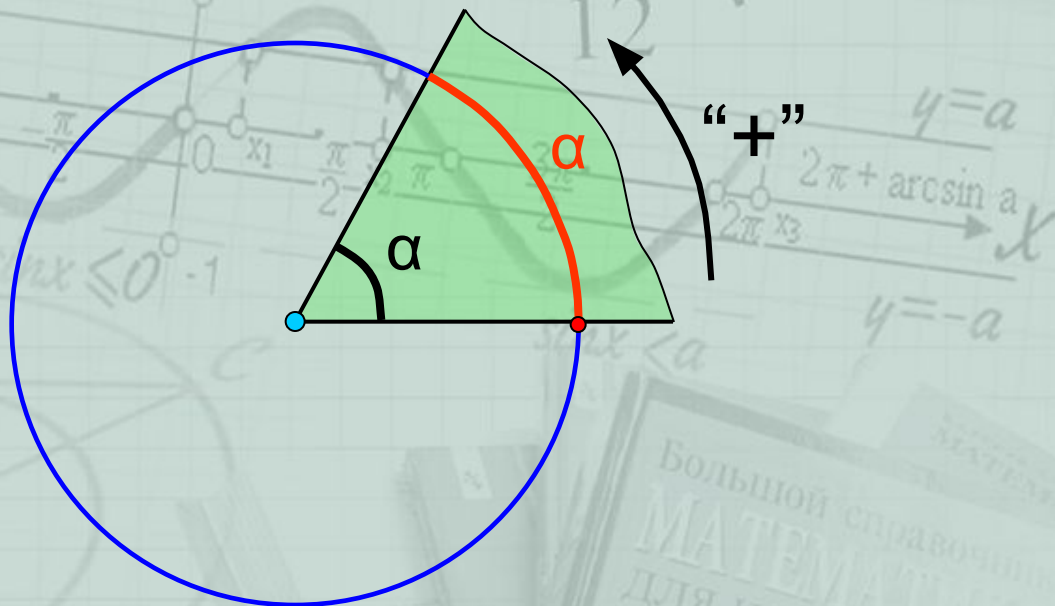
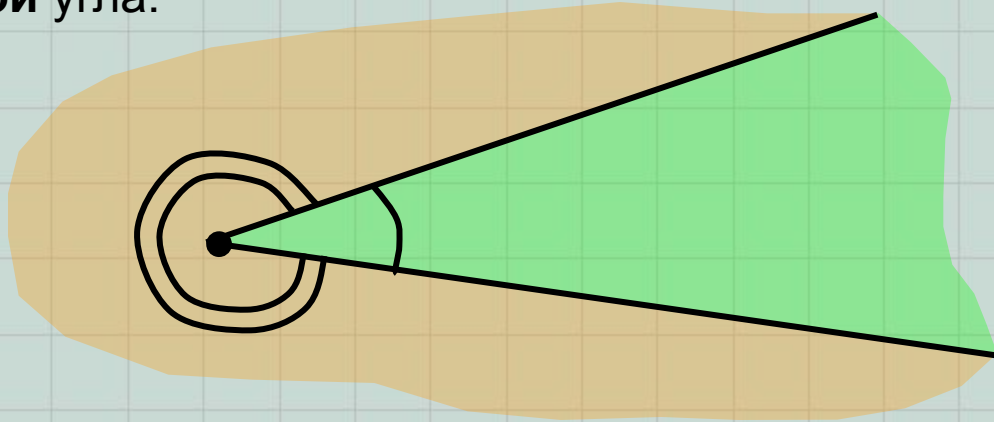


Углы поворота. Градусная мера углов и дуг.

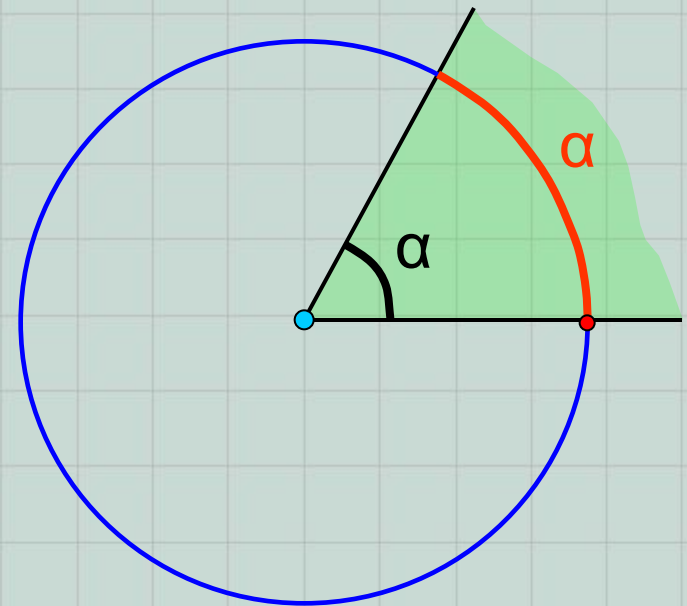


Алгебра , 9-10 класс

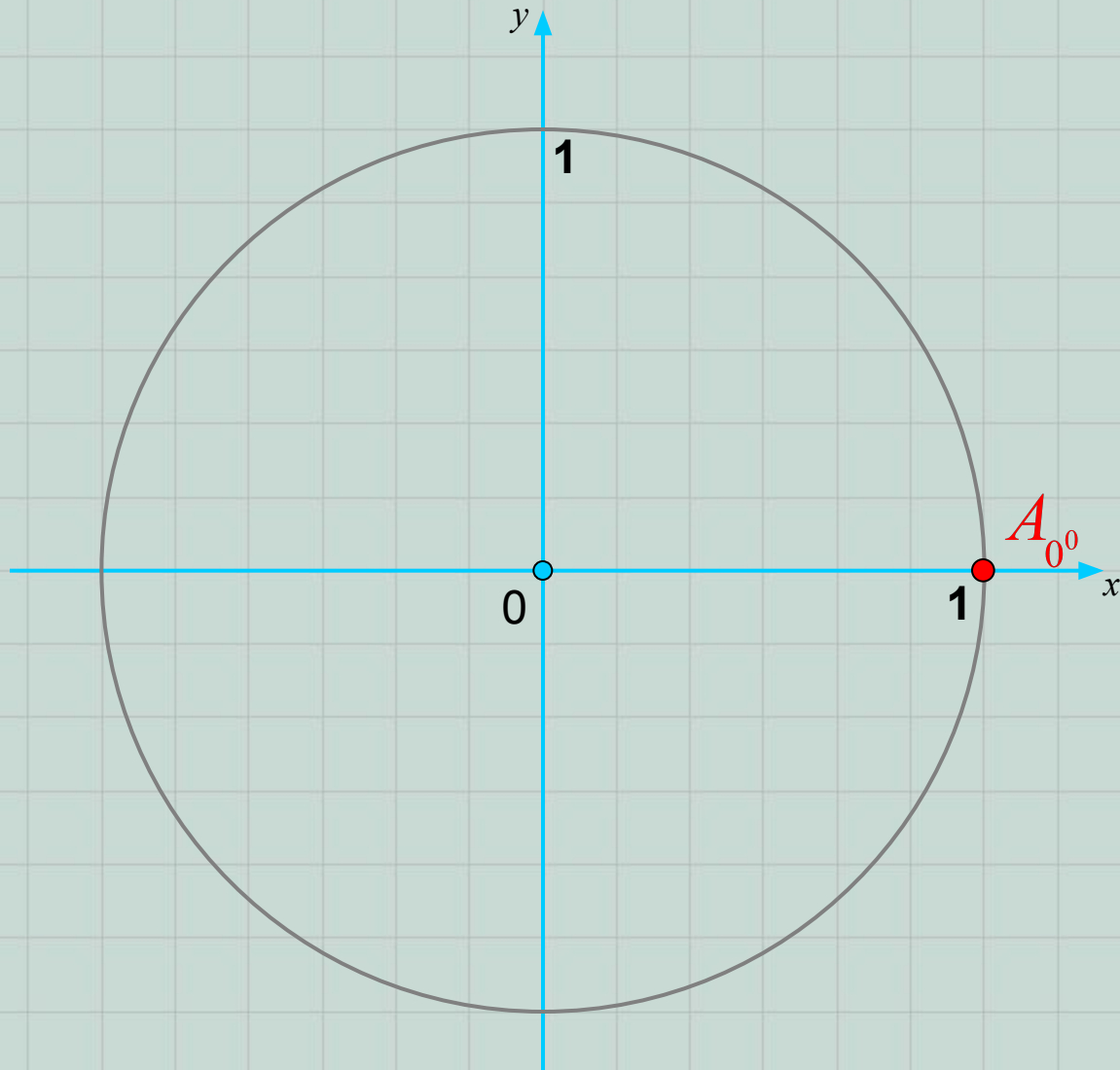
Углом называют часть плоскости, заключенную между двумя лучами, имеющими общее начало. Данные лучи называются **сторонами** угла, а их общее начало – **вершиной** угла.



Если вершина угла расположена в центре окружности, то такой угол называется **центральный**. Часть окружности, которая находится внутри центрального угла, называется **дугой окружности**, соответствующей этому центральному углу. Ещё говорят, что центральный угол α опирается на дугу, соответствующую и равную ему.

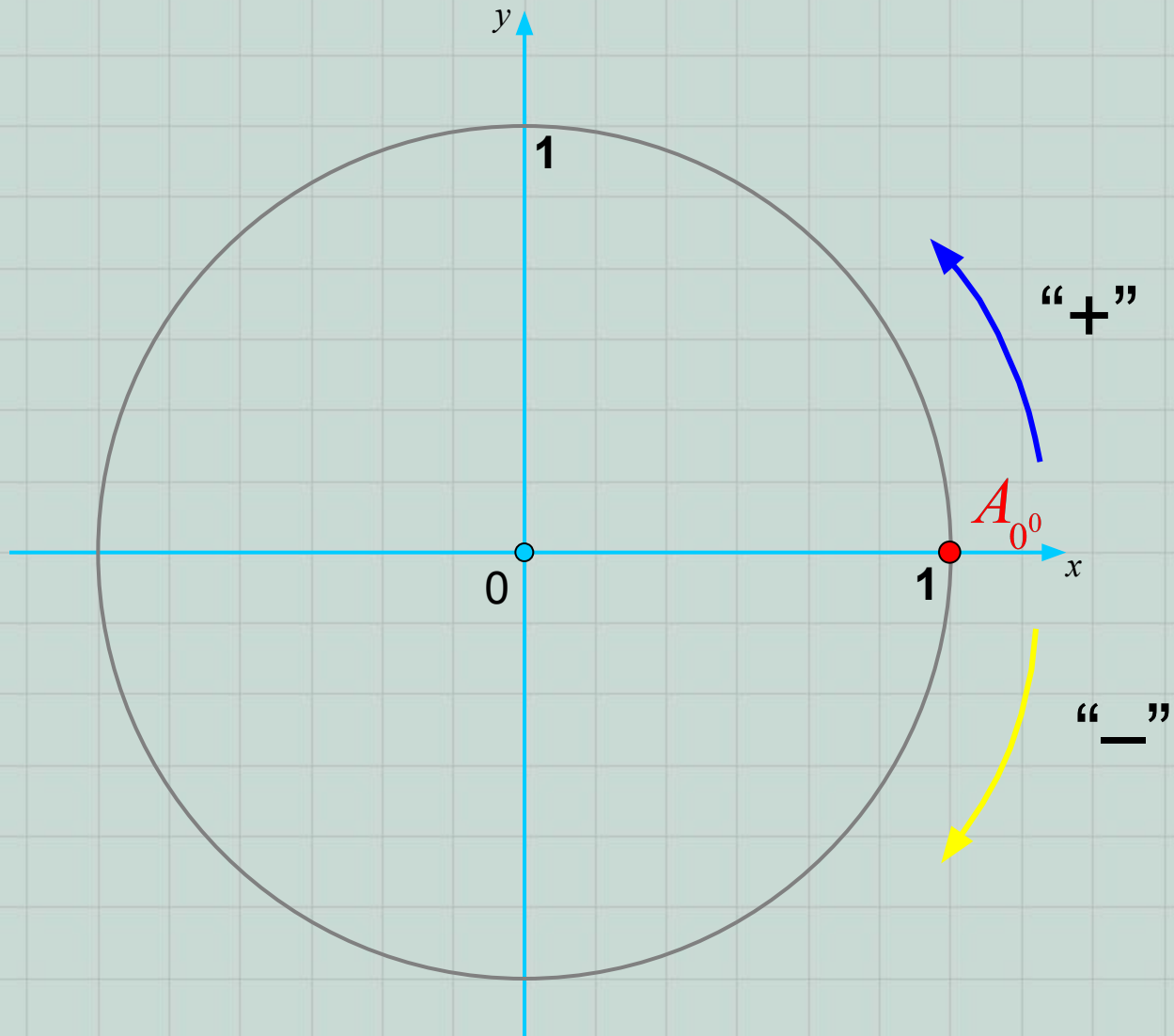


Окружность единичного радиуса с центром в начале координатной плоскости называется **единичной (тригонометрической) окружностью**, а круг, который она ограничивает – **тригонометрическим кругом**.

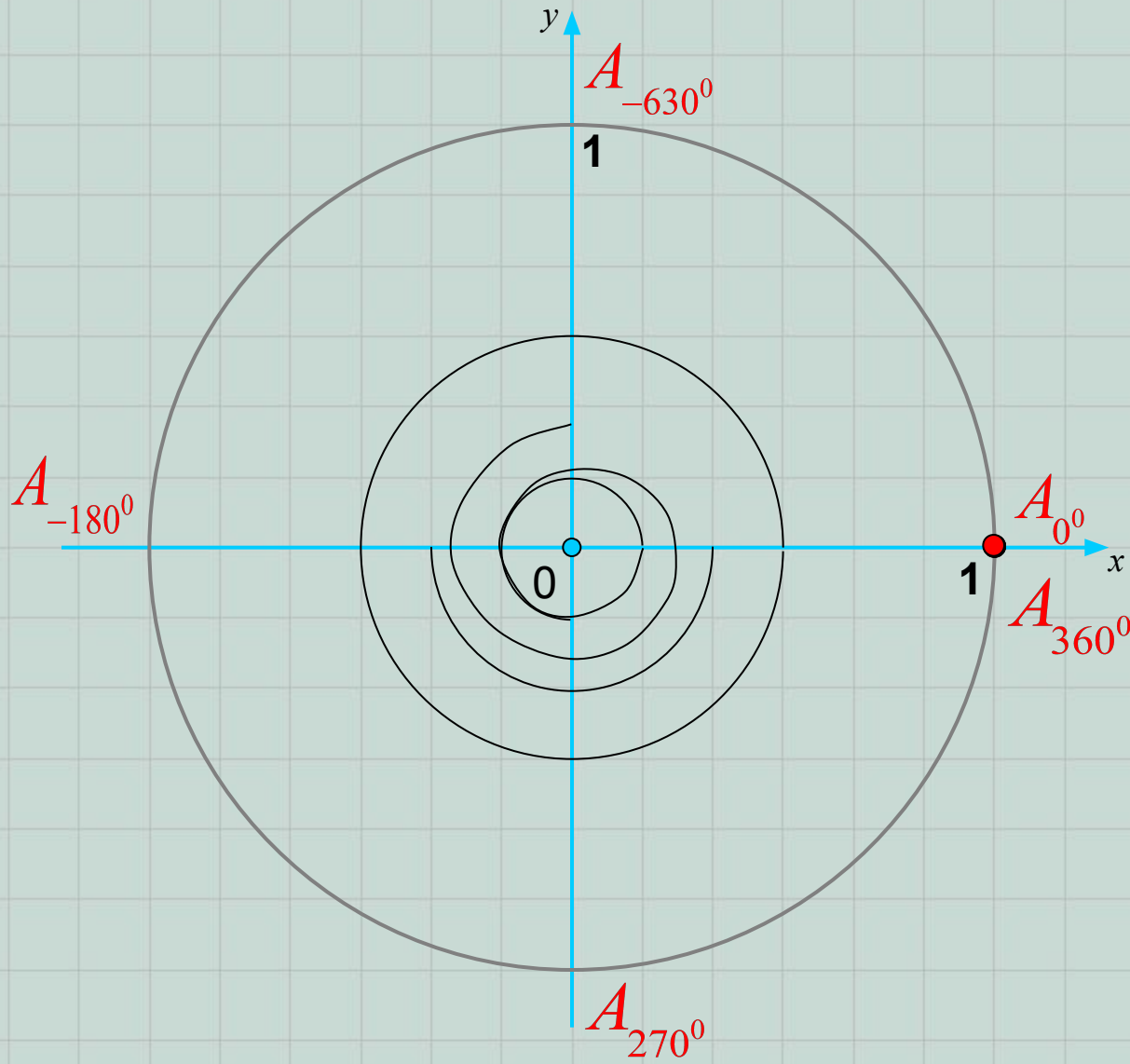


Точка пересечения окружности с положительной осью абсцисс соответствует центральному углу поворота 0° .

Эту начальную точку можно вращать по окружности, получая различные центральные углы. Вращение точки в направлении **против часовой стрелки** считается **положительным**, а **по часовой стрелке** – **отрицательным**.



Проследите за вращением точки по окружности и назовите полученные углы поворота:



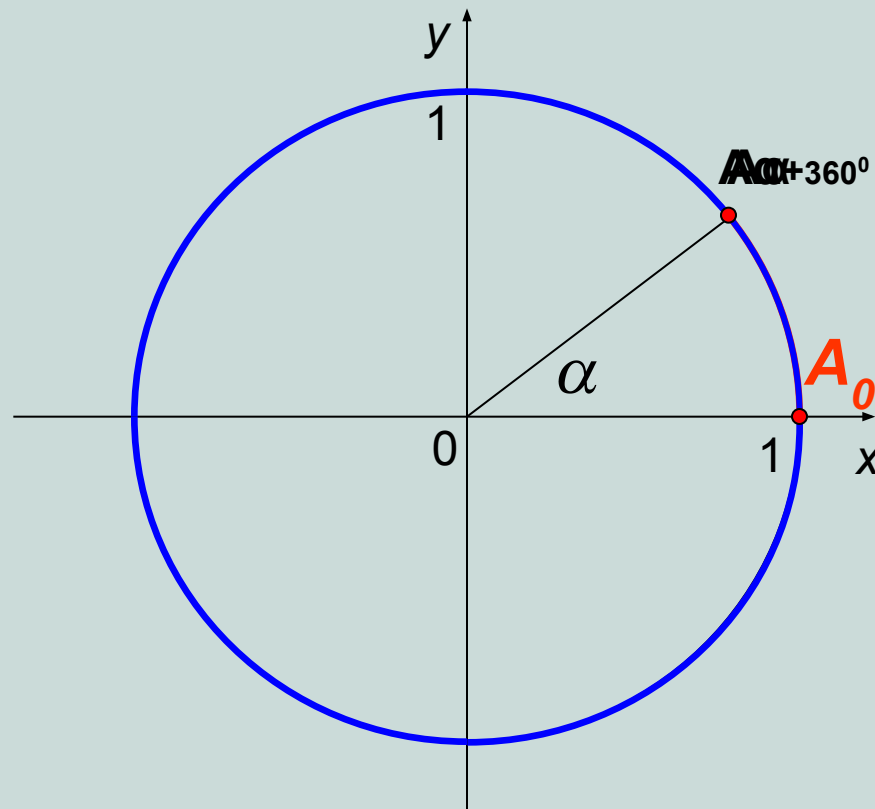
Если добавить полный поворот к острому углу α , то мы снова окажемся в той же точке А. Но теперь она соответствует углу поворота (подумайте)... $\alpha + 360^0$.

Вообще, любую точку окружности можно получить поворотом на угол, вида $\alpha + 360^0 \cdot n$, где $n \in \mathbb{Z}$ и $\alpha \in [0; 360^0)$.

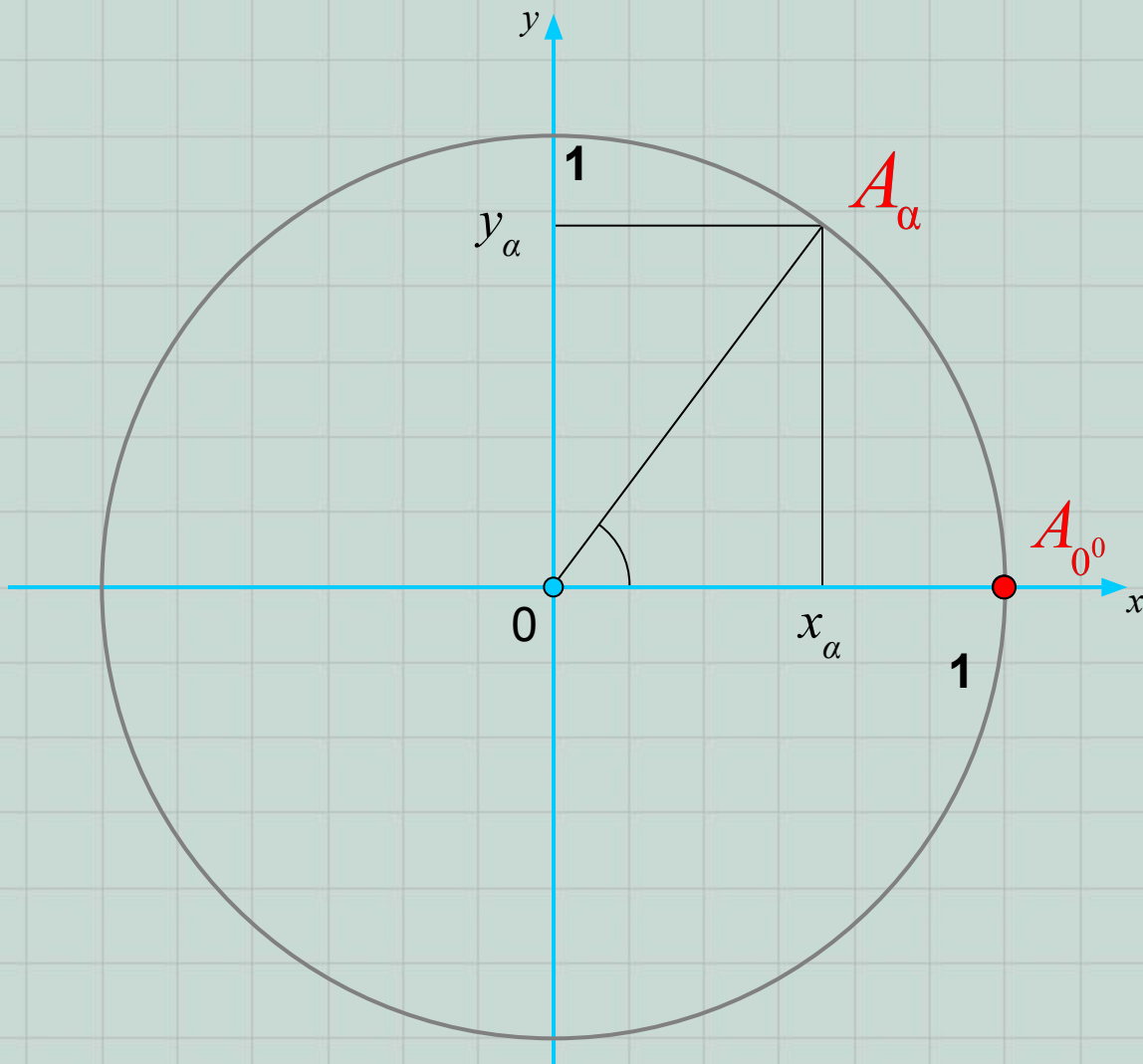
ПРИМЕР.

$$1020^0 = 360^0 \cdot 2 + 300^0$$

$$\begin{array}{r|l} 1020 & 360 \\ - 720 & 2 \\ \hline 300 & \end{array}$$



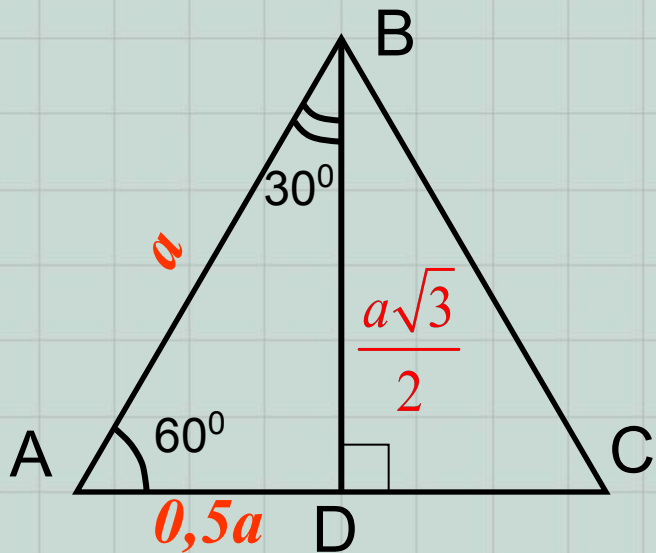
Отметим на окружности точку A_α , полученную при повороте на произвольный острый угол.



Каждая точка поворота (как и любая точка координатной плоскости) имеет две координаты: абсциссу x_α и ординату y_α , т.е.

$$A_\alpha (x_\alpha; y_\alpha)$$

Рассмотрим *равносторонний* треугольник ABC. Проведем $BD \perp AC$, $D \in AC$.



По свойствам правильного треугольника $\angle A = 60^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$. Если принять длину стороны треугольника за a ед.отр., то $AD = 0,5a$ (вспомните, почему?) и по теореме Пифагора:

$$BD = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

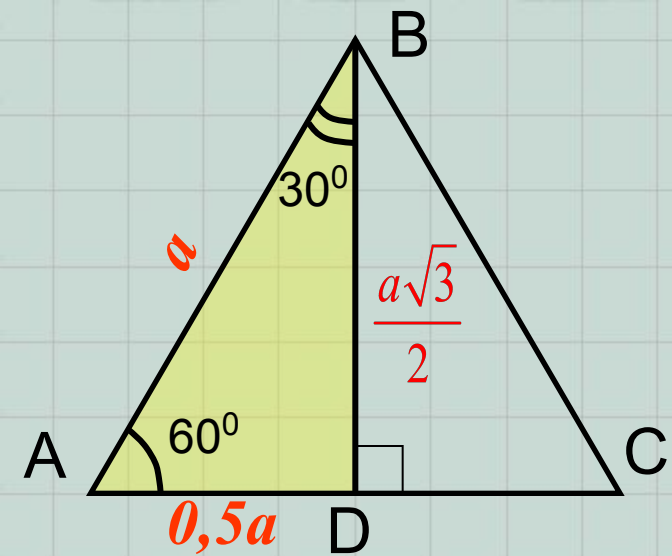
Вспомним из курса геометрии, что:

Синусом острого угла называется отношение противолежащего катета к гипотенузе;

Косинусом острого угла называется отношение прилежащего катета к гипотенузе;

Тангенсом острого угла называется отношение противолежащего катета к прилежащему;

Котангенсом острого угла называется отношение прилежащего катета к противолежащему.



Синусом острого угла называется отношение противолежащего катета к гипотенузе;

Косинусом острого угла называется отношение прилежащего катета к гипотенузе;

Тангенсом острого угла называется отношение противолежащего катета к прилежащему;

Котангенсом острого угла называется отношение прилежащего катета к противолежащему;

Из $\triangle ABD$, для углов 30° и 60° , получим:

$$\sin 30^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{0,5a}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{0,5a}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

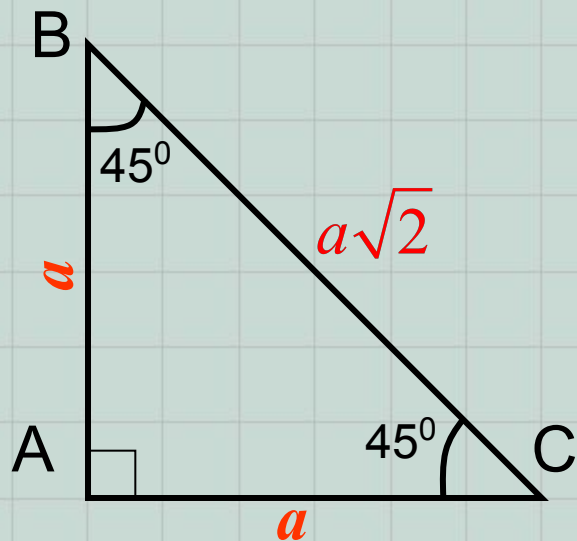
$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{AD}{BD} = 0,5a : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{AD}{BD} = 0,5a : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : 0,5a = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : 0,5a = \sqrt{3}$$

Если рассматривать прямоугольный *равнобедренный* треугольник, то используя предыдущие рассуждения, получим:



$\angle B = \angle C = 45^\circ$. По теореме Пифагора:

$$BC = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

И, тогда, по определению:

$$\sin 45^\circ = a : a\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = a : a = 1$$

$$\cos 45^\circ = a : a\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{ctg} 45^\circ = a : a = 1$$

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Оформите результаты предыдущей работы в виде таблицы в рабочих тетрадях.

Координаты точек поворота II четверти:

$$A_{120^\circ} \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$A_{135^\circ} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$A_{150^\circ} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} \right)$$

$$A_{180^\circ} (-1; 0)$$

$$A_{210^\circ} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} \right)$$

$$A_{225^\circ} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$A_{240^\circ} \left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$A_{270^\circ} (0; -1)$$

Координаты точек поворота I четверти:

$$A_{0^\circ} (1; 0)$$

$$A_{30^\circ} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} \right)$$

$$A_{45^\circ} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$A_{60^\circ} \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

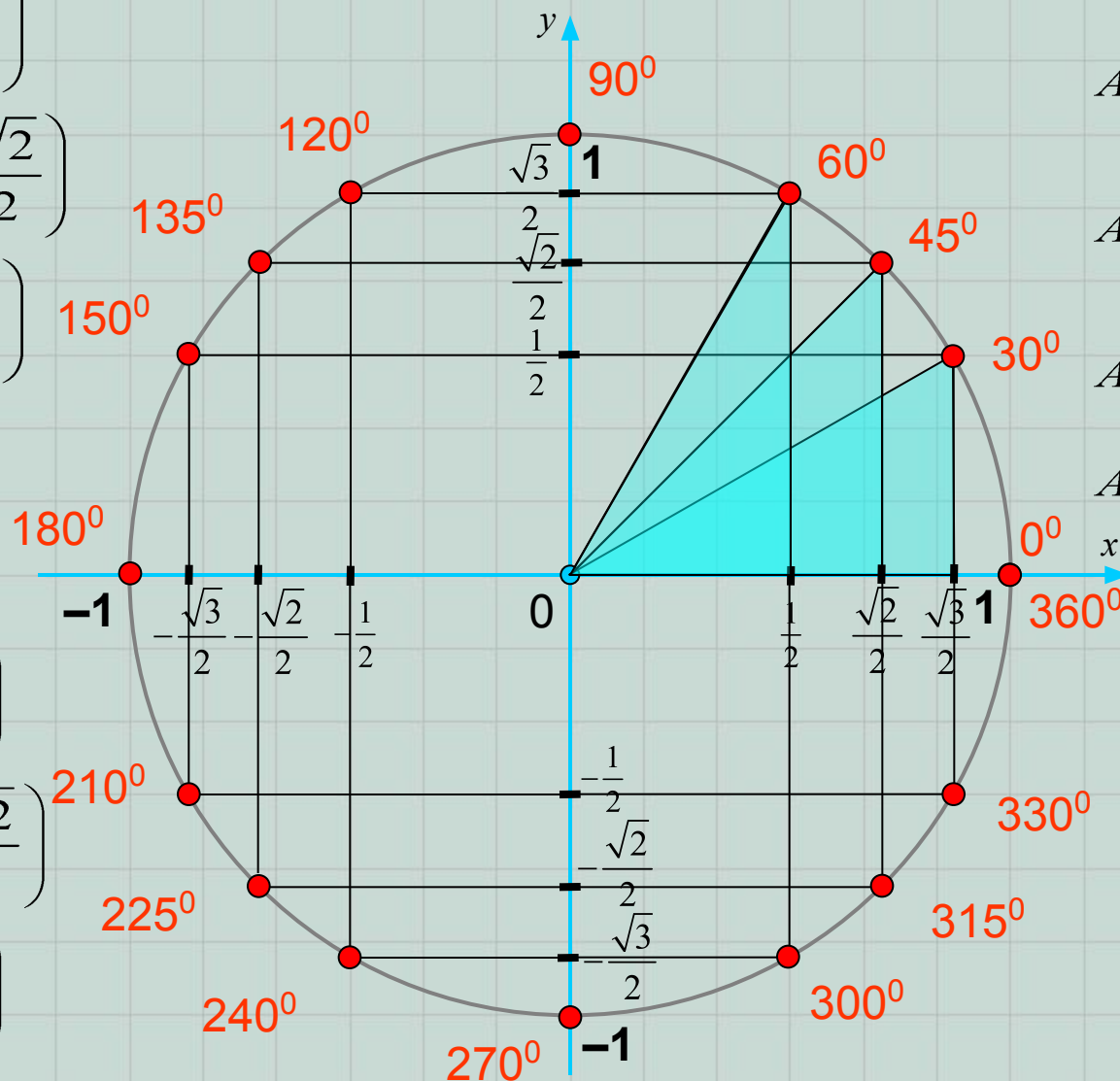
$$A_{90^\circ} (0; 1)$$

$$A_{300^\circ} \left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$A_{315^\circ} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$A_{330^\circ} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} \right)$$

$$A_{360^\circ} (1; 0)$$



Самостоятельно определите точки поворота III и IV координатных четвертей и их координаты...