Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Оренбургский государственный университет»
Кафедра прикладной математики

И.Г. Руцкова

Множества и функции

Электронный курс лекций «Математический анализ», часть 1

Оренбург 2017

Множества: основные понятия, определения и обозначения

Понятие множества, как и числа, является первичным в математике и через другие понятия не определяется. Оно используется элементов, обладающих одинаковыми свойствами.

Множества принято ***обозначать*** заглавными буквами латинского алфавита: *A, B, C, …. X, Y. Элементы множеств* – малыми буквами: *a, b, c, …, x,y.*

Если *a является элементом множества A*, то это ***обозначается:***

$$\boxed{a \in A}$$

Символ «$\in$» читается «принадлежит» (от греческого слова $\varepsilon\sigma\tau\iota$ - быть).

Если *a не является элементом множества A*, то это ***обозначается***:

$$\boxed{a \notin A} \quad \text{или} \quad \boxed{a \ \overline{\in} \ A}$$

Символы «$\notin$» и «$\overline{\in}$» читаются « не принадлежит».

В зависимости от количества элементов множества подразделяются на *конечные* и *бесконечные*.

Равные множества. Способы задания множеств

Определение 1. Множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов.

Обозначение: $A = B$.

Задать множество можно: либо перечислив его элементы, либо указав способ перечисления, либо, указав характерное свойство его элементов.

- Запись вида $A = \{a, b, c\}$ означает, что множество состоит из элементов a, b, c.
- Если множество A состоит из элементов a_α, где α пробегает некоторое множество символов V, то это записывается так: $A = \{a_\alpha\}_{\alpha \in V}$.
- Если множество состоит из элементов, обладающих определенными свойствами, то используют запись вида: $A = \{a \mid \ldots\}$ или $A = \{a : \ldots\}$, где в фигурных скобках, после вертикальной черты или двоеточия, записывается свойство элементов.

Определение 2. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым*.

Обозначение: $\varnothing$.

Подмножества

Определение 3. Множество A называется *подмножеством* множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B.
Обозначение: $A \subset B$ или $B \supset A$.

Символ «$\subset$» означает «включается». Соответственно, символ «$\not\subset$» означает «не включается».

Определение 3, используя классические символы, применяющиеся для сокращения записи математических рассуждений:

- *«$\Rightarrow$» - следует;*
- *«$\Leftrightarrow$» - тогда и только тогда (равносильно);*
- *«$\forall$» - любой (всякий, каждый),*

можно записать компактнее в символическом виде (смотрите определение 4).

Определение 4 (символический вариант определения 3).
$$A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad \forall a \in A \quad \Rightarrow \quad a \in B.$$

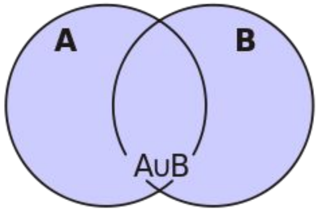
Замечание. Очевидно, что для любого множества A: $A \subset A$. Кроме того, по определению, полагают, что пустое множество является подмножеством любого множества, т.е. $\varnothing \subset A, \quad \forall A$.

Определение 5. Множества $\varnothing$ и A называются *несобственными* подмножествами множества A, остальные подмножества называются *собственными.*

Операции над множествами

Определение 6. Множество C называется *объединением* множеств A и B, если оно состоит из всех элементов принадлежащих множеству A или B.
Обозначение: $C = A \cup B$.

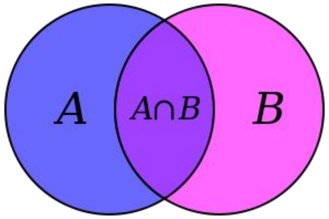
Символ «$\cup$» означает объединение.



Определение 7 (символическая запись определения 6).
$C = A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad C = \{c \mid c \in A \quad или \quad c \in B\}$.

Определение 8. Множество C называется *пересечением* множеств A и B, если оно состоит из всех элементов одновременно принадлежащих множеству A и B.
Обозначение: $C = A \cap B$.

Символ «$\cap$» означает пересечение.



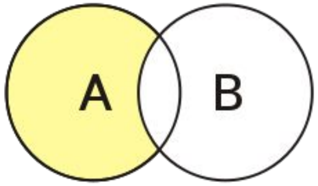
Определение 9 (символическая запись определения 8).
$C = A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad C = \{c \mid c \in A \quad и \quad c \in B\}$.

Определение 10. Множества A и B, имеющие общие элементы ($A \cap B \neq \varnothing$), называются *пересекающимися*, множества A и B, не имеющие общих элементов ($A \cap B = \varnothing$), называются *непересекающимися*.

Операции над множествами

Определение 11. Множество C называется *разностью* множеств A и B, если оно состоит из всех элементов множества A, не принадлежащих множеству B.
Обозначение: $C = A \setminus B$.

Символ «\» означает разность.



A\B

Определение 12 (символическая запись определения 11).
$C = A \setminus B \quad \Leftrightarrow \quad C = \{c \mid c \in A \quad и \quad c \notin B\}$.

Определение 13. Если $A \subset B$, то множество $B \setminus A$ называется *дополнением* множества A до множества B.

Пример 1. Для множеств $A = \{1, 2, 3, 4, 7\}$ и $B = \{3, 5, 9\}$ определите:
$A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$.

Решение.

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}; \qquad A \cap B = \{3\};$$

$$A \setminus B = \{1, 2, 4, 7\}; \qquad B \setminus A = \{5, 9\}.$$

Числовые множества

Определение 14. Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми* множествами.

$N = \{1, 2, \ldots\}$ - множество *натуральных* чисел;

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ - множество *целых* чисел;

$Q = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m \in Z, n \in N \right\}$ - множество *рациональных* чисел, $\frac{m}{n}$ - несократимая.

Множество действительных чисел R, чаще всего, вводится:

- либо как *множество бесконечных десятичных дробей*, причем если число рациональное, то оно представляется в виде периодической дроби, в противном случае число – иррациональное;
- либо как *некоторая совокупность*, где определены взаимосвязанные операции сложения, умножения, сравнения чисел по величине и которые обладают определенного рода непрерывностью.

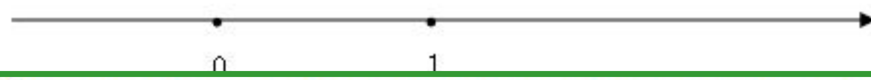
$J = R \setminus Q$ - множество иррациональных чисел.

$C = \{z \mid z = x + iy;\ x, y \in R,\ i^2 = -1\}$ - множество комплексных чисел.

$$\boxed{N \subset Z \subset Q \subset R \subset C}$$

Геометрическая интерпретация действительных чисел

Геометрически множество действительных чисел изображается направленной (ориентированной) прямой, а отдельные числа - точками этой прямой. совокупность действительных чисел часто называют *числовой прямой*, или *числовой осью*.



Часто множество действительных чисел дополняются двумя элементами, называемыми «минус бесконечность» и «плюс бесконечность», которые обозначают соответственно: «$-\infty$» и «$+\infty$».

По определению, полагают, что $\forall x \in R \Rightarrow -\infty < x < +\infty;$

используют обозначение:

$(-\infty;+\infty) = \{x \in R \mid -\infty < x < +\infty\}$ - числовая ось – множество R.

Определение 15. Множество R, дополненное элементами «$-\infty$» и «$+\infty$», называется *расширенным множеством действительных чисел (расширенной числовой прямой).*

Обозначение: $\overline{R}$.

Элементы «$-\infty$» и «$+\infty$» иногда называют *бесконечно удаленными точками расширенной числовой прямой.*

Основные виды промежутков на множестве действительных чисел

$(a;b)=\{x\in R\mid a<x<b,\quad a,b\in R;\quad a<b\}$ - интервал $(a;b)$;

$[a;b]=\{x\in R\mid a\le x\le b;\quad a,b\in R;\quad a<b\}$ - отрезок $[a;b]$;

$[a;b)=\{x\in R\mid a\le x<b;\quad a,b\in R;\quad a<b\}$ - полуинтервал $[a;b)$;

$(a;b]=\{x\in R\mid a<x\le b;\quad a,b\in R;\quad a<b\}$ - полуинтервал $(a;b]$;

$(-\infty;b]=\{x\in R\mid -\infty<x\le b;\quad b\in R\}$ - луч $(-\infty;b]$;

$[a;+\infty)=\{x\in R\mid a\le x<+\infty;\quad a\in R\}$ - луч $[a;+\infty)$;

$(-\infty;b)=\{x\in R\mid -\infty<x<b,\quad b\in R\}$ - открытый луч $(-\infty;b)$;

$(a;+\infty)=\{x\in R\mid a<x<+\infty,\quad a\in R\}$ - открытый луч $(a;+\infty)$.

Абсолютная величина действительного числа и её свойства

Определение 16. *Абсолютной величиной* (или *модулем*) действительного числа x называется число, обозначаемое $|x|$ и определяемое по правилу:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Например, $|5| = 5$, $|-3| = 3$.

Нетрудно заметить, что с геометрической точки зрения абсолютная величина (модуль) действительного числа – характеризует расстояние от числа x до числа 0.

Пример 1. Решите уравнения: а) $|x| = 2$; б) $|x-4| = 5$; в) $\big||x-2|-3\big| = 6$.

Решение.

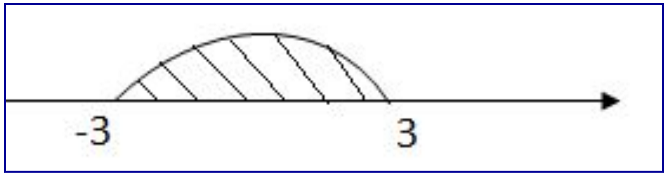
а) $|x| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -2. \end{array}\right.$ б) $|x-4| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4 = 5, \\ x-4 = -5; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9, \\ x = -1. \end{array}\right.$

с) $\big||x-2|-3\big| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x-2|-3 = 6, \\ |x-2|-3 = -6; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x-2| = 9, \\ |x-2| = -3; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x-2 = -9, \\ x-2 = 9, \end{array}\right. \\ x \in \varnothing; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -7, \\ x = 11. \end{array}\right.$

Абсолютная величина действительного числа и её свойства

Пример 2. Решите неравенства: а) $|x| < 3$; б) $|x-1| < 4$.

Решение.



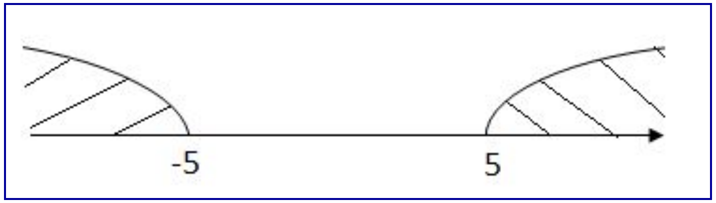
а) $|x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-3;3)$.

б) $|x-1| < 4 \Leftrightarrow -4 < x-1 < 4 \Leftrightarrow -4+1 < x < 4+1 \Leftrightarrow -3 < x < 5 \Leftrightarrow x \in (-3;5)$.

Пример 3. Решите неравенства: $|x| > 5$; б) $|x-1| \geq 7$.

Решение.

а) $|x| > 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 5, \\ x < -5; \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty;-5) \cup (5;+\infty)$.



б) $|x-1| \geq 7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 \geq 7, \\ x-1 \leq -7; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 8, \\ x \leq -6. \end{array}\right.$

Абсолютная величина действительного числа и её свойства

Теорема 1

1) $|x| \geq 0, \quad \forall x \in R;$

2) $|x| = |-x|, \quad \forall x \in R;$

3) $-|x| \leq x \leq |x|, \quad \forall x \in R;$

4) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \quad \forall x, y \in R;$

5) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}, \quad \forall x, y \in R,\ y \neq 0;$

6) $|x + y| \leq |x| + |y|, \quad \forall x, y \in R;$

7) $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|, \quad \forall x, y \in R.$

Следствие 1

1) $|x - y| \geq |x| - |y|, \quad \forall x, y \in R;$

2) $|x - y| \geq |y| - |x|, \quad \forall x, y \in R.$

$$R_+ = \{x \in R \mid x > 0\}, \qquad R_- = \{x \in R \mid x < 0\}$$

Функции: основные понятия

Пусть X и Y – некоторые множества.

Определение 17. *Функцией*, определенной на множестве X со значениями в Y, называется правило или соответствие f (отображение f), которое $\forall x \in X$ относит (ставит в соответствие) некоторый ***единственный*** элемент $y \in Y$.

Обозначения: $f : X \to Y$ или $y = f(x),\ x \in X$.

Определение 18. Множество X в этом случае называется *множеством задания функции* f или *множеством определения* функции f.

Определение 19. Множество $\{y \in Y \mid y = f(x),\ x \in X\}$ в этом случае называется *множеством значений* функции f.

Обозначение: $E(f) = \{y \in Y \mid y = f(x),\ x \in X\}$. $\boxed{E(f) \subset Y.}$

Например,

$$f(x) = x^2,\ x \in R:\ X = R = (-\infty;+\infty);\ E(f) = [0;+\infty);$$

$$f(x) = x^3,\ x \in R:\ X = R = (-\infty;+\infty);\ E(f) = (-\infty;+\infty) = R;$$

$$f(x) = \sin x, x \in R:\ X = R = (-\infty;+\infty);\ E(f) = [-1;1].$$

Функции: основные понятия

Способы задания: табличный, графический, описательный, аналитический, программный.

При аналитическом задании функции задаются с помощью формул, в которых используются ранее изученный и специально обозначенный набор функций, алгебраических действий и предельный переход.

Определение 20. Если $X \subset R$, $Y \subset R$, то функция $f : X \to Y$, называется *действительной функцией одного действительного переменного.*

Определение 21. Если $X \subset R^n$, $Y \subset R$, то функция $f : X \to Y$, называется *действительной функцией n действительных переменных.*

Определение 22. Если $X \subset C$, $Y \subset R$, то функция $f : X \to Y$, называется *действительной функцией одного комплексного переменного.*

Определение 23. Если $X \subset C$, $Y \subset C$, то функция $f : X \to Y$, называется *комплексной функцией одного комплексного переменного.*

Функции: основные понятия

Пусть задана некоторая функция $f : X \to Y$, $X \subset R$, $Y \subset R$.

Если на плоскости задана прямоугольная система координат OXY, то иллюстрацией отображения f будет множество точек $(x; y)$, где $y = f(x)$, $x \in X$.

Определение 24. Множество точек координатной плоскости ОХУ $\{(x, y) | y = f(x), x \in X\}$ называется *графиком* функции f.

Обозначение: $\Gamma_f = \{(x, y) | y = f(x), x \in X\}$.

Для действительных функций, при аналитическом задании, т.е. в виде формулы с использованием известных функций и алгебраических операций, дополнительно вводится понятие *области определения функции* (она соответственно совпадает с множеством задания функции).

Определение 25. Областью определения действительной функции f, заданной аналитически, называется множество тех действительных чисел, для которых:

1) указанная формула имеет смысл;
2) в процессе проведения всех необходимых вычислений получаются только действительные числа.

Обозначение: $D(f)$.