

Математика

Лекция 5

§ 7. Линейные пространства со скалярным произведением

В линейном пространстве L над полем R определено скалярное произведение, если любой упорядоченной паре $x, y \in L$ по некоторому правилу поставлено в соответствие *действительное число*, которое обозначается через (x, y) и при этом выполняются следующие условия (аксиомы скалярного произведения):

1. $\forall x, y \in L \quad (x, y) = (y, x)$;
2. $\forall x, y \in L, \forall \lambda \in R \quad (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
3. $\forall x, y, z \in L \quad (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
4. $\forall x \in L \quad (x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

Действительное линейное пространство, в котором определено скалярное произведение, называется *евклидовым пространством* и обозначается E .

Например, $\langle V_3; (, \cdot) \rangle$ котором

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) -$$

трехмерное евклидово пространство геометрических векторов.

Некоторые метрические понятия в евклидовом пространстве

1. Норма (длина) элемента: $\|x\| \stackrel{\Delta}{=} \sqrt{(x, x)}$.

Свойства нормы:

а) $\forall x \in E \quad \|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

б) $\forall x \in E, \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;

в) $\forall x, y \in E \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

2. Метрика (расстояние) элементов:

$$d(x, y) \stackrel{\Delta}{=} \|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)}.$$

Свойства метрики:

а) $\forall x, y \in E \quad d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$

б) $\forall x, y \in E \quad d(x, y) = d(y, x);$

в) $\forall x, y, z \in E \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$

3. Угол между элементами: $\widehat{(x, y)} = \varphi \in [0, \pi]$,
который определяется по формуле

$$\cos \widehat{(x, y)} = \cos \varphi \stackrel{\Delta}{=} \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}, \quad (x \neq \theta, \quad y \neq \theta).$$

В евклидовом пространстве можно определить
ортogonalность элементов: $x \perp y \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} (x, y) = 0$.

Некоторые метрические соотношения в E

1. Неравенство Коши-Буняковского:

$$\forall x, y \in E \quad |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

2. Неравенство Минковского:

$$\forall x, y \in E \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

3. Теорема Пифагора:

$$x \perp y \Rightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Пусть L – линейное пространство над полем C .

Отображение $(,) : L \times L \rightarrow C$ называется скалярным произведением в L , если $\forall x, y, z \in L, \forall \lambda \in C$:

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
2. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
3. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
4. $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

Комплексное линейное пространство со скалярным произведением называется **унитарным пространством** и обозначается U .

Выражение скалярного произведения через координаты перемножаемых векторов

Пусть в U_n задан произвольный фиксированный базис

$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ и пусть элементы $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_i, y = \sum_{j=1}^n \beta_j \varepsilon_j$.

Тогда $(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_i, \sum_{j=1}^n \beta_j \varepsilon_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \bar{\beta}_j (\varepsilon_i, \varepsilon_j)$.

Обозначив $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = g_{ij}$, получим $(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \bar{\beta}_j g_{ij}$.

Матрица $(g_{ij})_{n \times n}$ называется матрицей Грама в базисе $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ и обозначается G .

Матрица Грама базисных элементов $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ задает скалярное произведение в этом базисе.

Скалярное произведение элементов x и y в базисе $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ пространства U_n можно записать в матричной форме:

$$(x, y) = X^T G \bar{Y}, \quad X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$



Замечание. В евклидовом пространстве E_n скалярное произведение элементов x и y в произвольном базисе $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ равно $(x, y) = X^T G Y$.

Теорема о необходимых и достаточных условиях линейной зависимости системы векторов в евклидовом пространстве: система элементов

$A = \{a_1, \dots, a_k\}$ линейно зависима тогда и только тогда, когда

Следствие. Система элементов $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ линейно независима тогда и только тогда, когда $\det G(a_1, \dots, a_k) \neq 0$.

Теорема имеет место для унитарного пространства.

Ортогональная система элементов и ее свойства

Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ система элементов унитарного (евклидова) пространства $U(E)$.

A – ортогональная система элементов тогда и только тогда, когда $\forall i, j \in \{1, \dots, k\} \quad (a_i, a_j) = 0, i \neq j$.

Теорема 1. Если $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ ортогональная система ненулевых элементов, то A – линейно независимая система.

Теорема 2. Пусть $A = \{a_1, \dots, a_k\} \subset U$ и $b \in U$,

$$\forall i \in \{1, \dots, k\} \ a_i \perp b \Rightarrow \left(\forall \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i \perp b \right).$$

Замечание. Если элемент b ортогонален каждому элементу из $L = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$, то говорят, что b ортогонален подпространству L и записывают $b \perp L$.

Нормированность элемента

Элемент $a \in U$ называется *нормированным*, если его норма $\|a\| = 1$.

Любой ненулевой элемент a можно нормировать, умножив его на некоторое число $\lambda \neq 0$.

Действительно, по условию нормировки элемента:

$$\|\lambda \cdot a\| = |\lambda| \cdot \|a\| = 1 \Rightarrow |\lambda| = \frac{1}{\|a\|}.$$

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{(a, a)}} \text{ нормирующий коэффициент.}$$

Система $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ называется *ортонормированной* (ОНС), если $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$:

$$(a_i, a_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Матрица Грама векторов ОНС равна единичной матрице.

Базис в унитарном (евклидовом) пространстве называется ортонормированным (ОНБ), если его элементы образуют ортонормированную систему.

В ОНБ (e_1, \dots, e_n) пространства U_n скалярное произведение векторов x и y равно $(x, y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{\beta}_i$,

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = (e_1, \dots, e_n) X, \quad y = \sum_{j=1}^n \beta_j e_j = (e_1, \dots, e_n) Y.$$

В ОНБ евклидова пространства E_n скалярное произведение векторов x и y равно $(x, y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i = X^T Y$.

Теорема о существовании ОНБ. В унитарном (евклидовом) n -мерном пространстве существует ОНБ.

Для построения ортогонального базиса применяют процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

Пусть $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ – произвольный базис в U_n . Тогда

$$e_1 = \varepsilon_1, \quad e_k = \varepsilon_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{ki} e_i, \quad k \in \{2, \dots, n\}, \quad \lambda_{ki} = -\frac{(\varepsilon_k, e_i)}{(e_i, e_i)},$$

образуют ортогональный базис U_n .