-\sin x$.

Так как у нас под знаком \cos стоит функция следовательно мы должны найти производную от функции $f(5x - 3)$. Она будет равна 5 по формуле дифференцирования линейной функции. $f'(5x - 3) = 5$ (формула $f'(kx - b) = k$) Следовательно $f'(\cos(5x - 3)) = -5 \sin(5x - 3)$

Пример № 5

Найти производную функции

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 8x - 7}$$

Для начала перепишем корень в виде степени с рациональным показателем:

$$f(x) = (x^2 + 8x - 7)^{0,5}$$

Теперь делаем замену: пусть $x^2 + 8x - 7 = t$. Находим производную по формуле:

$$f'(x) = f'(t) \cdot t' = (t^{0,5})' \cdot t' = 0,5 \cdot t^{-0,5} \cdot t'$$

Делаем обратную замену: $t = x^2 + 8x - 7$. Имеем:

$$f'(x) = 0,5 \cdot (x^2 + 8x - 7)^{-0,5} \cdot (x^2 + 8x - 7)' = \\ 0,5 \cdot (2x + 8) \cdot (x^2 + 8x - 7)^{-0,5}$$

Наконец, возвращаемся к корням:

$$f'(x) = \frac{0,5 \cdot (2x + 8)}{\sqrt{x^2 + 8x - 7}} = \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 + 8x - 7}}$$