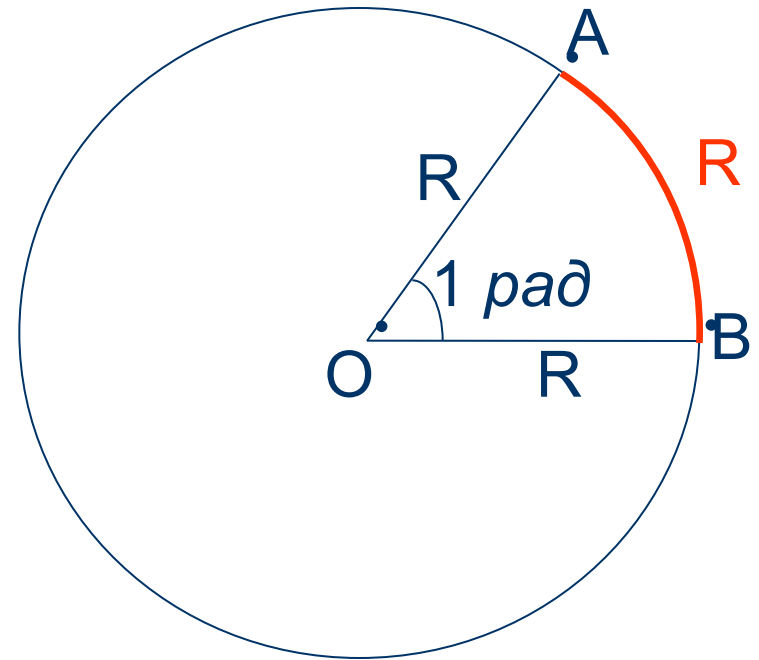
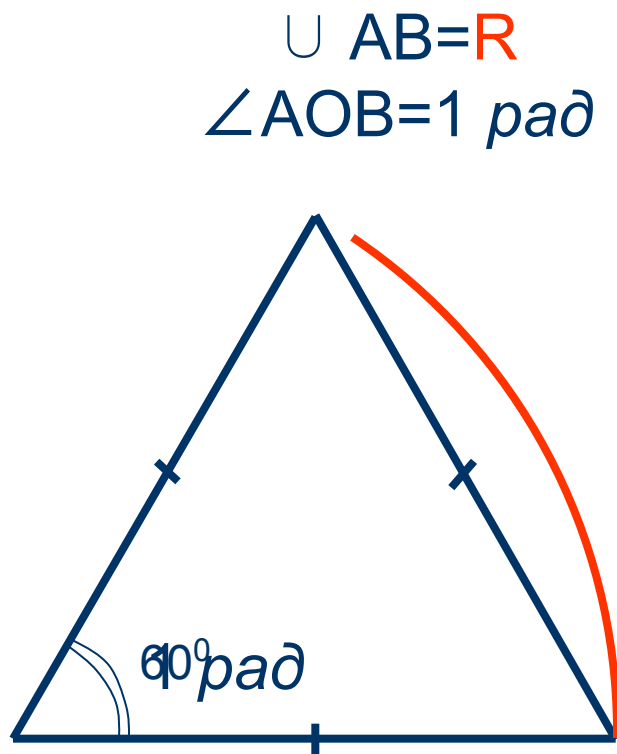


# Алгебра и начала анализа 9- 10 класс

Радианная мера  
углов и дуг

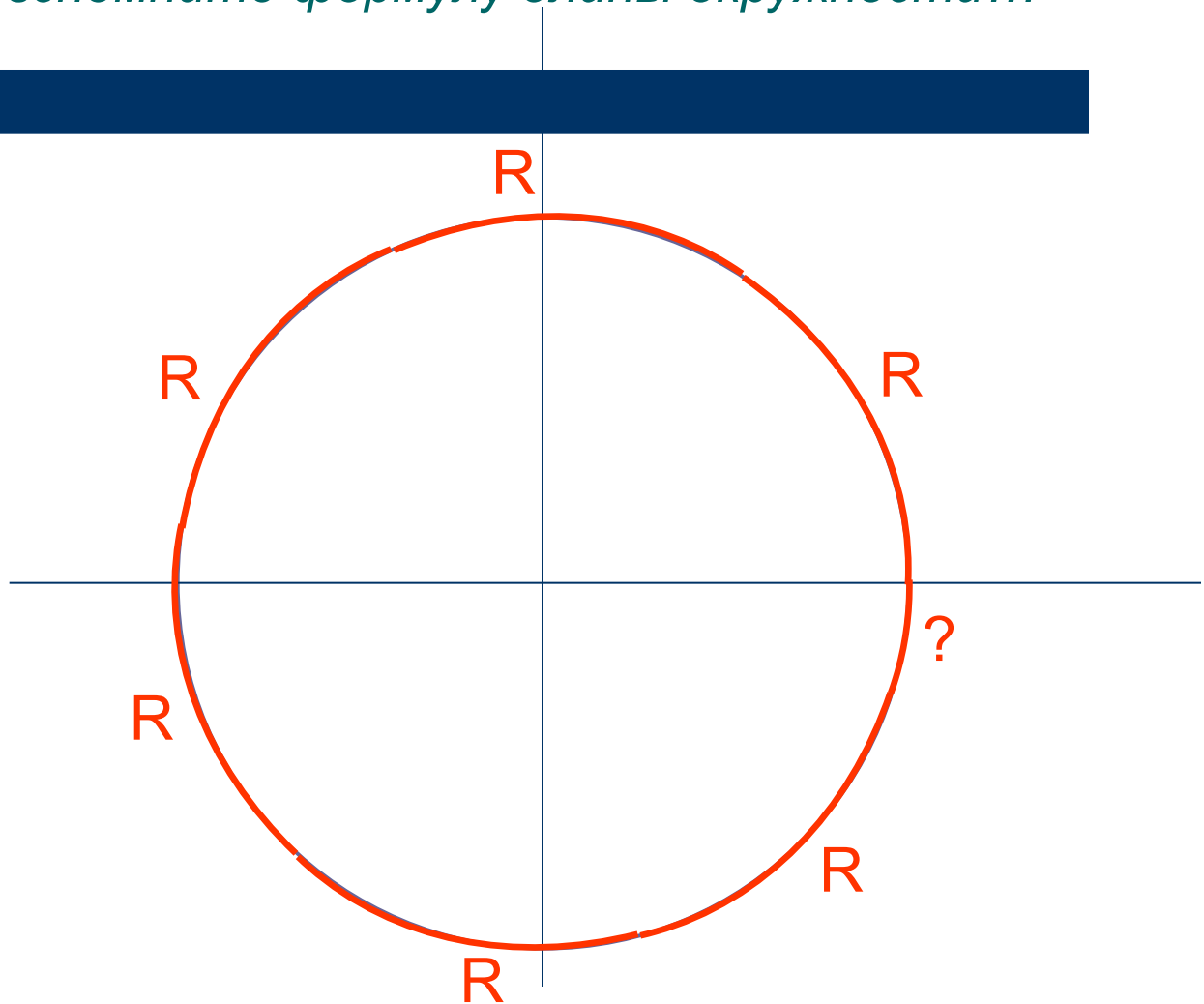


**Радианом** называется величина центрального угла, который опирается на дугу окружности длиной в один радиус (обозначается  $1 \text{ рад}$ ).



Из скольких дуг, длиной  $R$ , состоит окружность?

*Подсказка: вспомните формулу длины окружности...*



$$360^{\circ} - 2\pi \text{ рад}$$

$$1^{\circ} - x \text{ рад}$$

$$360^{\circ} - 2\pi \text{ рад}$$

$$x^{\circ} - 1 \text{ рад}$$

- **Задание 1.** Вывести правила перевода из радианной меры в градусную и наоборот.

**Ответ:**  $\alpha^{\circ} = \alpha \cdot \frac{\pi}{180^{\circ}} \text{ рад}$  – правило перевода из градусной меры в радианную;

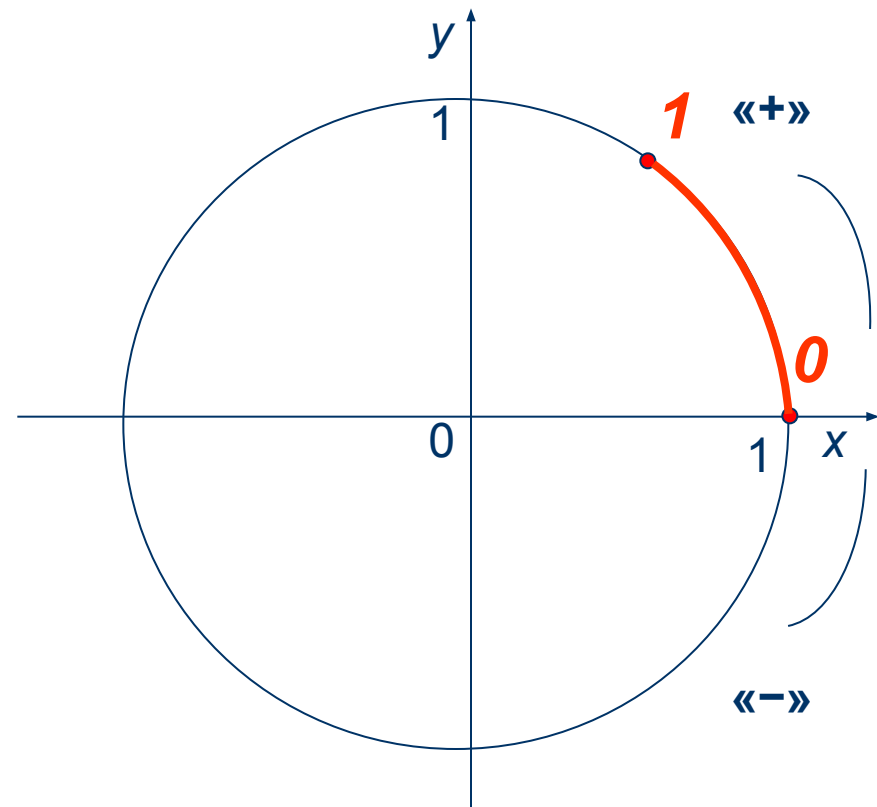
$\alpha \text{ рад} = \alpha \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$  – правило перевода из радианной меры в градусную.

$$1 \text{ рад} = \frac{180^{\circ}}{\pi}; \quad 1 \text{ рад} \approx 57^{\circ}19'$$

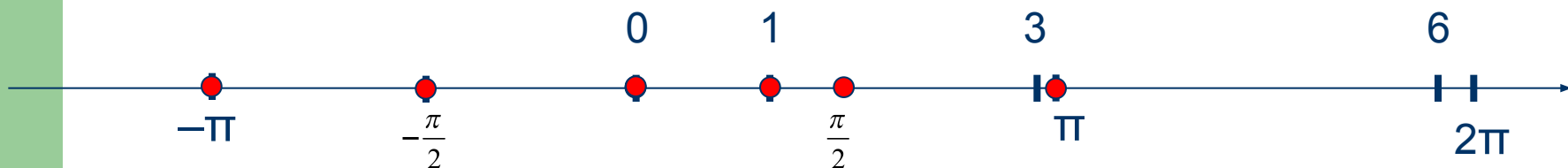
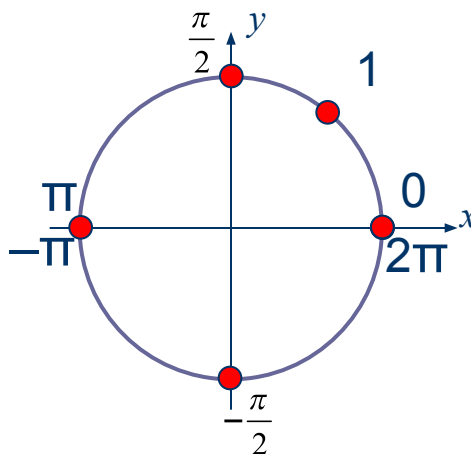
$$1^{\circ} = \frac{\pi}{180} \text{ рад}; \quad 1^{\circ} \approx 0,017 \text{ рад}$$

Окружность с центром в начале системы координат  $Oxy$  и радиусом, равным единице, называется единичной, а ограниченный ей круг – тригонометрическим.

- Приняв точку пересечения окружности с положительной частью оси  $Ox$  за начало отсчета;
- Выбрав положительное направление – против часовой стрелки, отрицательное – по часовой стрелке;
- Отложив от начала отсчета дугу в  $1 \text{ рад}$ , мы получим, что тригонометрическая окружность в некотором смысле «эквивалентна» понятию «числовая прямая».



Проследите за одновременным движением точки на координатной прямой и на тригонометрической окружности:



Обязательно разберитесь, почему на прямой **семь** точек, а на окружности их **пять**.

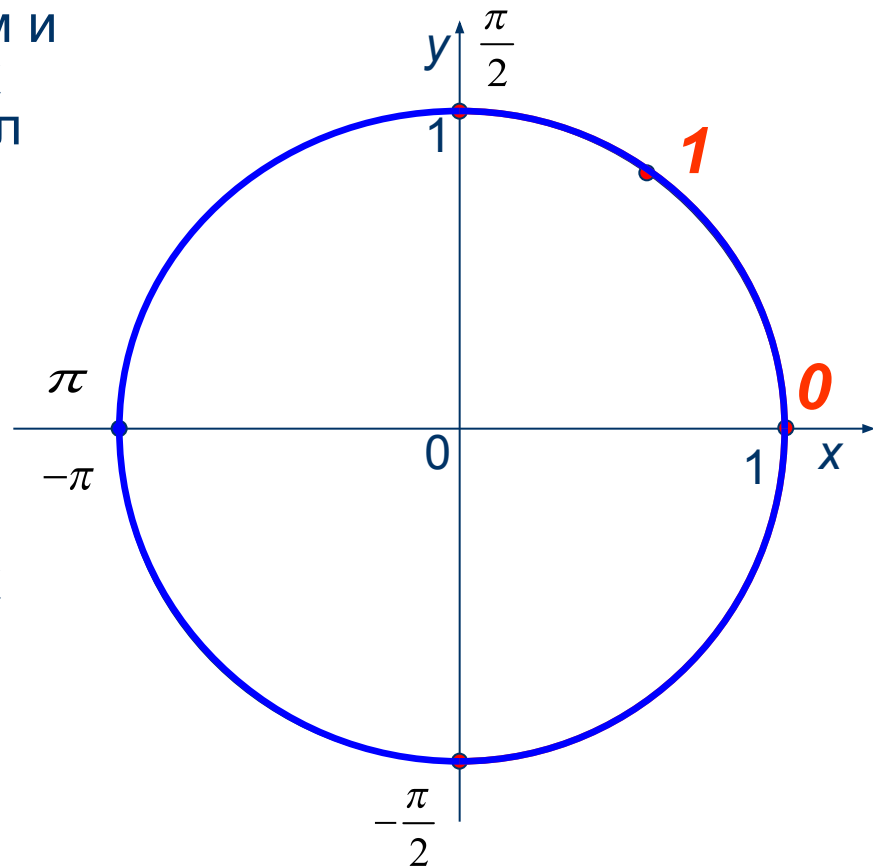
Так как дуги – это части окружности, то длины некоторых из них будут выражены через число  $\pi$  (объясните почему).  $\pi = 3,14159... \approx 3,14$

- Откладывая в положительном и отрицательном направлениях от начала отсчета прямой угол получим точки, соответствующие числам ...

$\frac{\pi}{2}$  и  $-\frac{\pi}{2}$  (объясните почему);

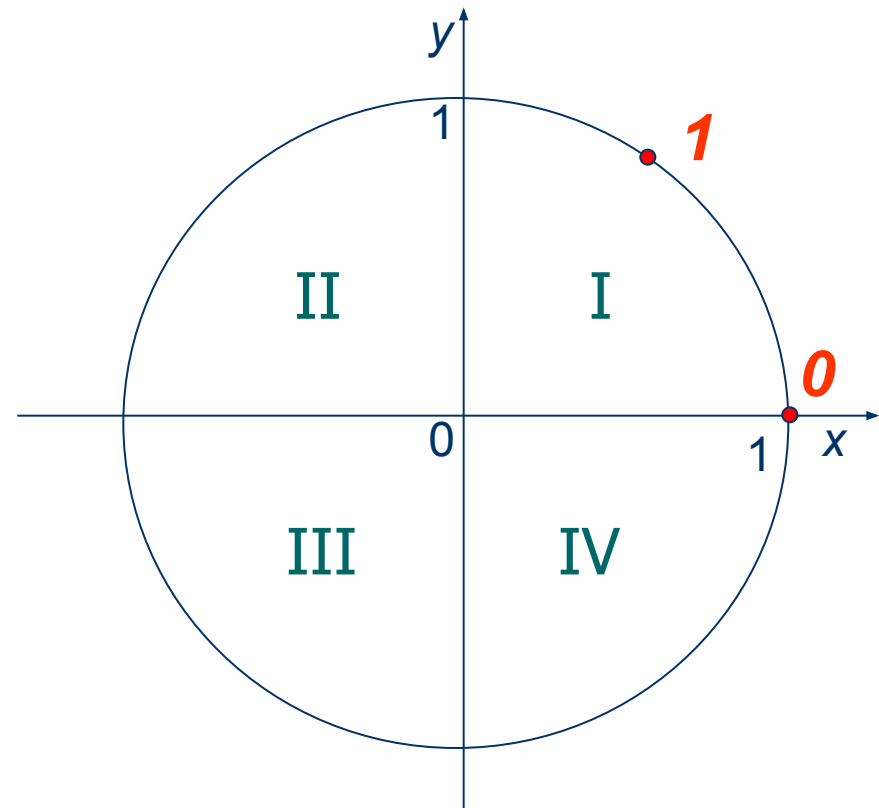
- Выполнив поворот на развернутый угол в положительном и отрицательном направлениях получаем две совпадающие точки окружности с координатами...

$\pi$  и  $-\pi$ .



Напомним, что декартова система разбивается координатными осями на четыре координатные четверти – I, II, III и IV.

- Задание 2. Определите границы координатных четвертей через углы поворота в радианной мере, взятых в положительном направлении.
- Задание 3. Выполните предыдущее задание, при условии, что выбирается отрицательное направление углов поворота.
- Задание 4. Какой координатной четверти принадлежит точка окружности с координатой 6,28?





$$\cos 60^{\circ} = \frac{1}{2}$$

– это соотношение может Вам понадобиться для понимания некоторых фактов!

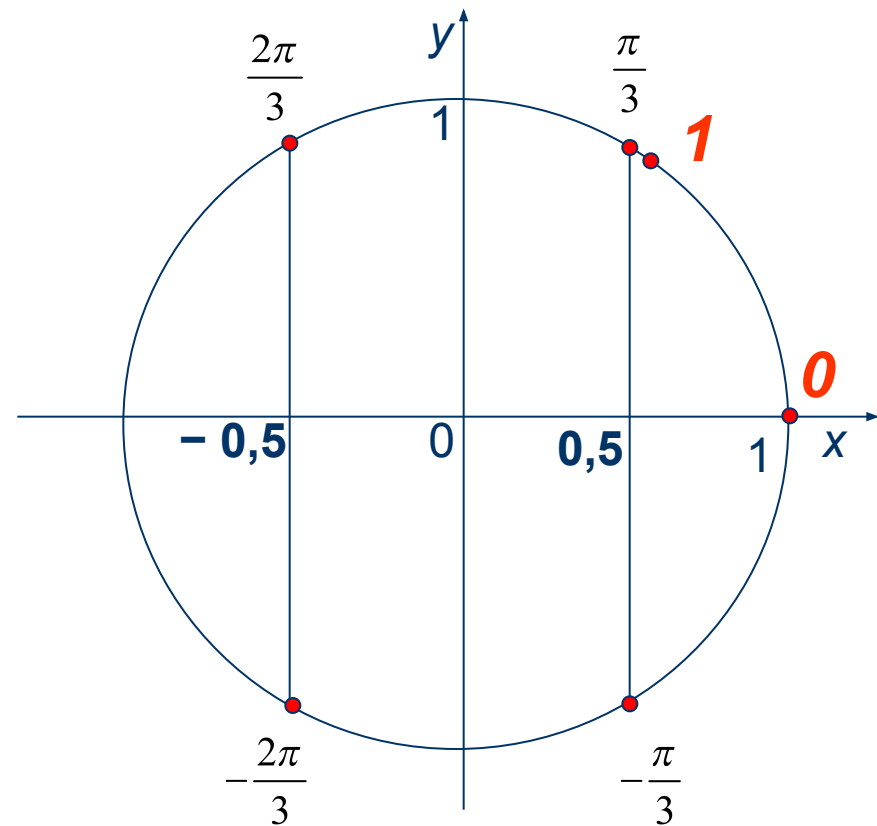
- Отметив на окружности точки с абсциссой 0,5 мы получим точки, соответствующие числам ...

$$\frac{\pi}{3} \text{ и } -\frac{\pi}{3} \text{ (объясните почему);}$$

- Аналогично, получаются точки окружности с координатами

$$\frac{2\pi}{3} ; -\frac{2\pi}{3}$$

- Обратите внимание на симметричность относительно оси Oх полученных точек!



$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

– это соотношение может Вам понадобится для понимания некоторых фактов!

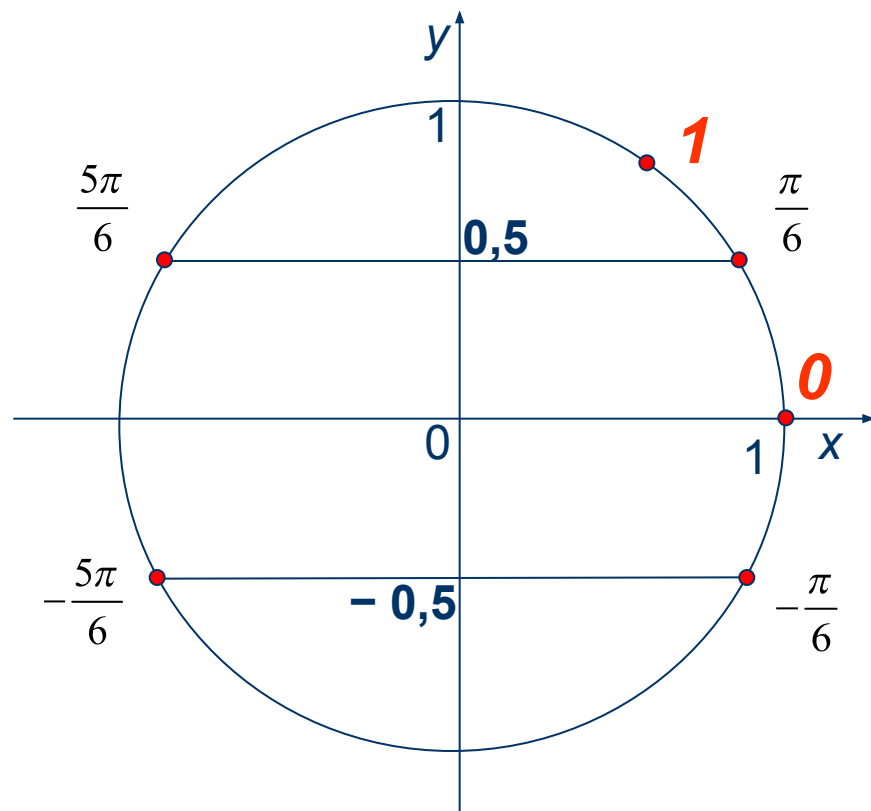
- Отметив на окружности точки с ординатой 0,5 мы получим точки, соответствующие числам ...

$$\frac{\pi}{6} \text{ и } \frac{5\pi}{6} \text{ (объясните почему);}$$

- Аналогично, получаются точки окружности с координатами

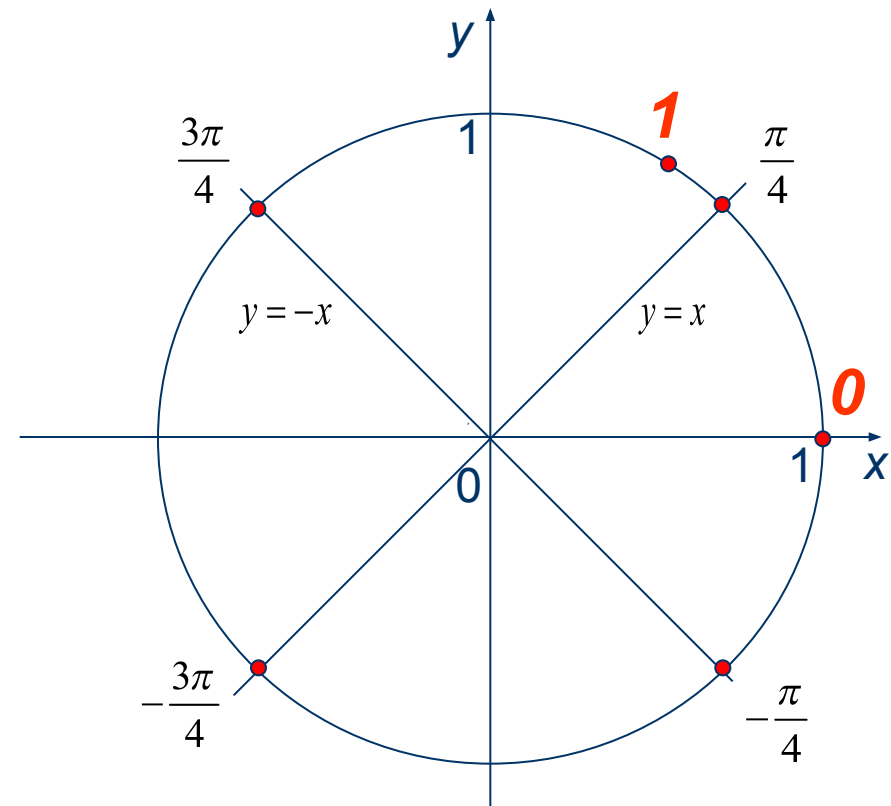
$$-\frac{5\pi}{6}, \quad -\frac{\pi}{6}$$

- Обратите внимание на симметричность относительно оси  $Oy$  полученных точек!



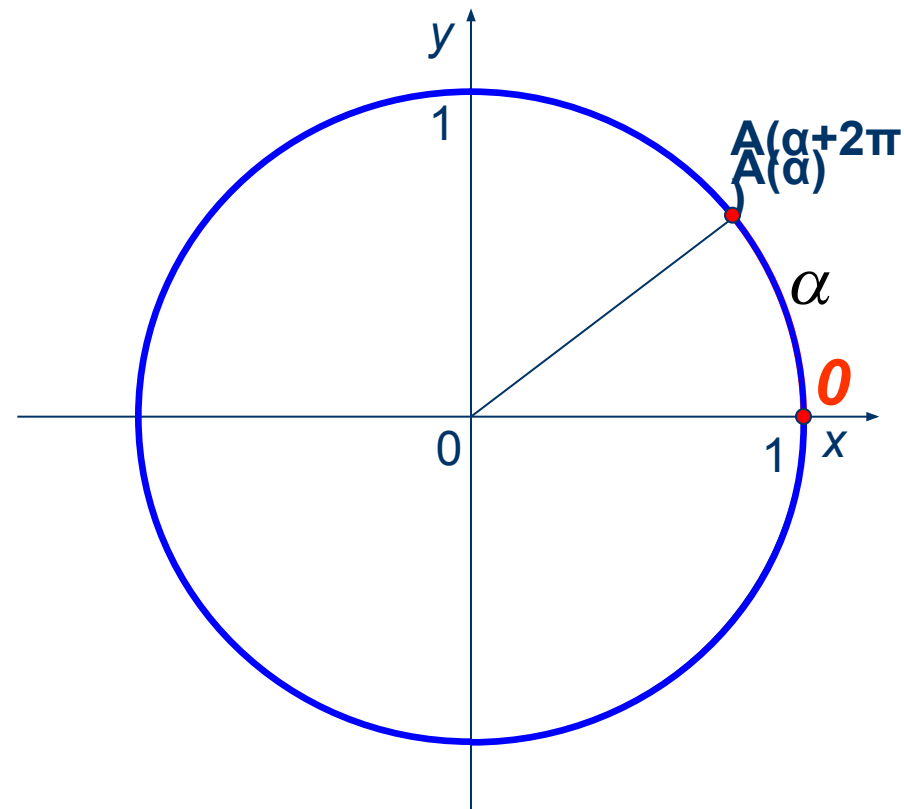
Графики функций  $y=x$  и  $y=-x$  – прямые, являющиеся биссектрисами координатных четвертей.

- Постройте графики функций  $y=x$  и  $y=-x$ . Подумайте, какие углы поворота соответствуют точкам пересечения этих прямых с тригонометрической окружностью?...
- ...Ответ:  
 $\frac{\pi}{4}$  ;  $-\frac{\pi}{4}$  ;  $\frac{3\pi}{4}$  ;  $-\frac{3\pi}{4}$  .



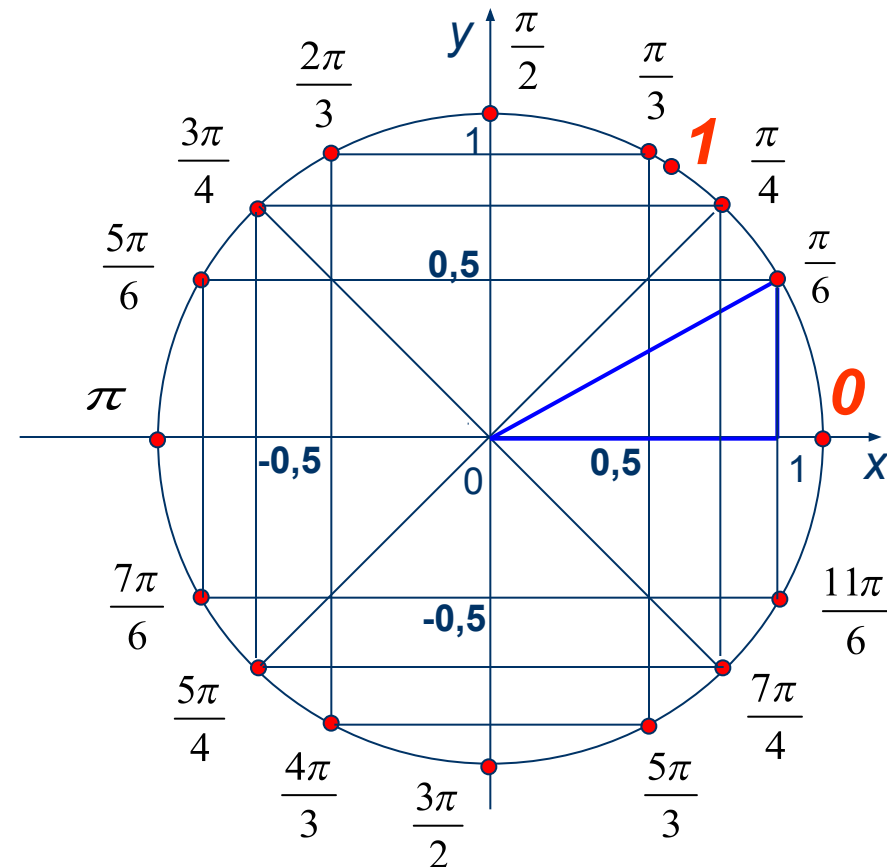
Отметим на тригонометрической окружности точку  $A$ , соответствующую **произвольному острому положительному** углу поворота  $\alpha$ .

- Если добавить полный поворот к углу  $\alpha$ , то мы снова окажемся в той же точке  $A$ . Но теперь ее координата равна (подумайте)...  
 $\alpha + 2\pi$
- Вообще, любую точку окружности можно получить поворотом на угол, вида  $\alpha + 2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$  и  $\alpha \in [0; 2\pi)$ .



Итогом нашей предыдущей работы является данная окружность, на которой отмечены наиболее часто встречающиеся в различных таблицах углы.

- Примечание. На чертеже отмечены только положительные углы поворота.
- Задание 5. Найдите координаты всех точек, отмеченных на данной окружности (указание: рассмотрите различные прямоугольные треугольники с гипотенузой-радиусом (см. рис.) и примените теорему Пифагора ; помните о симметрии точек).

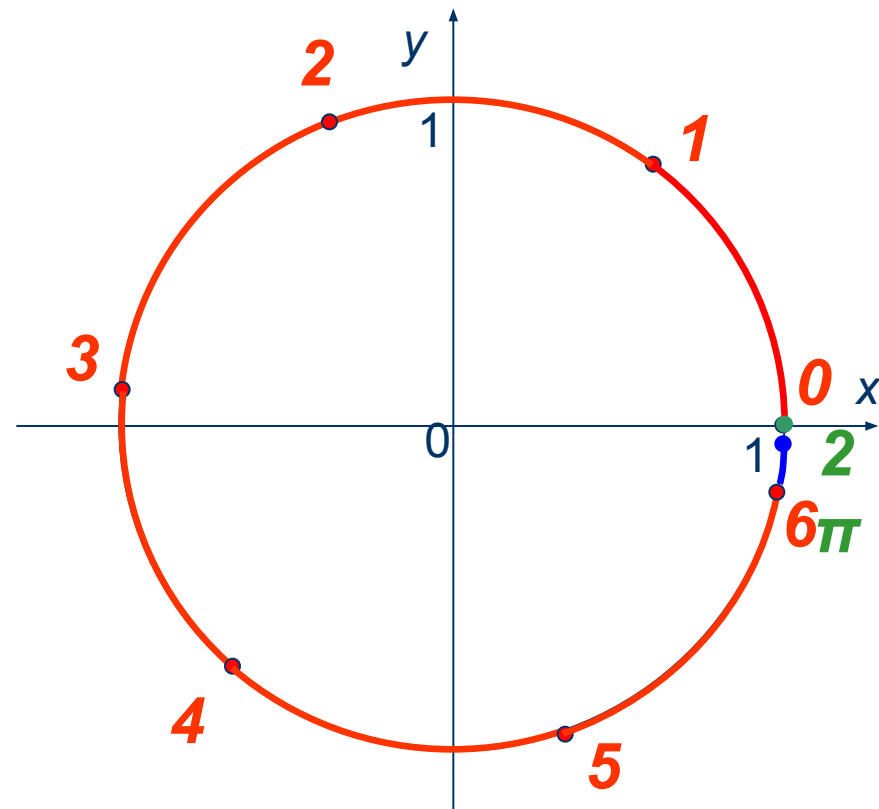


# Ответы и решения.

- Задание 2.  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  - I четверть,  $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$  - II четверть,  
 $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$  - III четверть,  $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$  - IV четверть.
- Задание 3.  $\left(-2\pi; -\frac{3\pi}{2}\right)$  - I четверть,  $\left(-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right)$  - II четверть,  
 $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$  - III четверть,  $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$  - IV четверть

# Ответы и решения.

- Задание 4.  $6,28 \in IV$   
(см.рис.)  
 $6,28 < 2\pi$  (обязательно  
разберитесь в  
совпадении цвета  
цифр и некоторых  
частей окружности)!



# Ответы и решения.

- Задание 5.  $0(1;0)$      $\frac{\pi}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$      $\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$      $\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$   
 $\frac{\pi}{2}(0;1)$      $\frac{2\pi}{3}\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$      $\frac{3\pi}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$      $\frac{5\pi}{6}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$   
 $\pi(-1;0)$      $\frac{7\pi}{6}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$      $\frac{5\pi}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$      $\frac{4\pi}{3}\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$   
 $\frac{3\pi}{2}(0;-1)$      $\frac{5\pi}{3}\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$      $\frac{7\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$      $\frac{11\pi}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$