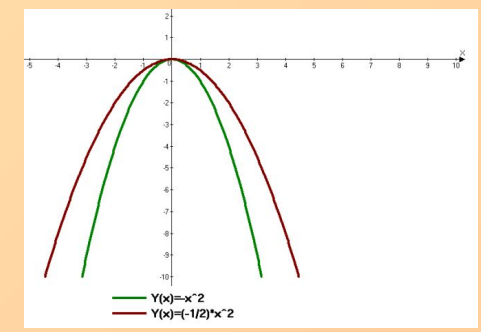
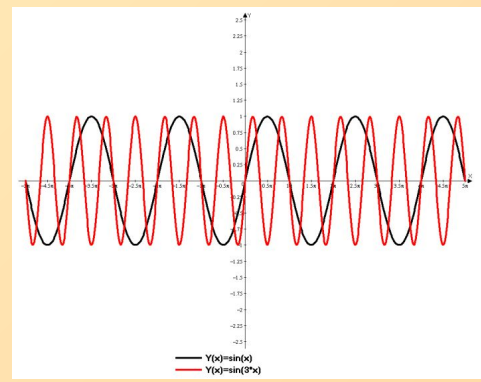
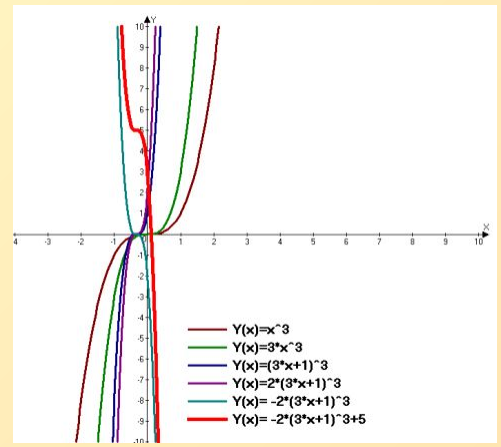


Электронное пособие.

Построение графиков функций с помощью сдвигов и деформаций.



Содержание:

1. Вступление.
2. График функции $y = f(x + a)$.
3. График функции $y = f(x) + b$.
4. График функции $y = mf(x)$.
5. График функции $y = f(kx)$.
6. Композиция сдвигов и деформаций (график сложной функции).
7. Применение метода сдвигов и деформаций при построении графиков тригонометрических функций.
8. Построение графиков функций, содержащих знак модуля:
 - а) график функции $y = f(|x|)$;
 - б) график функции $y = |f(x)|$;
 - в) график функции $y = |f(|x|)|$;
9. Упражнения.
10. Задача – исследование.
11. Тест.
12. Основные результаты.



Дорогие ребята!

Изучая курс алгебры в основной школе, Вы научились, исходя из графика $y = f(x)$, строить графики следующих функций:

$$1) y = f(x + a)$$

$$2) y = f(x) + b$$

$$3) y = f(x + a) + b$$

$$4) y = mf(x)$$

$$5) y = f(kx)$$

Венцом всех этих преобразований является график функции:

$$y = mf(kx + a) + b$$

Кроме этого, Вы научитесь строить графики функций, содержащих знак модуля, которые обычно вызывают затруднения. Это функции трех видов:

$$y = f(|x|)$$

$$y = |f(x)|$$

$$y = |f(|x|)|$$

В дальнейшем Вы рассмотрите поэтапное построение графиков всех этих функций и примените полученные знания при выполнении упражнений.



Построить график функции $y=f(x+a)$, зная график функции $y=f(x)$.

График функции $y=f(x+a)$ получается из графика функции $y=f(x)$ с помощью преобразования параллельного переноса: на $|a|$ единиц масштаба влево или вправо по оси X . Причем, если $a < 0$, то сдвиг производится вправо, если $a > 0$, то сдвиг производится влево. Каждой точке графика $y=f(x)$ с координатами $(x; y)$, ставится в соответствие точка с координатами $(x+|a|; y)$.

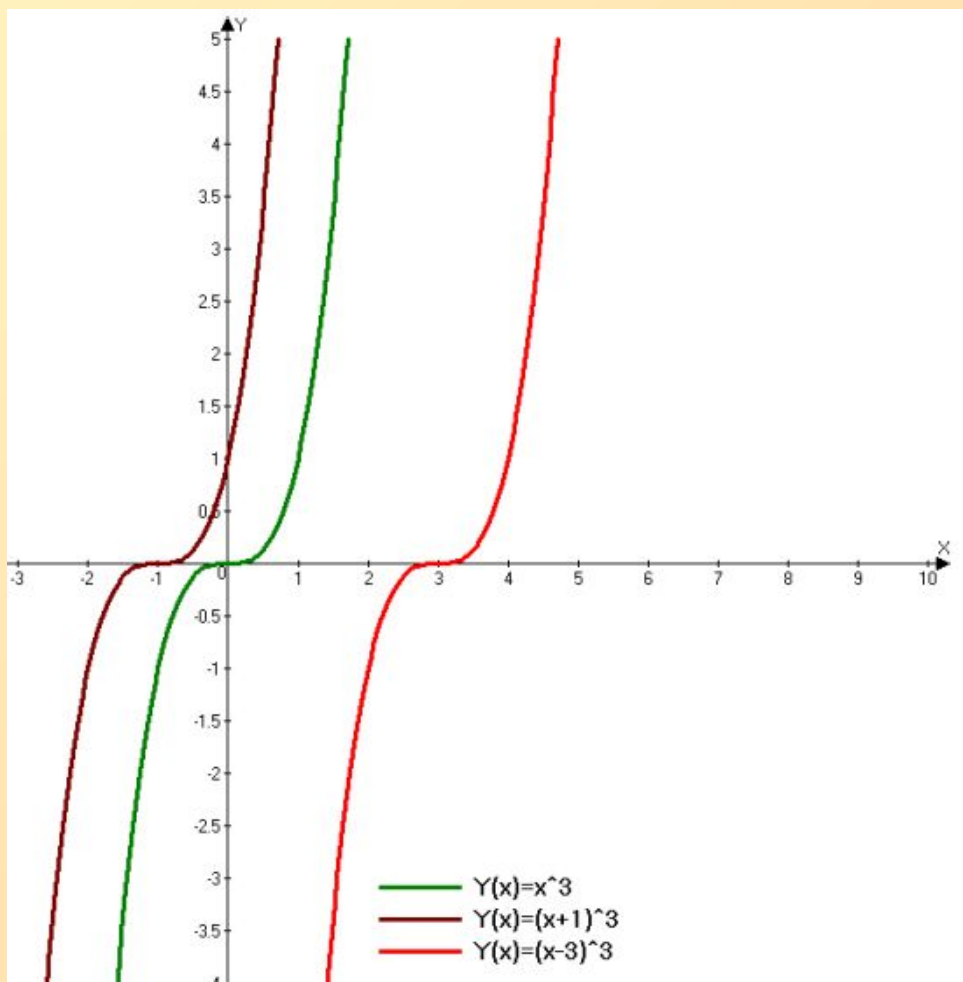


Рис.1



Построить график функции $y=f(x)+b$, зная график функции $y=f(x)$.

График функции $y=f(x)+b$ получается из графика функции $y=f(x)$ с помощью преобразования параллельного переноса: на $|b|$ единиц масштаба вверх или вниз по оси Y , причем если $b>0$, то сдвиг производится вверх, если $b<0$, то сдвиг производится вниз. Каждой точке графика функции $y=f(x)$ с координатами $(x;y)$ соответствует точка с координатами $(x; y+|b|)$.

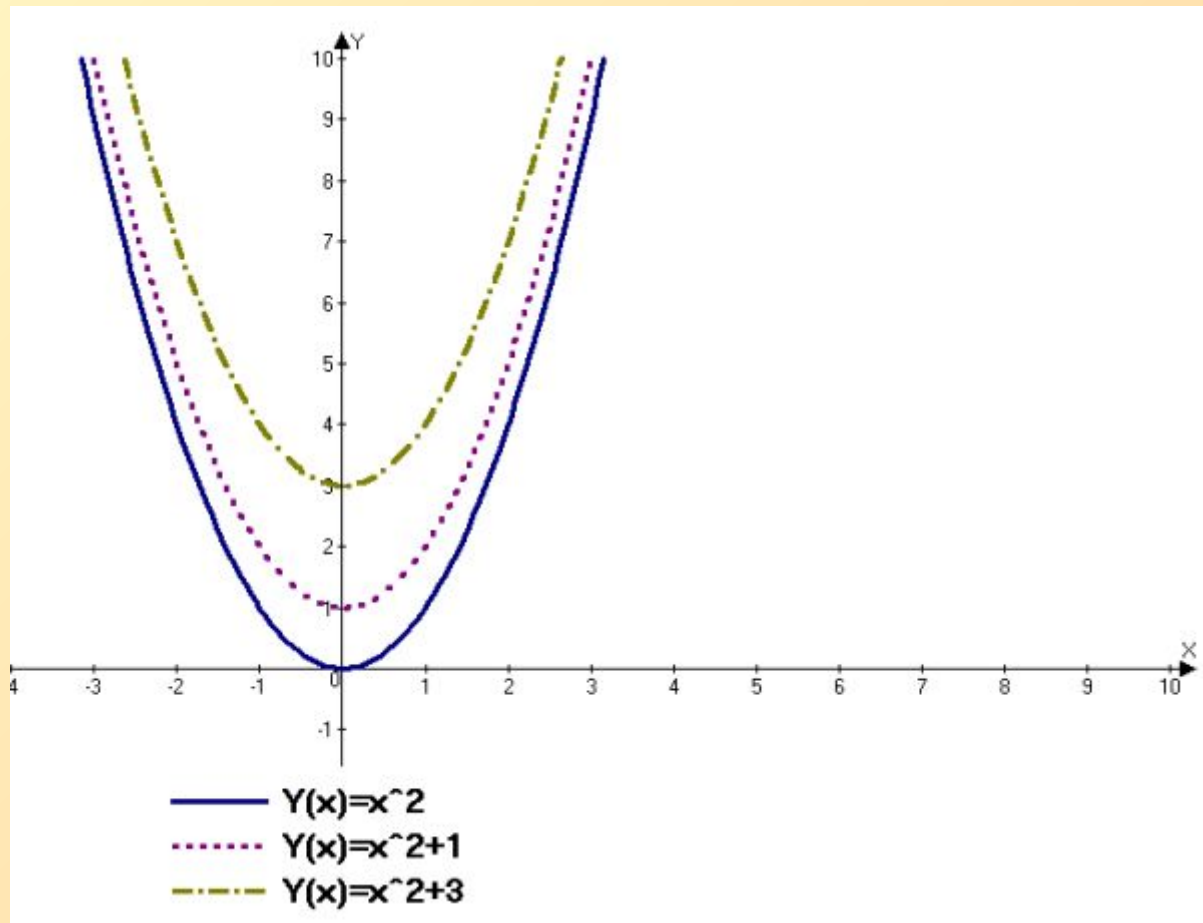


Рис.2



Построить график функции $y=mf(x)$, зная график функции $y=f(x)$, где m – любое действительное число, кроме 0.

График функции $y=mf(x)$ получается из графика функции $y=f(x)$ с помощью преобразования **растяжения** по оси X с **коэффициентом m** .

Отметим, что при этом преобразовании на месте остаются точки пересечения графика функции $y=f(x)$ с осью X , а ординаты точек графика $y=f(x)$ увеличиваются или уменьшаются в m раз. Причем, если $0 < m < 1$, то происходит **сжатие** к оси X с **коэффициентом $\frac{1}{m}$** (рис.3).

Если m – отрицательное число, то речь пойдет о построении графика функции $y = -f(x)$. График функции $y = -f(x)$ получен из графика функции $y=f(x)$ с помощью преобразования осевой симметрии (ось симметрии – ось X) (рис.4).

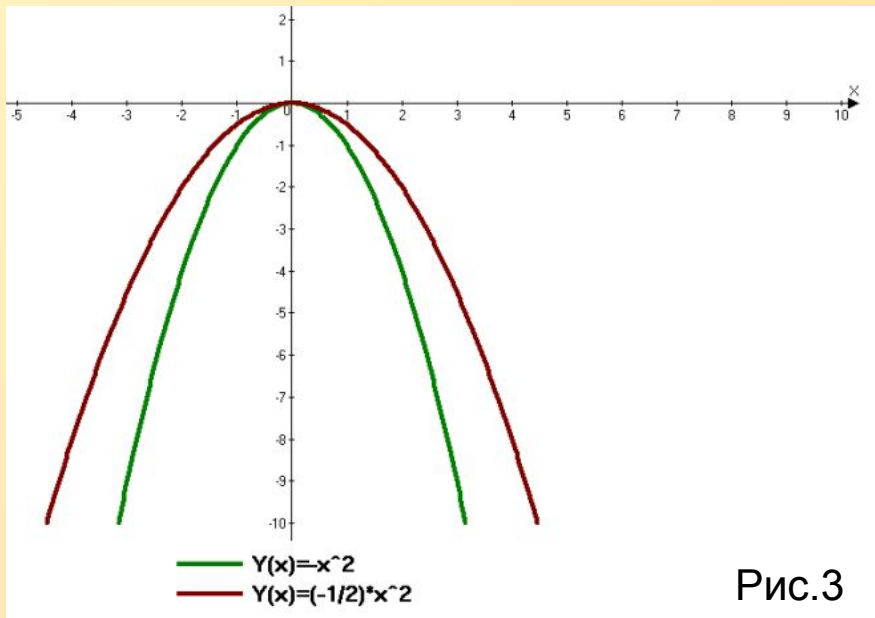


Рис.3

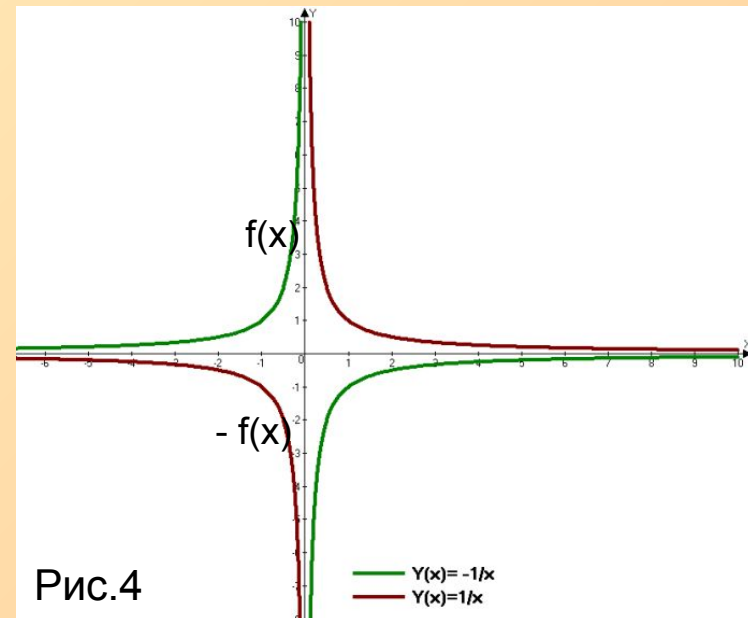


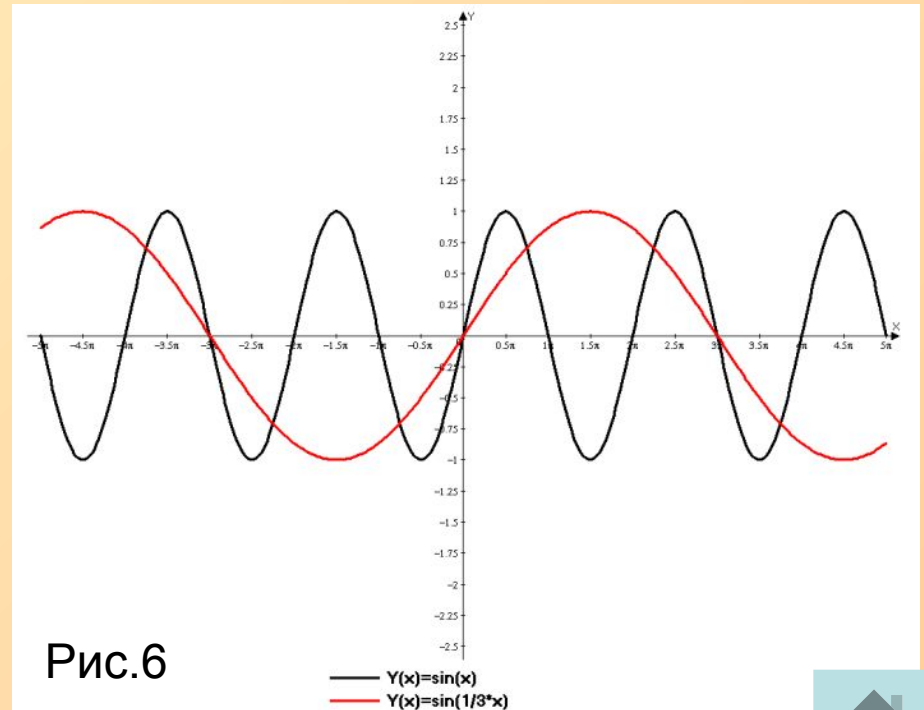
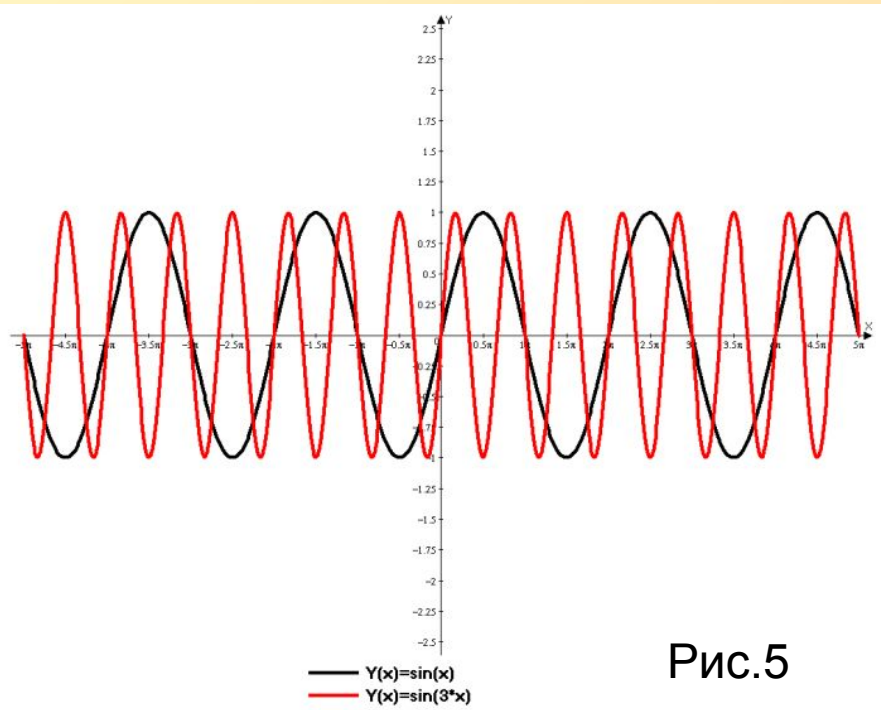
Рис.4



Построить график функции $y=f(kx)$, зная график функции $y=f(x)$.

График функции $y=f(kx)$ получается из графика функции $y=f(x)$ с помощью **сжатия** к оси Y с **коэффициентом k** (рис.5). Отметим, что при этом преобразовании на месте остается точка пересечения графика функции $y=f(x)$ с осью Y .

Причем, если $0 < k < 1$, то предпочитают говорить о **растяжении** от оси Y с коэффициентом $\frac{1}{k}$ (рис.6)



Построить график функции $y = -mf(kx+a)+b$.

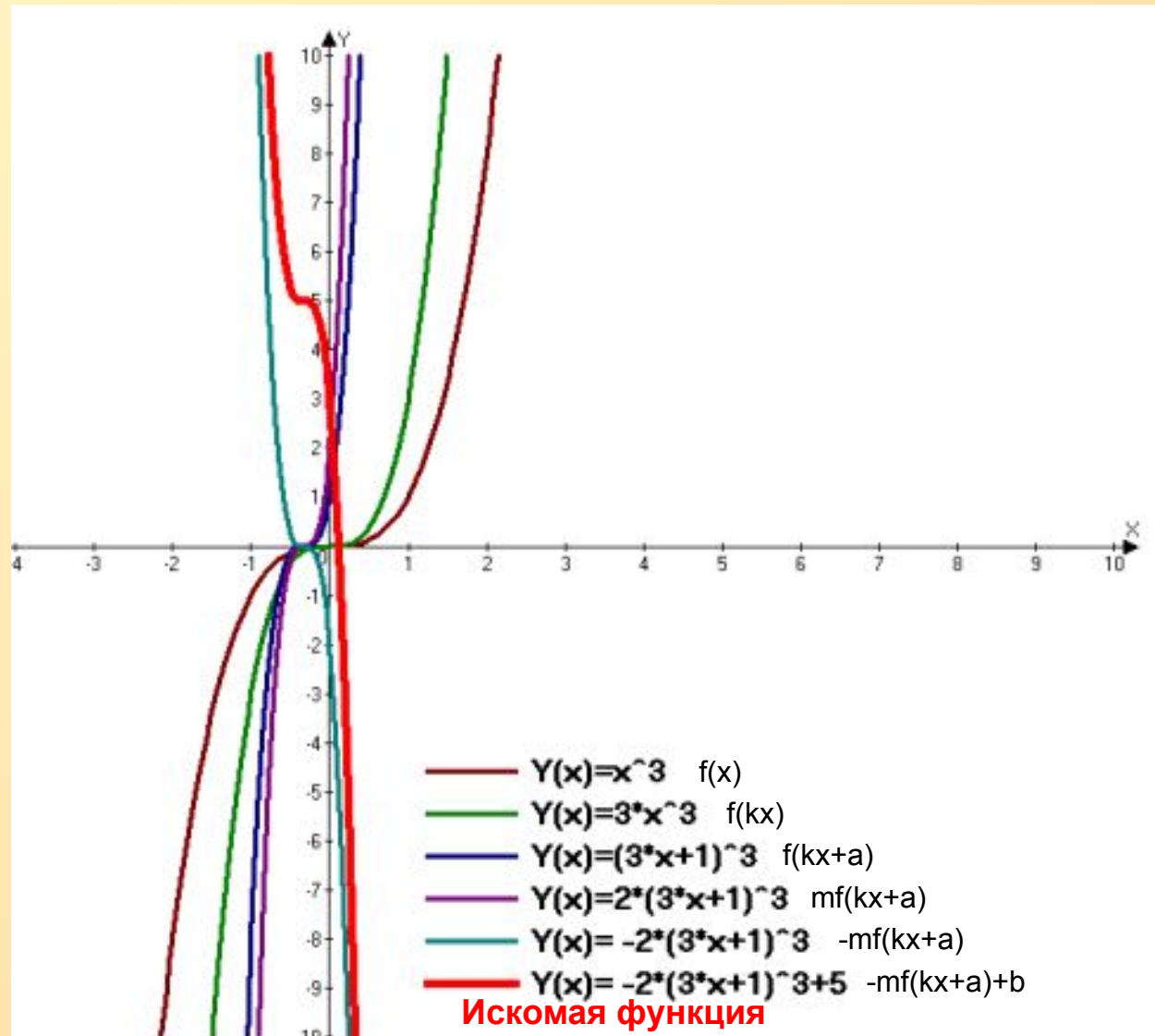
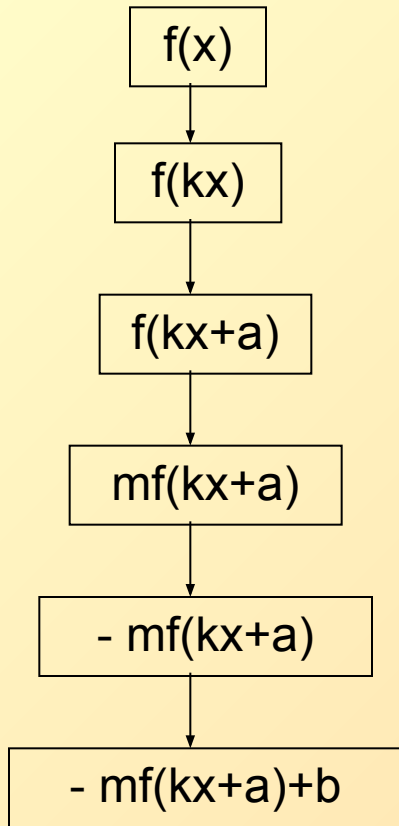


Рис.7



Применение метода сдвигов и деформаций при построении графиков тригонометрических функций.

Тригонометрические функции используются для описания колебательных процессов. Этот важнейший процесс описывается формулой:

$s = A \sin(\omega t + \alpha)$ - уравнение гармонических колебаний. A, ω, α имеют определенный физический смысл: A — амплитуда колебаний ($-A$, если $A < 0$);

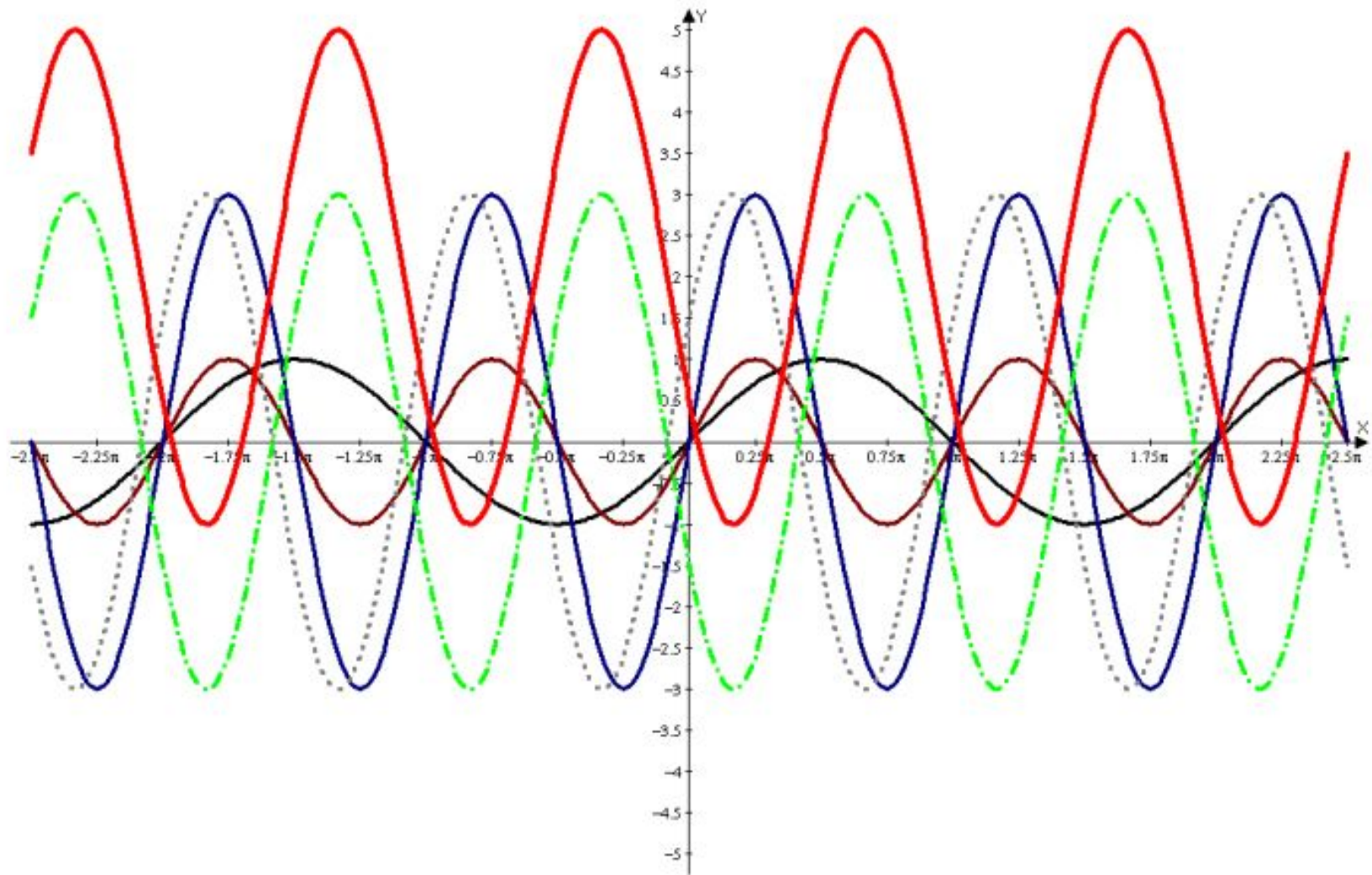
ω — частота колебаний; α — начальная фаза колебаний.

Рассмотрим уравнение вида: $y = -3 \sin 2(x + \pi/6) + 2$

Чтобы построить график этой функции, нужно над полуволной синусоиды осуществить следующие преобразования:

1. Сжать ее к оси Y с $k=2$.
2. Растянуть от оси X с $k=3$.
3. Сжатую и растянутую полуволну сдвинуть вдоль оси X на $\pi/6$ влево.
4. Построить полуволну синусоиды, симметрично полученной относительно оси X .
5. Сдвинуть полученную полуволну синусоиды вверх на 2 единицы масштаба.
6. С помощью полученной полуволны получить искомый график.





- $Y(x)=\sin(x)$
- $Y(x)=\sin(2*x)$
- $Y(x)=3*\sin(2*x)$
- $Y(x)=3*\sin(2*x+3.14/6)$
- .-.- $Y(x)= -3*\sin(2*x+3.14/6)$
- $Y(x)= -3*\sin(2*x+3.14/6)+2$

Искомая функция

Рис.8



Модули.

Для построения всех типов графиков достаточно хорошо понимать определение модуля и знать виды простейших графиков, изучаемых в школе. Так, для построения графика функции $y = f(|x|)$ на основании модуля имеем:

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \geq 0, \\ f(-x), & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Следовательно, график функции $y=f(|x|)$ состоит из двух графиков: $y=f(x)$ – в правой полуплоскости, $y=f(-x)$ – в левой полуплоскости.

Правило 1. Если функция $y=f(|x|)$ – четная, то для построения ее графика достаточно построить график функции $y=f(x)$ для всех $x \geq 0$ из области определения и отразить полученную часть симметрично оси ординат.

Знание этого правила облегчает построение графиков функций вида $y=f(|x|)$.



Пример:

$$y = x^2 - 3|x| + 2 = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & \text{если } x \geq 0, \\ x^2 + 3x + 2, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

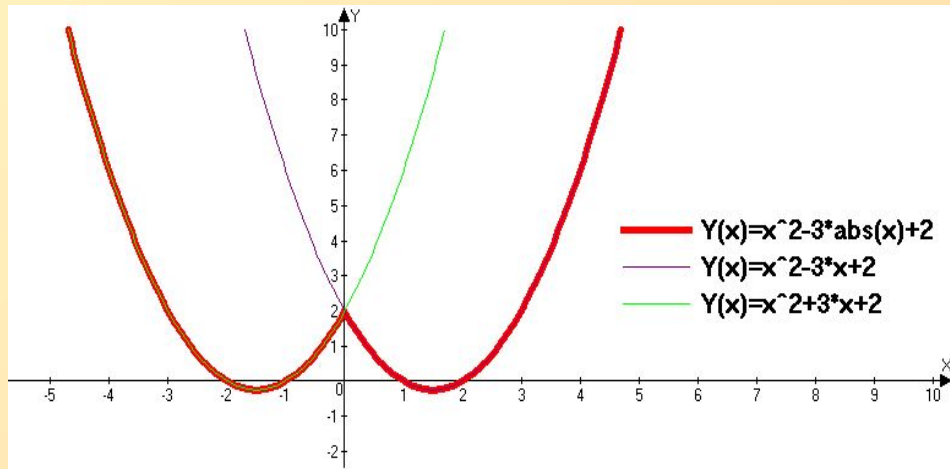
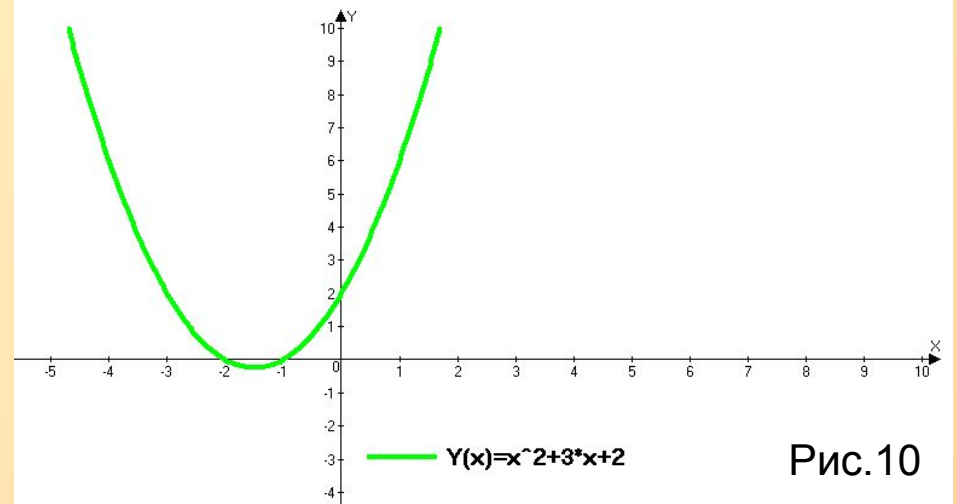
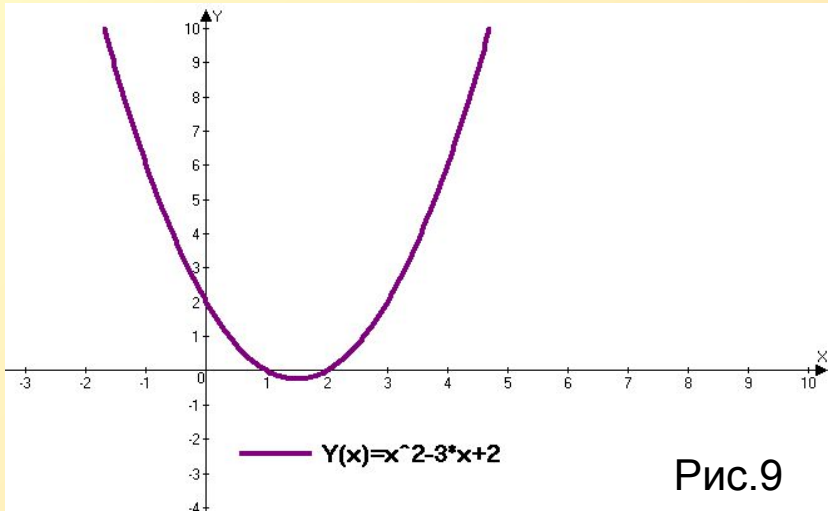


Рис.11



Рис.12



На основании модуля имеем:

Правило 2. Для построения графика функции $y=|f(x)|$ для всех x из области определения, надо ту часть графика функции $y=f(x)$, которая располагается ниже оси абсцисс ($f(x)<0$), отразить симметрично этой оси.

Таким образом, график функции $y=|f(x)|$ расположен только в верхней полуплоскости.

Пример: $y = |x^2 - 4|$

Строим график функции $y = x^2 - 4$ и применяем симметрию.

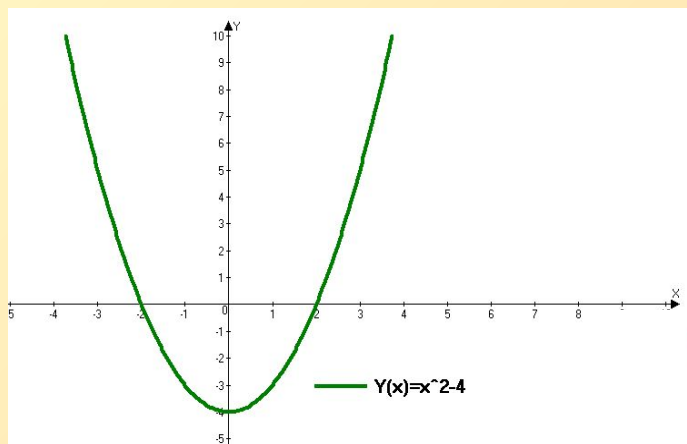


Рис.13

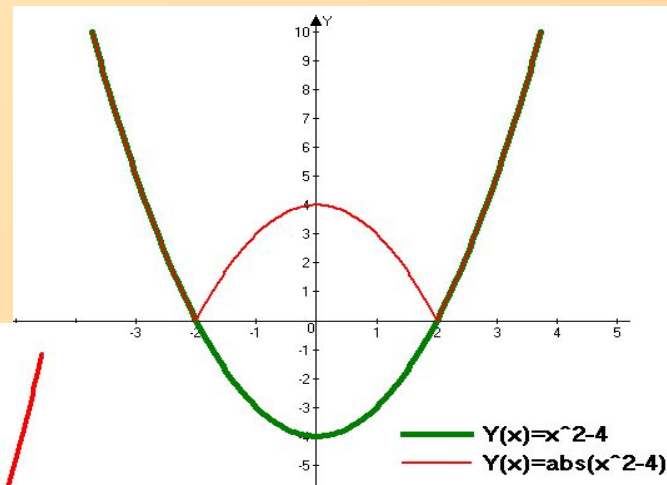


Рис.14



Рис.15

Искомая функция

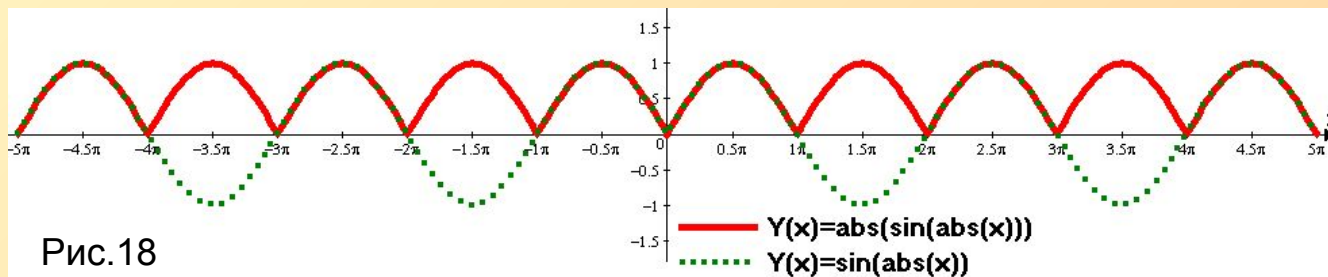
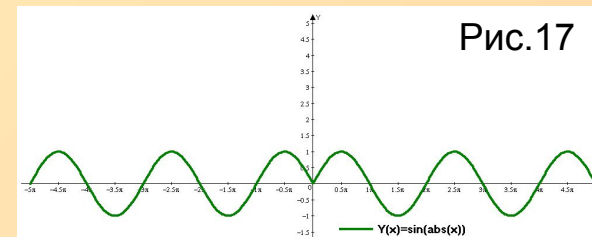
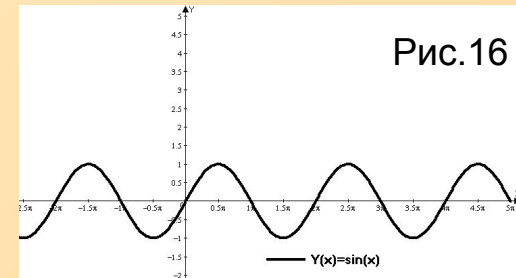


Построить график функции $y=|f(|x|)|$.

Правило: Для того, чтобы построить график функции $y=|f(|x|)|$, надо сначала построить график функции $y=f(x)$ при $x>0$, затем при $x<0$ построить изображение, симметричное ему относительно оси Y , а затем на интервалах, где $f(|x|)<0$, построить изображение, симметричное графику $f(|x|)$ относительно оси X .

Пример. Построить график функции $y=|\sin |x||$.

1. Построим график функции $y=\sin x$, (рис. 16)
2. Построим график функции $y=\sin |x|$, (рис. 17)
3. Построим график функции $y=|\sin |x||$, (рис. 19)



Упражнения.

Задание: 1) Разбить функцию на подфункции. 2) Построить графики подфункций разным цветом с легендой в программе **AGRAPHER**.
3) Сохранить график в своей папке под именем «График №...».

**«Запомните, друзья,
Суть истины такой
Теория мертва без
практики живой»**

$$1) y = 2x^2 + 1$$

$$2) y = \sqrt{x} + 4$$

$$3) y = \sin 2x$$

$$4) y = (x - 2)^3$$

**«Сложность задач повышаем
Решенье найти предлагаем»**

$$5) y = \sin 3x - 1$$

$$6) y = -3 \cos 2x$$

$$7) y = \left| x - \frac{1}{2} \right|$$

$$8) y = \left| \frac{1}{x} \right| - 1$$

**«В задачах тех ищи удачу
Где получить рискуешь
сдачу»**

$$9) y = |(x - 2)(x + 3)|$$

$$10) y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2$$

$$11) y = \left| \frac{1}{2} \cos |x| \right|$$

$$12) y = |x^2 - 6|x| + 8|$$



Задача – исследование.

Дана функция $y = x^2$.

В программе **AGRAPHER**:

1. Осуществите осевую симметрию графика относительно оси X.
2. Выполните сдвиг графика на 2 единицы вверх.
3. Выполните сдвиг графика на 1 единицу влево.
4. Произведите сжатие графика в 2 раза к оси Y.
5. Отрадите ту часть графика, которая располагается ниже оси абсцисс, симметрично этой оси.

Результат построения сохраните в своей папке под именем
«Исследование».

Вспомним все, что мы учили!
Ничего, ведь, не забыли?
Отображаем, двигаем, сжимаем
Графики мы точно знаем!



Основные результаты.

Ребята, Вы систематизировали и обобщили правила сдвигов и деформаций, применяемых для построения графиков сложных функций.

Вы научились строить графики функций: $y = mf(kx + a) + b$

$$y = f(|x|)$$

$$y = |f(x)|$$

$$y = |f(|x|)|$$

