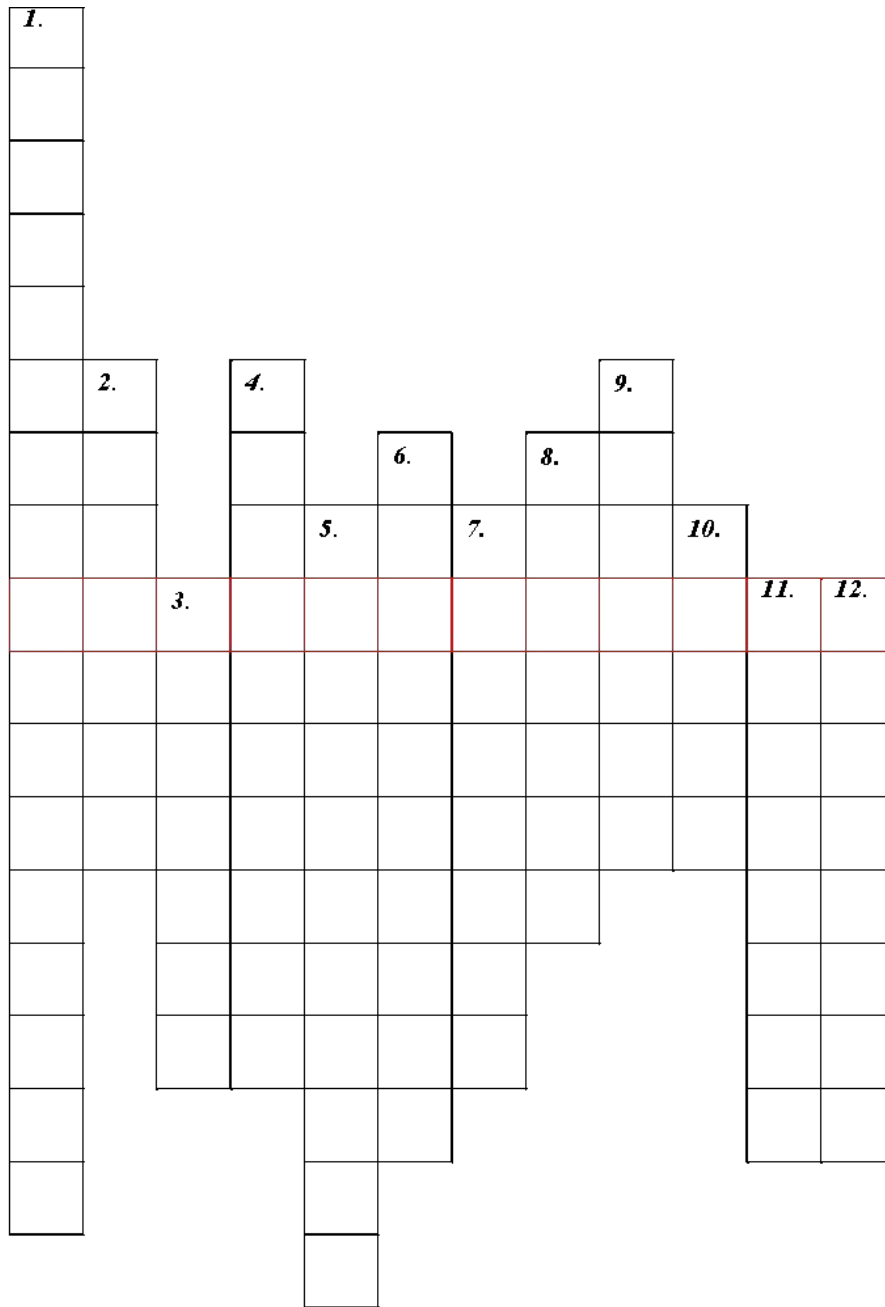


# «ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ В РІЗНИХ ОБЛАСТЯХ НАУКИ»

**Н. І. Лобачевський**

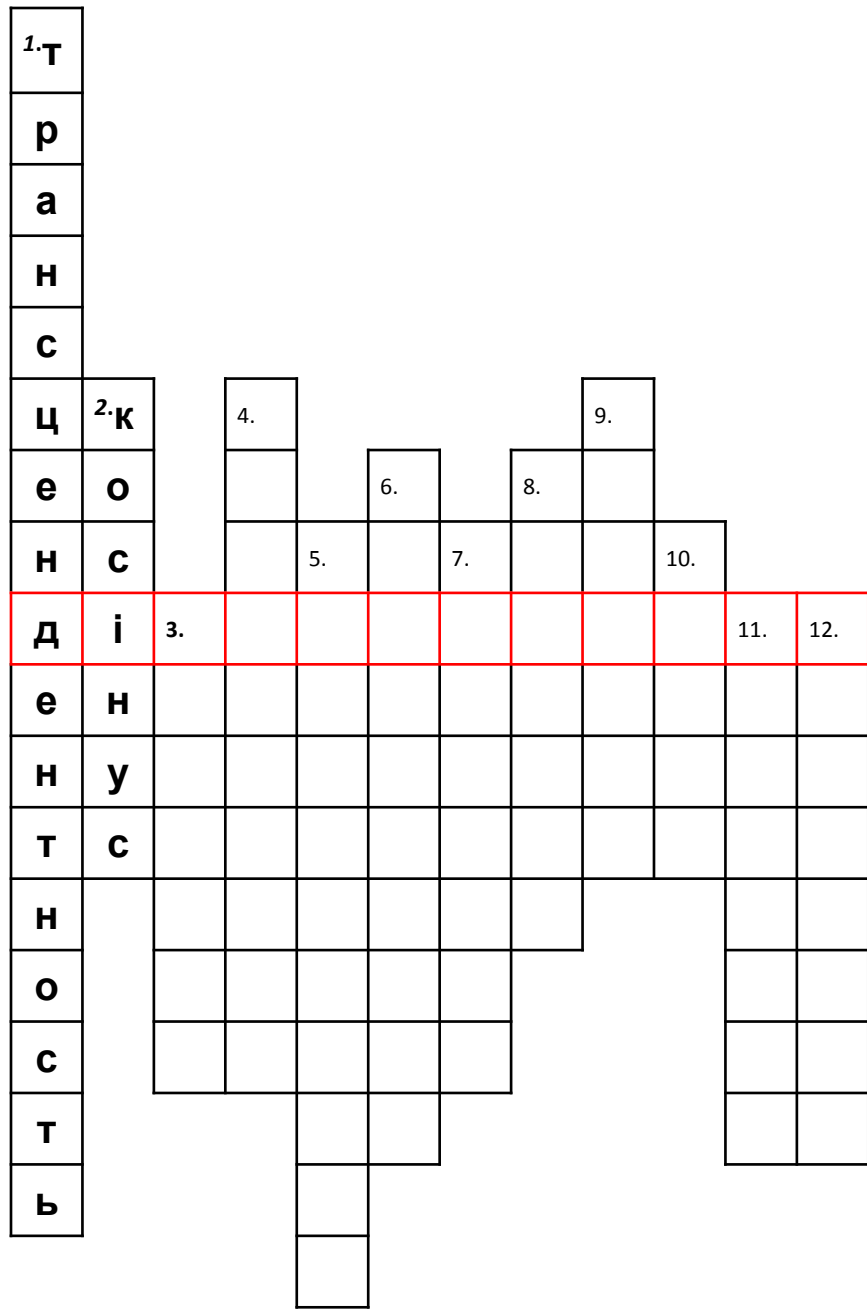
**Немає жодної області математики, як би абстрактна  
вона не була, яка коли-небудь не виявиться  
принятною до явищ дійсного світу**

# Кросворд «ПОВТОРЕННЯ-МАТИ НАВЧАННЯ!»



1.Т											
р											
а											
н											
с											
ц	2.		4.				9.				
е				6.		8.					
н			5.		7.			10.			
д	3.								11.	12.	
е											
н											
т											
н											
о											
с											
т											
ь											





1.Т													
р													
а													
н													
с													
ц	2.к		4.				9.						
е	о			6.		8.							
н	с			5.		7.				10.			
д	і	3.ф									11.	12.	
е	н	у											
н	у	н											
т	с	к											
н		ц											
о		і											
с		я											
т													
ь													



1.Т												
р												
а												
н												
с												
ц	2.к		4.к				9.					
е	о		о	6.		8.						
н	с		э	5.		7.			10.			
д	і	3.ф	ф							11.	12.	
е	н	у	ф									
н	у	н	і									
т	с	к	ц									
н		ц	і									
о		и	е									
с		я	н									
т		т										
ь												



1.Т											
р											
а											
н											
с											
ц	2.к		4.к					9.			
е	о		о		6.		8.				
н	с		э	5.н		7.			10.		
д	і	3.ф	ф	е						11.	12.
е	н	у	ф	р							
н	у	н	і	а							
т	с	к	ц	в							
н		ц	и	е							
о		і	е	н							
с		я	н	с							
т			т	т							
ь				в							
				о							



1.Т												
р												
а												
н												
с												
ц	2.к		4.к				9.					
е	о		о	6.о		8.						
н	с		э	5.н	к	7.				10.		
д	і	3.ф	ф	е	р					11.	12.	
е	н	у	ф	р	у							
н	у	н	і	а	ж							
т	с	к	ц	в	н							
н		ц	і	е	о							
о		і	е	н	с							
с		я	н	с	т							
т			т	т	ь							
ь				в								
				о								





1.Т												
р												
а												
н												
с												
ц	2.к		4.к				9.					
е	о		о		6.о		8.					
н	с		э	5.н	к	7.г			10.			
д	і	3.ф	ф	е	р	е				11.	12.	
е	н	у	ф	р	у	о						
н	у	н	і	а	ж	м						
т	с	к	ц	в	н	е						
н		ц	і	е	о	т						
о		і	е	н	с	р						
с		я	н	с	т	і						
т			т	т	ь	я						
ь				в								
				о								



1.Т												
р												
а												
н												
с												
ц	2.к		4.к				9.					
е	о		о	6.о		8.т						
н	с		э	5.н	к	7.г	а		10.			
д	і	3.ф	ф	е	р	е	н			11.	12.	
е	н	у	ф	р	у	о	г					
н	у	н	і	а	ж	м	е					
т	с	к	ц	в	н	е	н					
н		ц	і	е	о	т	с					
о		и	е	н	с	р						
с		я	н	с	т	і						
т			т	т	ь	я						
ь				в								
				о								



1.т												
р												
а												
н												
с												
ц	2.к		4.к				9.п					
е	о		о	6.о		8.т	р					
н	с		э	5.н	к	7.г	а	о	10.			
д	і	3.ф	ф	е	р	е	н	ц		11.	12.	
е	н	у	ф	р	у	о	г	е				
н	у	н	і	а	ж	м	е	н				
т	с	к	ц	в	н	е	н	т				
н		ц	і	е	о	т	с					
о		і	е	н	с	р						
с		я	н	с	т	і						
т		т	т	ь	я							
ь			в									
			о									



1.т											
р											
а											
н											
с											
ц	2.к		4.к				9.п				
е	о		о	6.о		8.т	р				
н	с		э	5.н	к	7.г	а	о	10.с		
д	і	3.ф	ф	е	р	е	н	ц	і	11.	12.
е	н	у	ф	р	у	о	г	е	н		
н	у	н	і	а	ж	м	е	н	у		
т	с	к	ц	в	н	е	н	т	с		
н		ц	і	е	о	т	с				
о		і	е	н	с	р					
с		я	н	с	т	і					
т		т	т	ь	я						
ь			в								
			о								



1.т											
р											
а											
н											
с											
ц	2.к		4.к					9.п			
е	о		о		6.о		8.т	р			
н	с		э	5.н	к	7.г	а	о	10.с		
д	і	3.ф	ф	е	р	е	н	ц	і	11.а	12.
е	н	у	ф	р	у	о	г	е	н	р	
н	у	н	і	а	ж	м	е	н	у	г	
т	с	к	ц	в	н	е	н	т	с	у	
н		ц	і	е	о	т	с			м	
о		і	е	н	с	р				е	
с		я	н	с	т	і				н	
т			т	т	ь	я				т	
ь				в							
				о							



1.т												
р												
а												
н												
с												
ц	2.к		4.к				9.п					
е	о		о	6.о		8.т	р					
н	с		э	5.н	к	7.г	а	о	10.с			
д	і	3.ф	ф	е	р	е	н	ц	и	11.а	12.л	
е	н	у	ф	р	у	о	г	е	н	р	о	
н	у	н	і	а	ж	м	е	н	у	г	г	
т	с	к	ц	в	н	е	н	т	с	у	а	
н		ц	і	е	о	т	с			м	р	
о		и	е	н	с	р				е	і	
с		я	н	с	т	і				н	ф	
т			т	т	ь	я				т	м	
ь				в								
				о								



## Гра «Доміно».

У комплекті «Доміно» 20 карток у студента. Пари перемішують свої картки, ділять навпіл і починають розкладати доміно з картки, в якій заповнена тільки права чи ліва частина. Далі ви повинні знайти на іншій картці вираз тотожно рівний виразу на першій картці і т. Д. В результаті виходить ланцюжок. Доміно вважається розкладеним тільки тоді, коли всі картки використані і крайні половинки останньої і першої картки порожні. Дана гра дозволяє засвоїти таблицю похідних елементарних функцій.

$x'$	0	$(x^2)'$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$c'$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$(\arccos x)'$	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$
$(\operatorname{tg} x)'$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f'(x)$	$\frac{1}{x \ln a}$
$(\arcsin x)'$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\log_a x)'$	
$(\sqrt{x})'$	$\frac{1}{1+x^2}$		$-\frac{1}{1+x^2}$
$(\operatorname{arctg} x)'$	$e^x$	$(\operatorname{arccot} x)'$	$a^x \ln a$
$(e^x)'$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$(a^x)'$	$\cos x$
$(\operatorname{ctg} x)'$	$n \cdot x^{n-1}$	$(\sin x)'$	$-\frac{1}{x^2}$
$(x^n)'$	$-\sin x$	$(\frac{1}{x})'$	$\frac{1}{x}$
$(\cos x)'$	2x	$(\ln x)'$	1



# ПРОБЛЕМНЕ ПИТАННЯ

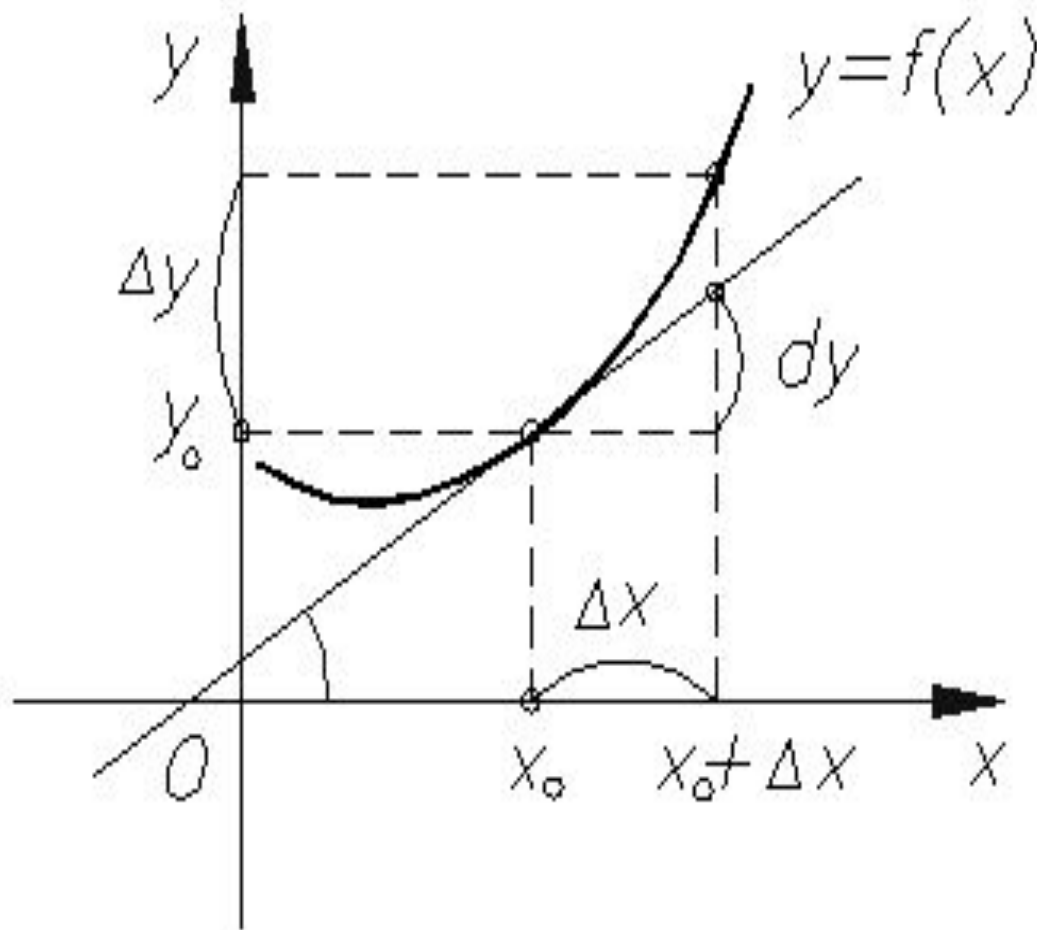
**Диференціальне числення - це розділ аналізу математичного, пов'язаний головним чином з поняттями проїзводной. В диференціальному обчисленні вивчаються правила обчислення похідних (закони диференціювання) і застосування похідних до дослідження властивостей функцій.**

## Чи справді це так?





# Визначення похідної функції



# Зв'язок похідною з біохімією

Реакція організму на введені ліки можуть виражатися в підвищенні кров'яного тиску, зменшення температури тіла, зміні пульсу або інших фізіологічних показників. Ступінь реакції залежить від призначеного ліки, його дози. Припустимо, що  $X$  позначає дозу призначеного ліки, тоді  $Y$  - функція ступеня реакції виражається формулою  $y = x^2(a - x)$ , де  $a$  - біомаса. При якому значенні  $X$  реакція максимальна?

Рішення:  $0 < x < a$ . Значить  $y'(x) = 2ax - 3x^2$ .

тоді

$$y'(x) = 0 \text{ при } x = \frac{2a}{3}. \text{ В этой точке } y''\left(\frac{2a}{3}\right) = -2a < 0, \text{ тогда } x = \frac{2a}{3} \text{ max}$$



*У наших будинках, на транспорті, на заводах:  
усюди працює електричний струм.*

*Під електричним струмом розуміють спрямоване  
рух вільних електрично заряджених частинок.*

*Кількісною характеристикою електричного  
струму є сила струму.*

*У ланцюзі електричного струму електричний  
заряд змінюється з плином часу за законом  $q = q(t)$ .  
Сила струму  $I$  є похідна заряду  $q$  по часу*

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t} = q'(t)$$





*Заряд, що протікає через провідник, змінюється за законом*

$$q = \sin * (2t-10)$$

*Знайти силу струму в момент часу  $t = 5$  сек.*

*Рішення:*

*Знайдемо похідну  $q$*

$$(Q)' = \cos (2t-10) \cdot 2 = 2\cos (2t-10)$$

*Згідно з умовами завдання,  $t$  дорівнює 5 секундам, звідки слід:*

$$(Q)' = 2\cos (2 * 5 - 10) = 2 \cos 0 = 2 (A)$$

*Відповідь:  $I = 2 (A)$ .*



*Витрата пального легкового автомобіля (літр на 100 км) в залежності від швидкості  $x$  км / год при русі на четвертій передачі приблизно описується функцією*

*$f(x) = 0,0017x^2 - 0,18x + 10,2$ ;  $x > 30$ . При якій швидкості витрата пального буде найменший?*

*Рішення:*

*Досліджуємо витрата пального за допомогою похідної:*

$$f'(x) = 0,0034x - 0,18.$$

*Тоді  $f'(x) = 0$  при  $x \approx 53$ .*

*Визначимо знак другої похідної в критичній точці:  $f''(x) = 0,0034 > 0$ , отже, витрата пального при швидкості 53 км / год буде найменшим.  $f(53) \approx 5,43$  л.*





*Автомобіль наближається до мосту зі швидкістю 72 км / год. Біля мосту висить дорожній знак "36км / год". За 7 сек до в'їзду на міст, водій натиснув на гальмівну педаль.*

*З дозволеної чи швидкістю автомобіль в'їхав на міст, якщо гальмівний шлях визначається формулою  $s = 20t - t^2$ ?*

*Рішення:*

$$v(t) = s'(t) = 20 - 2t$$

*Обчислимо швидкість авто, яке воно придбає*

*через 7 секунд:*

$$v(7) = 20 - 14 = 6 \text{ (м / с)}$$

$$6 \text{ м / с} = 21,6 \text{ км / год.}$$

*Відповідь: Так, з дозволеної*



Розрахуйте на підставі наявних даних, як буде змінюватися щільність популяції синиць через рік і 2 роки, якщо щільність синиць становить 260 особин / га. За період розмноження з однієї кладки яєць в середньому виживає 3 пташеня



У популяції рівне число самців і самок. Смертність синиць постійна, в середньому за рік гине 27 особей. Знайти швидкість росту чисельності популяції в рік.



# ДОПОМІЖНІ ФОРМУЛИ І ВИЗНАЧЕННЯ ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ЗАВДАННЯ

**Популяція** - це сукупність особин даного виду, що займають певну ділянку території всередині ареалу виду, вільно схрещуються між собою і частково або повністю ізольованих від інших популяцій, а також є елементарною одиницею еволюції.

**Ефективна чисельність популяції** - це сукупність особин, які беруть участь у відтворенні потомства.  
( $N_e$ )

**Щільність популяції** - це чисельність популяції на одиницю площі.

**Формула Ферсхюльца**:  $N_1 = (N_e - K_{\text{смерт}}) (K_{\text{рожд}} + N_0)$

**Швидкість чисельності популяції**:  $v(t) = N'(t)$





Рішення: За умовою щільність популяції  $N_0 = 260$  особин / га. У популяції рівне число самців і самок, а значить ефективна чисельність популяції дорівнює 100.

$$N_e = 100\%, \text{ тоді } N_e = 1$$

Коефіцієнт смертності  $K_{\text{смерт}} = 27\% = 0,27$

За рік 130 пар дає 390 пташенят, тобто  $(260/2) * 3 = 390$

Формула  $N_1 = (N_e - K_{\text{смерт}}) (K_{\text{рожд}} + N_0) =$

$$= (1 - 0.27) (390 + 260) = 474 \text{ особин всього за 1-ий рік } N_1$$



**Відносний приріст чисельності популяції  $\Delta N = 474/260 = 1,82$  рази**

**Тоді чисельність популяції буде визначатися функцією:  $N = 260 * 1,82^t$  де  $t = 1, 2, \dots$**

**Знайдемо тоді швидкість росту чисельності популяції:**

$$v(t) = N'(t) = (260 * 1.82^t)' = 260 * (1.82^t)' = 260 * 1.82^t * \ln 1.82$$

**(особин / рік)**

$$N(1) = 260 * 1.82^1 = 260 * 1.82 = 474$$

**особини**

$$N(2) = 260 * 1.82^2 = 260 * 3.3124 = 861 \text{ особина.}$$

$$\text{Відповідь: } 260 * 1.82^t * \ln 1.82$$

**особин / рік**

# Похідна в хімії

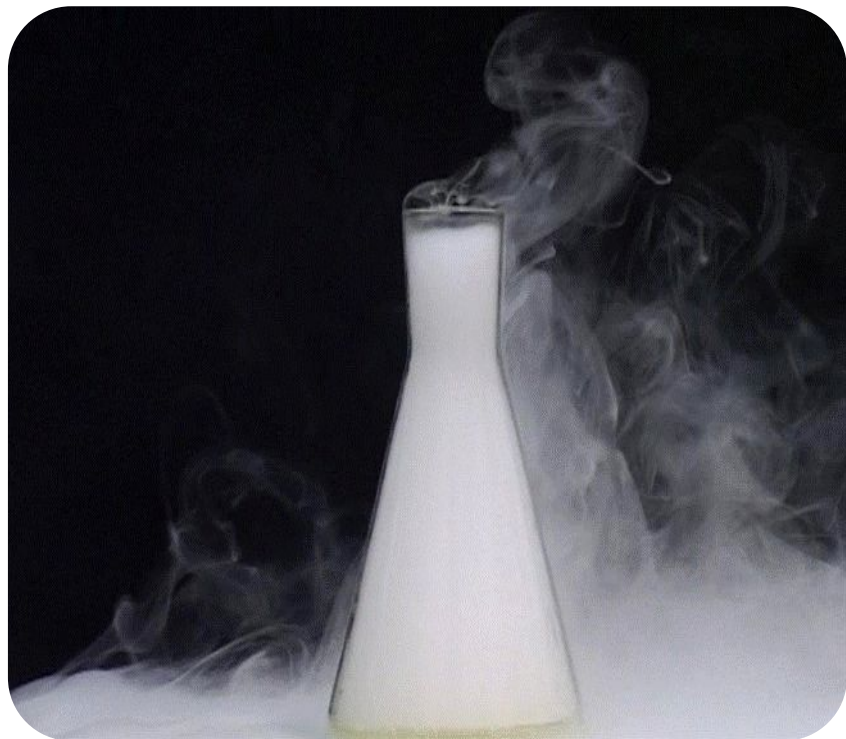


**Наприклад, інженерам-технологам при визначенні ефективності хімічних виробництв, хімікам, які розробляють препарати для медицини і сільського господарства, а також лікарям і агрономів, які використовують ці препарати для лікування людей і для внесення їх в ґрунт. Одні реакції проходять практично миттєво, інші йдуть дуже повільно. Тому в реальному житті для вирішення виробничих завдань у медичній, сільськогосподарській та хімічній промисловості просто необхідно знати швидкості реакцій хімічних речовин.**



# Визначення

**Швидкістю хімічної реакції в хімії називається зміна концентрації реагуючих речовин в одиницю часу або похідна від концентрації реагуючих речовин за часом (на мові математики концентрація була б функцією, а час - аргументом)**



# Формула похідної в хімії

Якщо  $P(t)$  - закон зміни кількості речовини, що вступив в хімічну реакцію, то швидкість  $v(t)$  хімічної реакції в момент часу  $t$  дорівнює похідній:

$$v(t) = p'(t)$$





## Завдання про газової суміші

Газова суміш складається з окису азоту (NO) і кисню (O<sub>2</sub>). Потрібно знайти концентрацію O<sub>2</sub> кисню, при якій міститься в суміші окис азоту окислюється з найбільшою швидкістю.

Рішення. В умовах практичної незворотності швидкість реакції



виражається формулою  $v = kx^2y$ , де  $x$  - концентрація NO в будь-який момент часу,  $y$  - концентрація O<sub>2</sub>,  $k$  - константа швидкості реакції, не залежить від концентрації реагуючих компонентів і залежить тільки від температури.

Концентрацію газів будемо висловлювати у відсотках. В цьому випадку

$$x + y = 100.$$

$$y = 100 - x, \text{ тому що } v = kx^2y, \text{ то } v = kx^2(100-x) = k(100x^2 - x^3) = v(x) \\ \text{при } x \in [0; 100]$$

$$x = 0 \text{ або } 200 - 3x = 0$$

$$-3x = -200$$

$$x = -200 : (-3)$$

$$x = 66.67\% \in [0; 100]$$

$v'(10) > 0$ ,  $v'(100) < 0$ . Отже швидкість найбільша, коли  $x \approx 66,67\%$ , і  $y = 100 - x = 33,33\%$ .

Відповідь:  $m(\text{NO}) \approx 66,67\%$  і  $m(\text{O}_2) \approx 33,33\%$ .




**Поняття похідної дуже важливо в хімії при визначенні швидкості течії реакції.**





**Обсяг продукції цеху протягом  
робочого дня представляє  
функцію? - Робочий час в  
годиннику? Обчислити  
максимальну продуктивність  
праці протягом робочого дня**

$$y = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50t \in [1;8]$$


$$y = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50;$$

$$y'(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100.$$

$$y'(1) = -\frac{5}{2} \cdot 1^2 + 15 \cdot 1 + 100 = 112,5$$

$$y'(2) = -\frac{5}{2} \cdot 2^2 + 15 \cdot 2 + 100 = 120$$

$$y'(3) = -\frac{5}{2} \cdot 3^2 + 15 \cdot 3 + 100 = 122,5$$

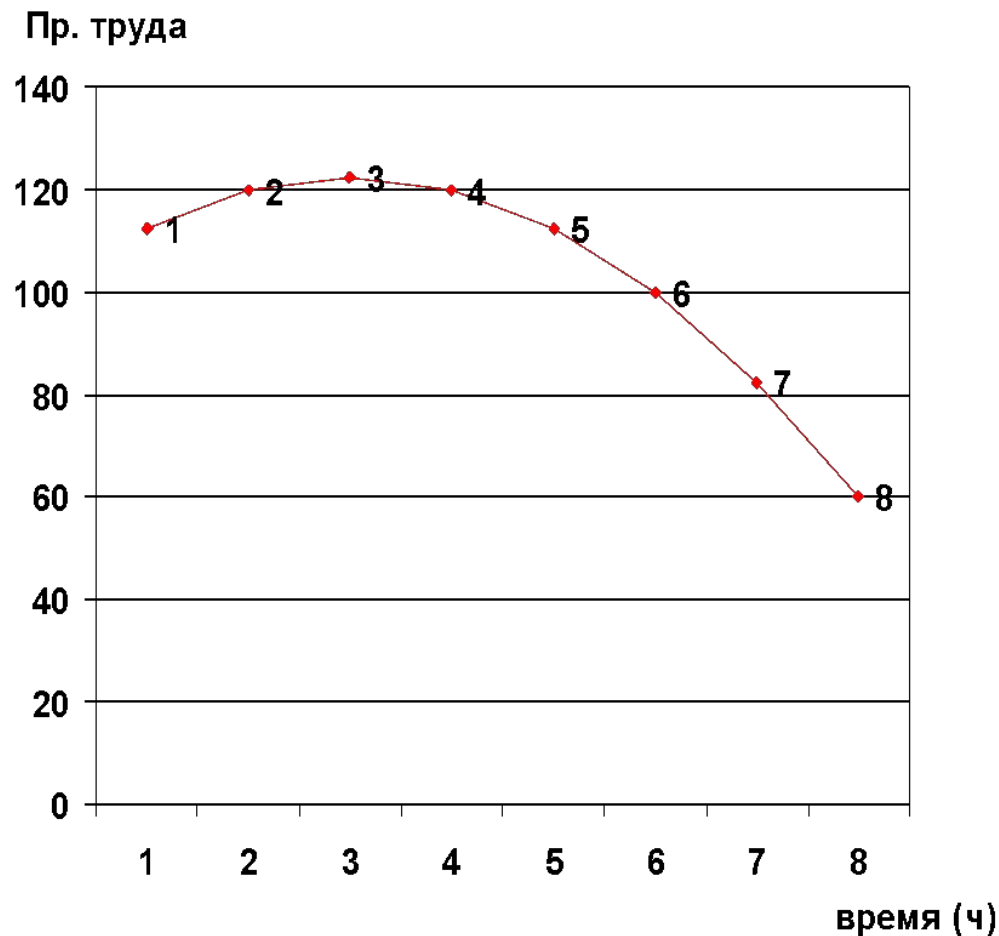
$$y'(4) = -\frac{5}{2} \cdot 4^2 + 15 \cdot 4 + 100 = 120$$

$$y'(5) = -\frac{5}{2} \cdot 5^2 + 15 \cdot 5 + 100 = 112,5$$

$$y'(6) = -\frac{5}{2} \cdot 6^2 + 15 \cdot 6 + 100 = 100$$

$$y'(7) = -\frac{5}{2} \cdot 7^2 + 15 \cdot 7 + 100 = 82,5$$

$$y'(8) = -\frac{5}{2} \cdot 8^2 + 15 \cdot 8 + 100 = 60$$



**Питання:** чому після третьої години роботи ми спостерігаємо спад продуктивності праці?

**Відповідь:** занепад сил, погано проветрено приміщення, можливо бригада робітників використовує ручну працю.





**Висновок:** Економічне додаток похідною допомагає як економістам і бізнесменам, так і звичайним громадянам в розпорядженні бюджетом.

