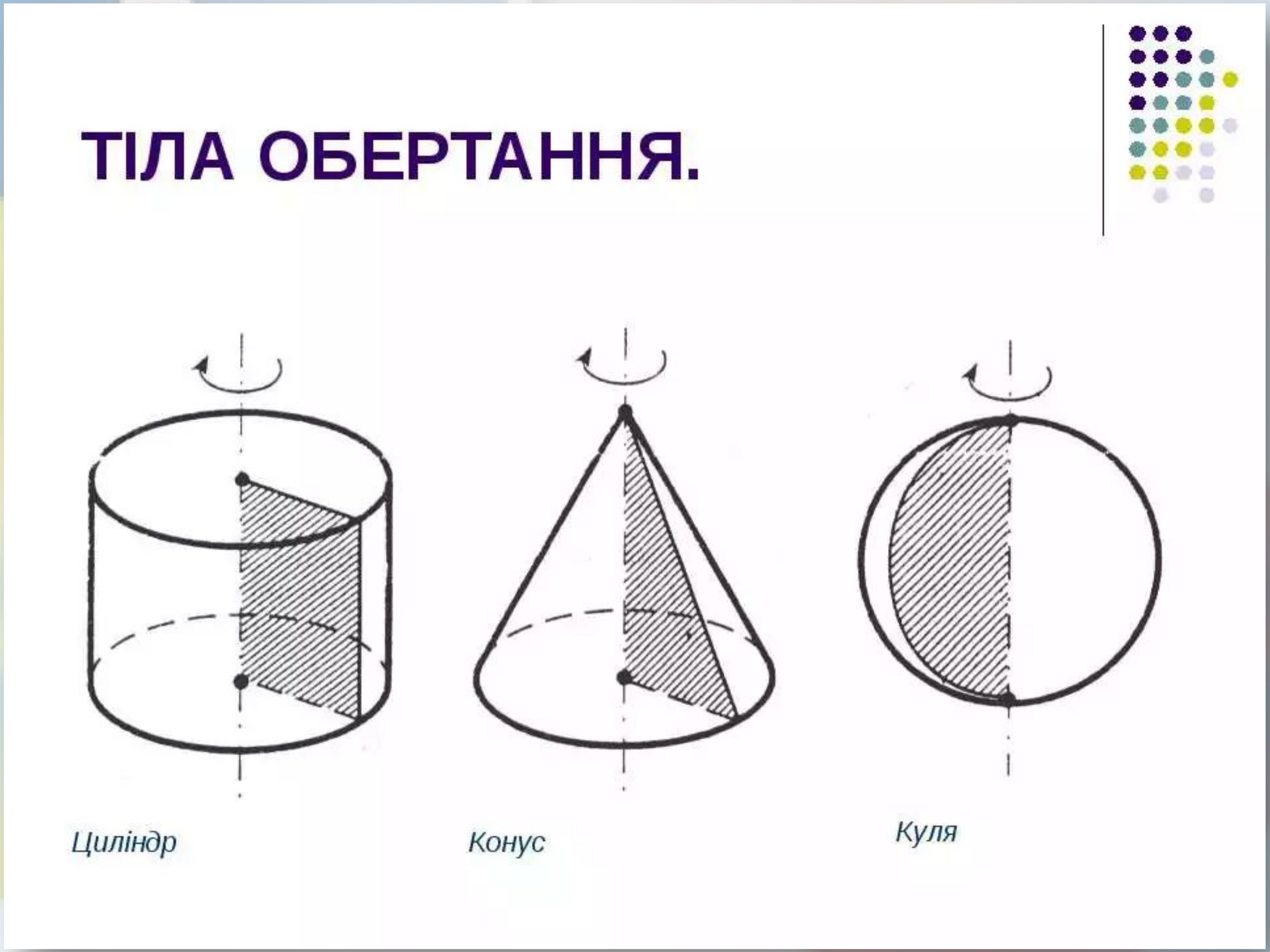
Тіла обертання

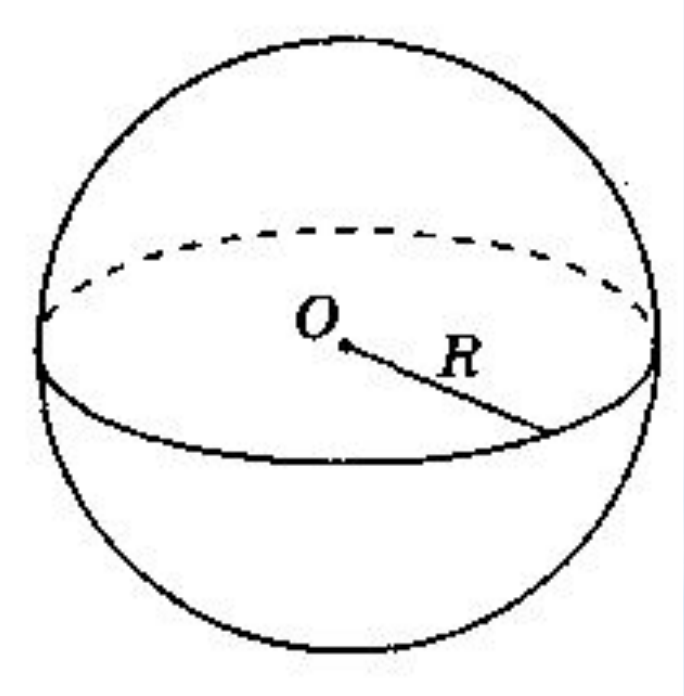
Дмитренко Олеся 2-ВС

Тіла обертання — об'ємні тіла, що виникають при обертанні плоскої фігури, обмеженої кривою, навколо осі, що лежить в тій же площині.



Приклади тіл обертання

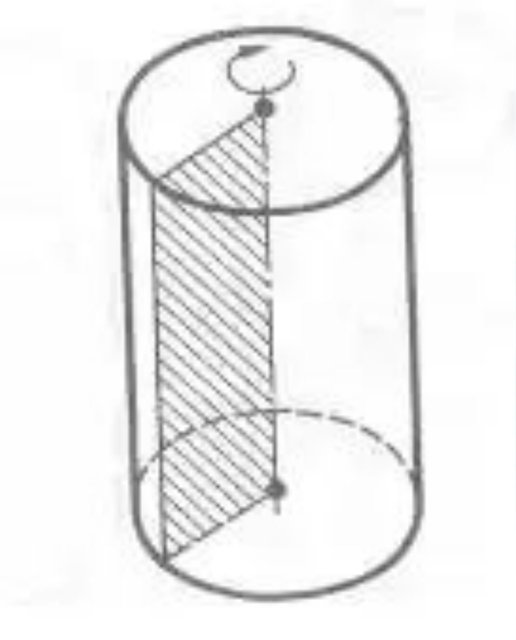
Куля — тривимірна фігура, утворена півколом, що обертається навколо діаметра розрізу.

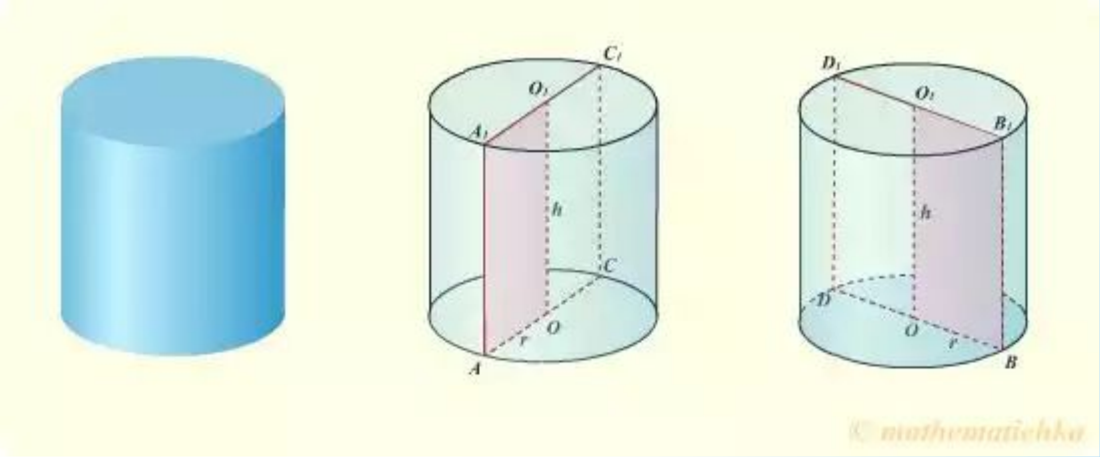


Циліндр — тривимірна фігура, утворена прямокутником, що обертається навколо однієї із сторін

За площу бічної поверхні циліндра приймається площа її розгортки:

Sбіч = 2πrh





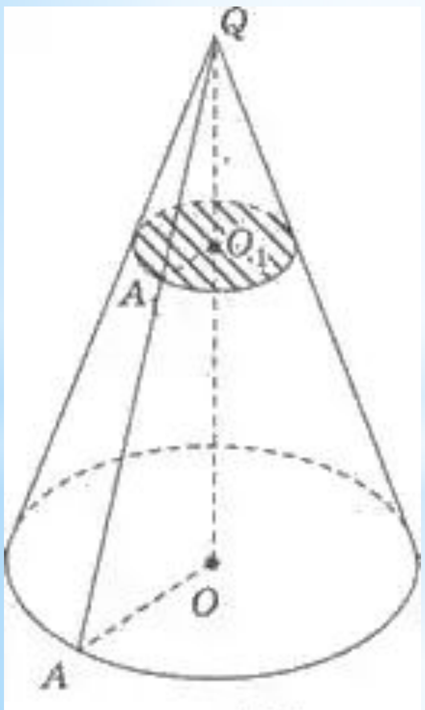
Конус — тривимірна фігура, утворена прямокутним трикутником, що обертається навколо одного з катетів.

За площу бічної поверхні конуса приймається площа її розгортки:

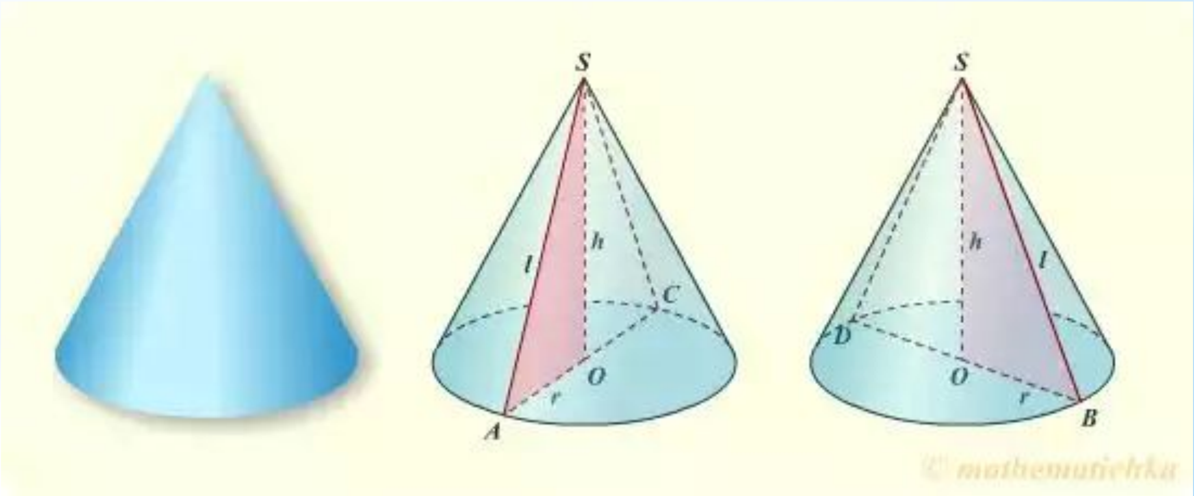
$$S_{біч} = \pi r l$$

Площа повної поверхні конуса:

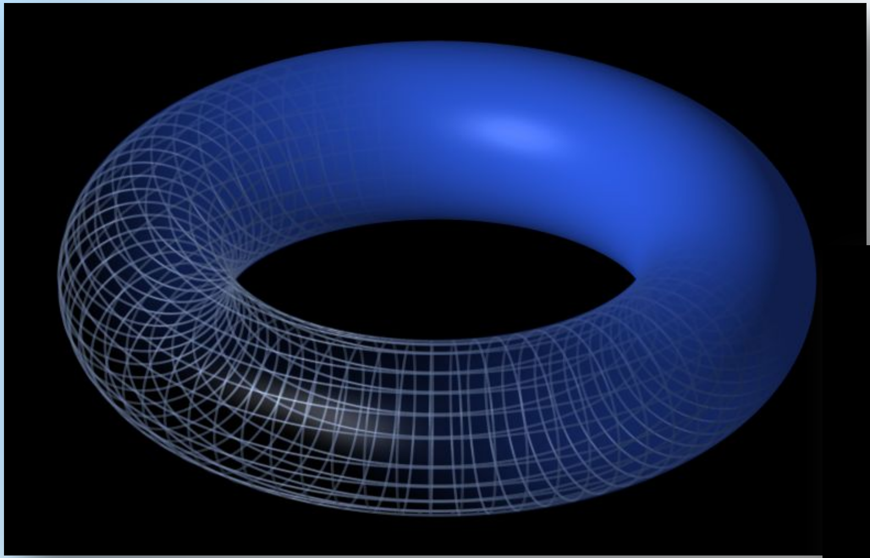
$$S_{біч} = \pi r(l + r)$$

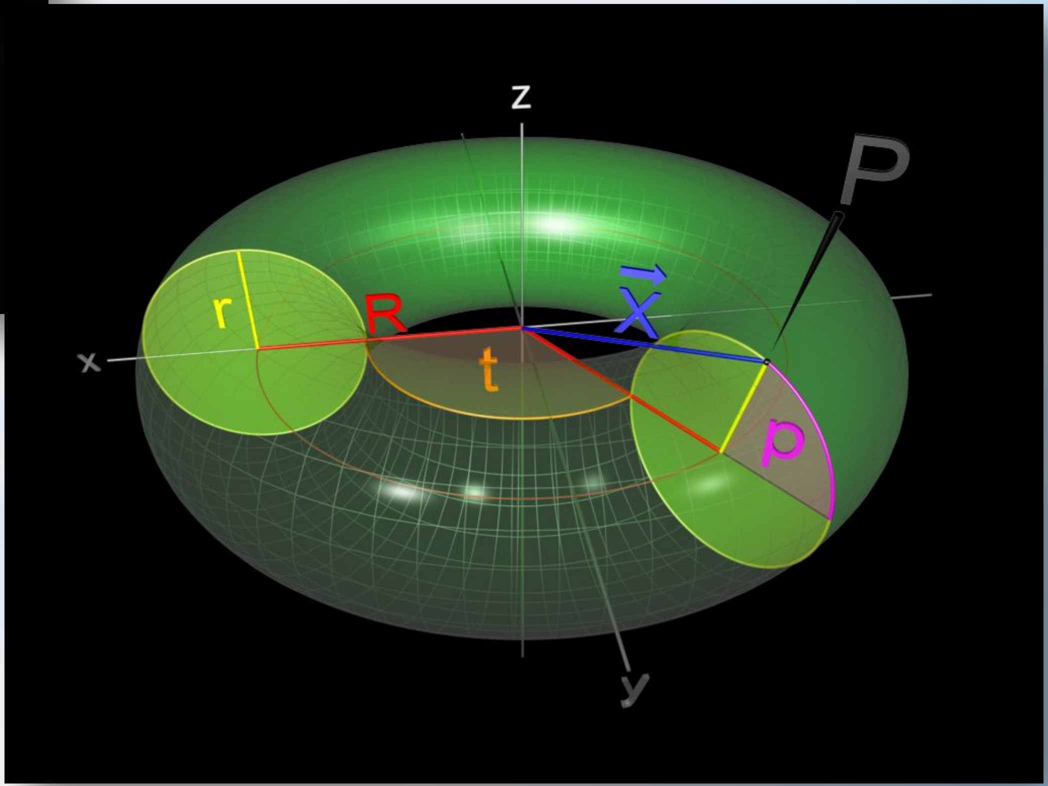


мал. 495



Тор — тривимірна фігура, утворена колом, що обертається навколо прямої, яка не перетинає його.

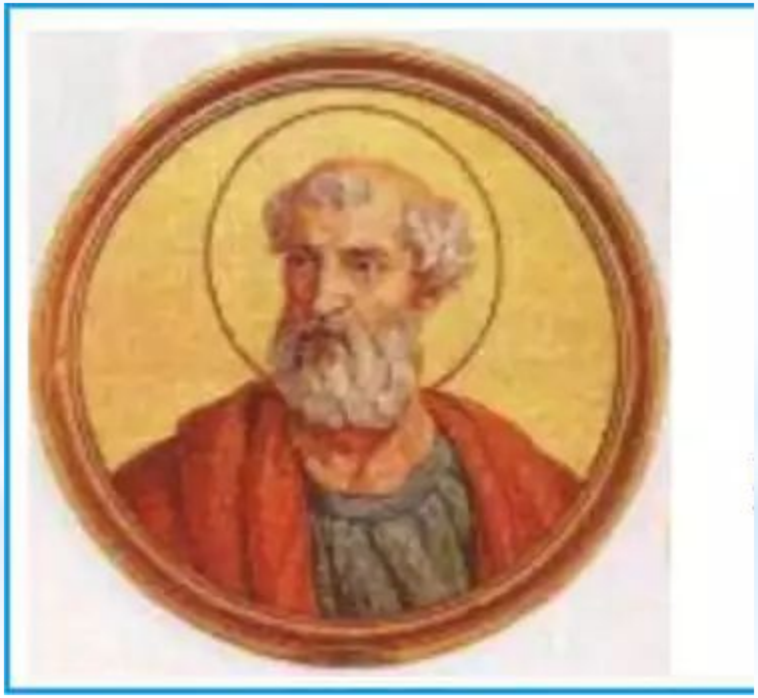




При обертанні контурів фігур виникає поверхня обертання (наприклад, сфера, утворена колом), в той час як при обертанні заповнених контурів виникають тіла (як куля, утворена кругом).

Об'єм і площа поверхні тіл обертання

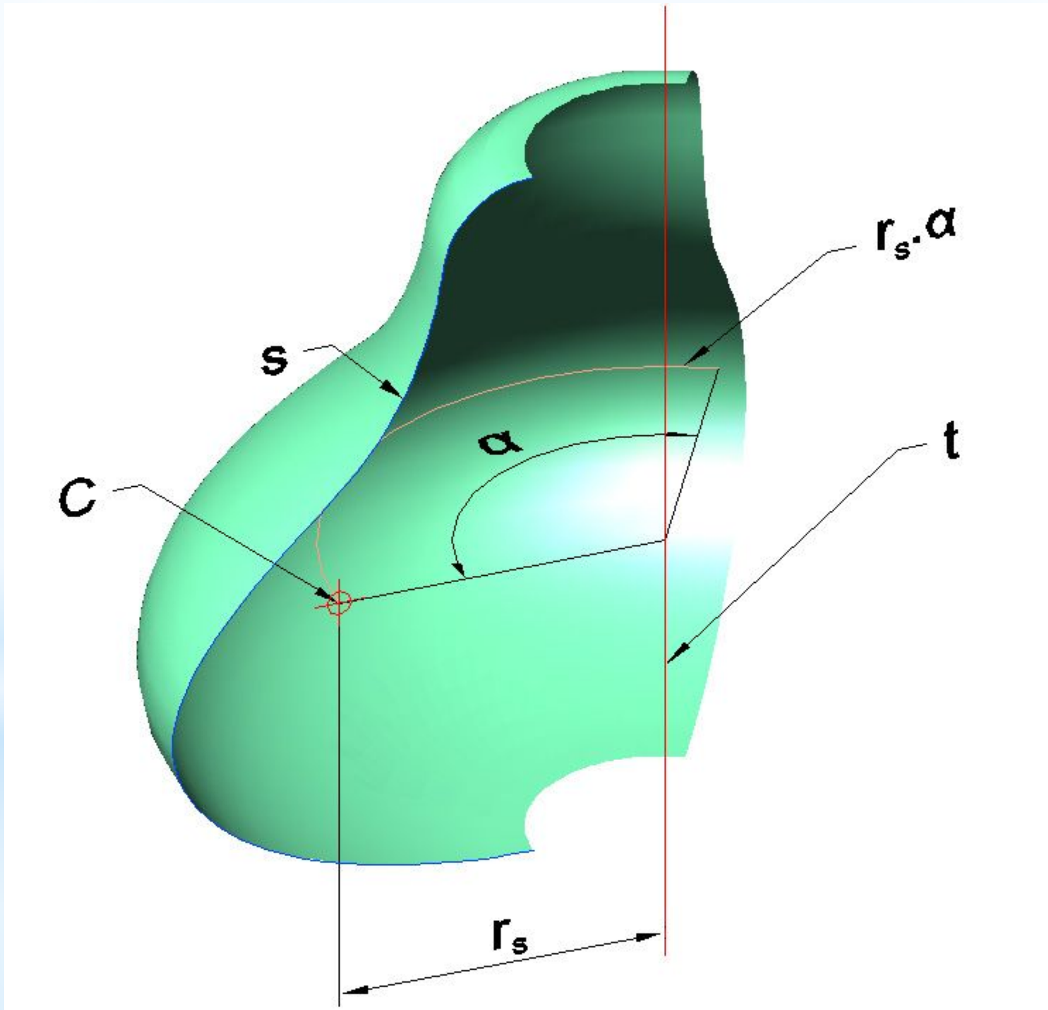
Об'єм і площа поверхні тіл обертання можна дізнатися за допомогою теорем Гульдіна-Паппа



Перша теорема Гульдіна-Паппа стверджує:

Площа поверхні, утвореної при обертанні лінії, що лежить в площині цілком по одну сторону від осі обертання, дорівнює добутку довжини лінії s на довжину кола $l = 2\pi r s$, яке пробігає центр мас (т.С) цієї лінії.

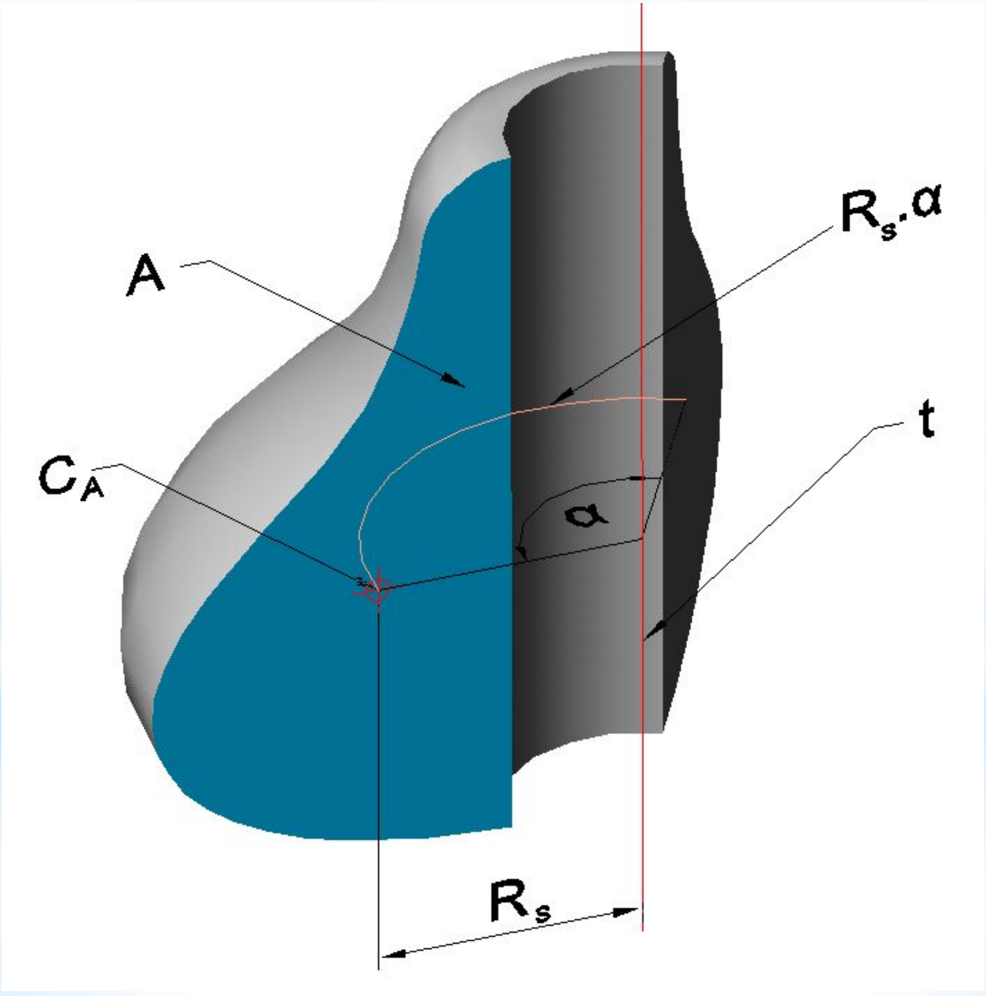
Наприклад, для тора радіусом R і з радіусом кола r, довжина лінії $s = 2\pi r$, довжина кола для центру мас $l = 2\pi R$, звідки площа поверхні тора $s \cdot l = 4\pi^2 rR$.



Друга теорема Гульдіна-Паппа стверджує:

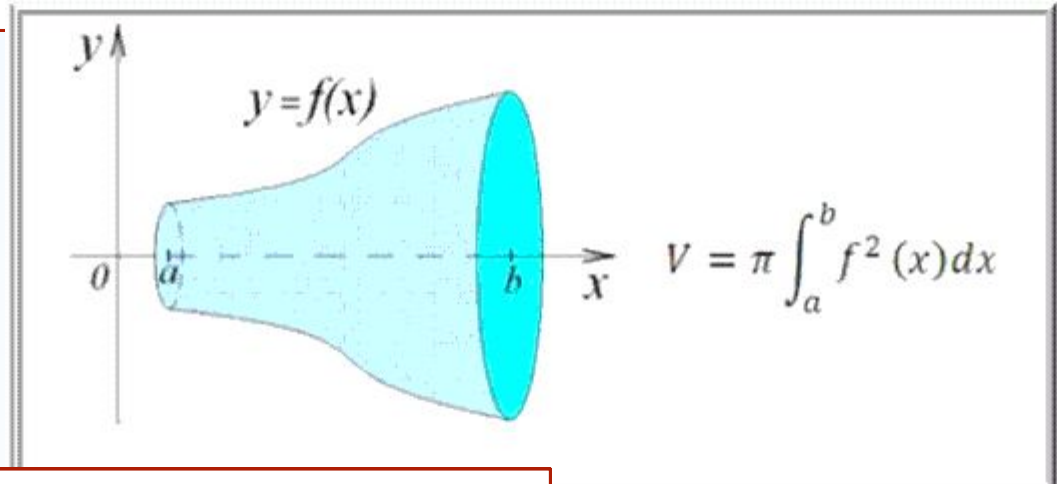
Об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, що лежить в площині цілком по одну сторону від осі обертання, дорівнює добутку площі A фігури на довжину кола $l = 2\pi R_s$, яке пробігає центр мас (т.CA) цієї фігури.

Наприклад, для тора радіусом R і з радіусом кола r, площа кола $A = \pi r^2$, довжина кола обертання центру мас $l = 2\pi R$, звідси об'єм тора $A \cdot l = 2\pi^2 r^2 R$



Обчислення об'єму тіла обертання навколо осі Ох

Нехай графік функції у = f (х) обертається навколо осі Ох, утворюючи так звану поверхню обертання. Визначимо об'єм тіла, обмеженого цією поверхнею і площинами х = а, х = b.



Об'єм тіла обертання, утвореного обертанням графіка у = f (х) навколо осі Ох, може бути обчислений за формулою:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

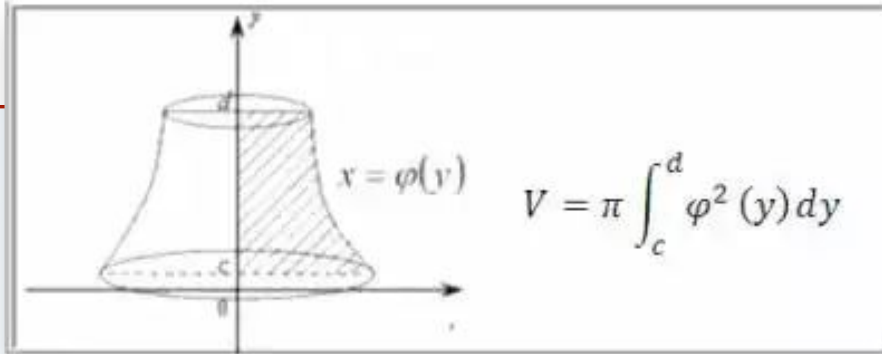
1. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням дуги кривої у = х2, х∈ [1,3] навколо осі Ох.

Рішення. Дані а = 1, b = 3, f (х) = х2, підставляємо в формулу, отримуємо:

$$V = \pi \int_1^3 (x^2)^2 dx = \pi \int_1^3 x^4 dx = \pi \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3 \approx 152 \text{ ед.куб.}$$

Обчислення об'єму тіла обертання навколо осі Оу

Нехай графік функції x = φ (y) обертається навколо осі Оу, утворюючи так звану поверхню обертання. Визначимо об'єм тіла, обмеженого цією поверхнею і площинами y = c, y = d.



Об'єм тіла обертання, утвореного обертанням графіка x = φ (y) навколо осі Оу, може бути обчислений за формулою:

$$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y)\,dy$$

Приклад 2. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням дуги кривої x = 3y-y2, x∈ [1,2] навколо осі Ох.

Рішення. Дані c = 1, d = 2, φ (y) = 3y-y2, підставляємо в формулу, отримуємо:

$$V = \pi \int_1^2 (3y - y^2)^2 dx = \pi \int_1^2 (9y^2 - 6y^3 + y^4) dy =$$

$$= \pi \left[3y^3 - \frac{3y^4}{2} + \frac{y^5}{5} \right]_1^2 \approx 14{,}8 \text{ ед. куб.}$$

У калькулятор вставляємо функцію x = 3y-y2, x міняємо на y, кордони від 1 до 2, перевіряємо правильність обчислення об'єму, а також отримуємо малюнок тіла обертання.