Тольяттинский социально-педагоги

Преподаватель математических
дисциплин: Лихачева Е.С.

Учебный модуль 1
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Тема 1.1
Математические понятия, предложения, доказательства

Предмет математики:

- Родовое понятие.
- Видовое отличие.

Объем и содержание понятий.

Понятие - форма мышления, в которой отражаются существенные отличительные признаки предметов. *(Например: «апельсин», «фрукт», «трапеция», «белизна», «река Нил», «ураганный ветер»)*

Признаком предмета называется то, в чем предметы сходны друг с другом или чем они друг от друга отличаются.

Содержанием понятия называется совокупность существенных признаков, отраженных в этом понятии. *(Содержанием понятия «ромб» является совокупность двух существенных признаков: «быть параллелограммом» и «иметь равные стороны».)*

Виды признаков

- <u>Существенными</u> называются такие признаки, каждый из которых, взятый отдельно, необходим, а все вместе взятые достаточны, чтобы с их помощью отличить (выделить) данный предмет (явление) от всех остальных и обобщить однородные предметы в класс.*(Например, одним из существенных признаков понятия «человек» является наличие сознания.)*
- <u>Несущественные</u> - это преходящие, второстепенные признаки, приобретая или теряя которые, предмет остается самим собой. (*Например, несущественным признаком понятия «человек» является цвет его волос, вес, рост и др.)*

Родовое понятие и видовое отличие

Рассмотрим определение параллелограмма: «*Параллелограммом называется четырехугольник, противоположные стороны которого параллельны*».

Как видим, это определение построено так:

Сначала указано название объекта определяемого понятия — параллелограмм, затем указаны такие его свойства:

1) параллелограмм — это четырехугольник;
2) противоположные стороны параллельны.

Первое свойство — это указание того более общего понятия, к которому принадлежит определяемое понятие. Это более общее понятие называется **родовым** по отношению к определяемому понятию. В данном случае родовым понятием для параллелограмма является четырехугольник. Второе свойство — это указание **видового** свойства, которое отличает параллелограмм от других видов четырехугольника.

Объем понятия

- <u>Объем понятия</u> - это множество предметов, каждому из которых принадлежат признаки, относящиеся к содержанию понятия.

Например, объем понятия «река» включает в себя множество, состоящее из рек, носящих имена Обь, Иртыш, Енисей, Волга и др. Объём понятия «ученик» включает в себя всех людей, которые когда-либо учились (чему-нибудь и как-нибудь), учатся сейчас или будут учиться.

Автомобиль - транспортное средство, имеющее двигатель, кузов, колеса и устройство управления. Это ***содержание*** *понятия, а его* ***объемом*** *являются все существующие в мире автомобили.*

Задание

Укажите хотя бы один элемент объема понятия:

- 1. Президент
- 2. Алфавит
- 4. Текст
- 5. Поезд
- 6. Мелодия
- 7. Студенческая группа
- 9. МГУ имени М.В. Ломоносова
- 10. Вечный двигатель
- 11. Русский алфавит
- 12. Созвездие

Высказывания и высказывательные формы

Высказыванием в математике называют предложение, относительно которого имеет смысл вопрос: истинно оно или ложно.

Например, предложения 1, 2, 4, 5 и 6 приведенные выше, есть высказывания, причем предложения 1, 4, 5 и 6 – истинные, 2 – ложное.

Высказывания принято обозначать прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, …, Z. Если высказывание A *истинно*, то записывают: A – «и», если же высказывание A – *ложно*, то пишут: A – «л».

«**Истина**» и «**ложь**» называются значениями истинности высказывания. Каждое высказывание либо истинно, либо ложно, быть одновременно тем и другим оно не может.

- Предложение x+5=8 не является высказыванием, так как о нем нельзя сказать: истинно оно или ложно. Однако при подстановке конкретных значений переменной x оно обращается в высказывание: истинное или ложное. *Например, если x=2, то 2+5=8- ложное высказывание, а при x=3 оно обращается в истинное высказывание 3+5=8.* Предложение x+5=8 называется **высказывательной формой.** Оно порождает множество высказываний одной и той же формы.
- По числу переменных, входящих в высказывательную форму, различают одноместные, двухместные и т.д. высказывательные формы и обозначают: A(x), A(x,y) и т.д. *Например, x+5=8 – одноместная высказывательная форма, а предложение «Прямая x параллельна прямой y» – двухместная.*

Конъюнкция, дизъюнкция и отрицание высказываний и высказывательных форм

1. Отрицание.

Эта логическая операция соответствует в обыденной жизни частице «не».

- **Отрицанием** высказывания x называется новое высказывание, которое является истинным, если высказывание x ложно, и ложным, если высказывание x истинно.
- Отрицание высказывания *x* обозначается $\overline{x}$ и читается «не *x*». Логические значения высказывания можно описать с помощью таблицы, которая называется *таблицей истинности*:

x	$\overline{x}$
1	0
0	1

Дизъюнкция (логическое сложение).

- Дизъюнкцией двух высказываний x, y называется новое высказывание, которое считается истинным, если хотя бы одно из высказываний x или y истинно и ложным, если они оба ложны.
- Дизъюнкция высказываний x, y обозначается $x \vee y$ и читается «x или y». Логические значения дизъюнкции описываются таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Пример.
x – «5>3», *y* – «2>4». Тогда $x \vee y$ – «5>3»v «2>4» истинно, так как истинно высказывание *x*.

Конъюнкция

- Конъюнкцией двух высказываний *x*, *y* называется новое высказывание, которое считается истинным, если оба высказывания *x*, *y* истинны, и ложным, если хотя бы одно из них ложно.
- Конъюнкция высказываний *x*, *y* обозначается $x \wedge y$ и читается «*x* и *y*». Высказывания *x*, *y* называются членами конъюнкции. Логические значения конъюнкции описываются следующей таблицей истинности:

x	y	$x \wedge y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Пример

x – «6 делится на 2», *y* – «6 делится на 3». Тогда $x \wedge y$ – «6 делится на 2» $\wedge$ «6 делится на 3» истинно.

Способы математического доказательства

<u>Определение:</u> Математическое доказательство — рассуждение с целью обоснования истинности какого-либо утверждения (теоремы), цепочка логических умозаключений, показывающая, что при условии истинности некоторого набора аксиом и правил вывода утверждение верно.

Прямое доказательство

- **Прямое** доказательство предусматривает применение только непосредственного дедуктивного вывода из считающихся верными утверждений (аксиом, ранее доказанных лемм и теорем), без использования суждений с отрицанием каких-либо утверждений.
- **Индуктивный** метод, позволяющий перейти от частных утверждений ко всеобщим, наиболее интересен в применении к бесконечным совокупностям объектов, но её формулировки и применимость существенно отличаются в зависимости от сферы применения.
- Доказательства **от противного** устроены так. Делают предположение, что верно утверждение В, противное, то есть противоположное, тому утверждению А, которое требуется доказать, и далее, опираясь на это В, приходят к противоречию; тогда заключают, что, значит, В неверно, а верно А.

Доказательство методом перебора

Требуется доказать, что среди целых неотрицательных чисел, меньших числа 420, нет других корней уравнения

$$(x+2008)(x-3)(x-216)(x-548)=0,$$

кроме чисел 3 и 216. Доказательство: последовательно перебирая числа 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, ... , 213, 214, 215, 217, 218, 219, ... , 417, 418, 419 и подставляя их в уравнение, убеждаемся, что ни одно из них не обращает в нуль левую часть. Это есть типичное доказательство **методом перебора.**

Кванторы

- ∀ - квантор всеобщности
- ∃ - существования
- ⇒ - следование
- ⇔ - равносильность
- ∧ и ∨ - Конъюнкция и дизъюнкция
- ¬ - отрицание
- = - равенство
- ∈ и ∉ - Принадлежность и непринадлежность
- ⊆ и ⊇ - подмножество и надмножество
- { } – множество ({|} - Множество элементов, удовлетворяющих условию)
- ∅ - пустое множество
- ∪ и ∩ - объединение и пересечение

Решение задач на распознавание объектов.

- Дайте определение квадрата через понятие прямоугольник. Пользуясь данным определением, укажите условия, при котором фигура будет являться квадратом

-Выявите логическую структуру следующих предложений

Параллельные прямые- это две прямые принадлежащие плоскости и непересекающиеся или совпадающие.

Построение высказываний с кванторами.

- **Ква́нтор** — общее название для логических операций, ограничивающих область истинности какого-либо предиката и создающих высказывание. Чаще всего упоминают:
- **Квантор всеобщности** (обозначение :∀ , читается: «для любого…», «для каждого…», «для всех…» или «каждый…», «любой…», «все…»).
- **Квантор существования** (обозначение: ∃ , читается: «существует…» или «найдётся…»).
- **Предика́т** (лат. *praedicatum* — заявленное, упомянутое, сказанное) — это то, что утверждается о субъекте. Субъектом высказывания называется то, о чём

Пример

- Обозначим *P(x)* предикат «*x* делится на 5». Используя *квантор всеобщности*, можно формально записать следующие высказывания (конечно, ложные):
- любое натуральное число кратно 5;
- каждое натуральное число кратно 5;
- все натуральные числа кратны 5;
- следующим образом: $(\forall x \in \mathbb{N})P(x)$

Пример

- Следующие (уже истинные) высказывания используют *квантор существования*:
- существуют натуральные числа, кратные 5;
- найдётся натуральное число, кратное 5;
- хотя бы одно натуральное число кратно 5.
- Их формальная запись: $(\exists\ x \in \mathbb{N})P(x)$

Задание:

Записать, используя кванторы, высказывания и определить ложно оно или истинно:

1. Существует целое четное число
2. Все целые числа четные
3. Найдется простое натуральное число
4. Любое натуральное число является простым
5. Множество всех простых чисел является подмножеством натуральных чисел.

Решение:

1. Существует целое четное число

Введем предикат *P(x)* – «x - четное», получим:

$(\exists\, x \in \mathbb{Z})P(x)$. Читается «существует целое число x, которое четно». Истинно, так как среди целых чисел есть четные (2, 4, 6, …).

2. Все целые числа четные

$(\forall\, x \in \mathbb{Z})P(x)$. Читается «любое целое число x - четное». Ложно, так как не все целые числа четные (1, 3, 5, …).

3. Найдется простое натуральное число

Введем предикат *P(x)* – «x - простое число», получим запись $(\exists\, x \in \mathbb{N})P(x)$. Читается «существует натуральное число x, которое делится только на себя и на единицу». Истинно, так как среди натуральных чисел найдутся простые (2, 3, 5, 7, 11, 13, …).

4. Любое натуральное число является простым

$(\forall\, x \in \mathbb{N})P(x)$. Читается «любое натуральное число - простое». Ложно, так как среди натуральных чисел есть такие, которые простыми не являются (4, 6, 9, …)

5. Множество всех простых чисел является подмножеством натуральных чисел.

Пусть существует множество *M* простых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_n$, и множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_n$. Все элементы *M* также принадлежат множеству $\mathbb{N}$. Введем предикат *P(x)* – «x - натуральное». Получим равносильные записи:

$(\forall\, m \in \mathbb{N})P(x)$ и $M \subseteq \mathbb{N} \Leftrightarrow \mathbb{N} \supseteq M$. Читается «каждое натуральное число m является натуральным. Множество *M* является подмножеством множества $\mathbb{N}$,

Самостоятельно

подготовить рефераты на темы:

- «Этапы развития математики»,
- «Роль математики в интеллектуальном развитии человека»,
- «Роль математики в техническом развитии».