Модели множественной нелинейной регрессии

Существует 2 типа нелинейных моделей:

1. модели, сводящиеся к линейным;
2. модели, не сводящиеся к линейным.

Степенная модель

$$y = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_{r-1}^{a_{r-1}} a_r \xi$$

Пример

Производственная функция Кобба-Дугласа:

$$Q(K,L) = AK^{a_1} L^{a_2}$$

Степенная модель

$$y = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_{r-1}^{a_{r-1}} a_r \xi$$

Пример

Производственная функция Кобба-Дугласа:

$$Q(K, L) = AK^{a_1} L^{a_2} \qquad a_1 = E_k\left(Q\right),\ a_2 = E_L\left(Q\right)$$

a_1 – эластичность выпуска по капиталу;

a_2 – эластичность выпуска по труду.

Если $a_1 + a_2 = 1$, то говорят, что имеет место постоянный эффект от масштаба производства.

Если $a_1 + a_2 > 1$, то возрастающий эффект.

Если $a_1 + a_2 < 1$, то убывающий эффект.

Степенная модель

Пример

Производственная функция Кобба-Дугласа:

$$Q(K,L) = AK^{a_1}L^{a_2}$$

$$\ln Q = \ln A + a_1 \ln K + a_2 \ln L + \ln \xi$$

Проверка линейных гипотез общего вида

Пример

Для оценки производственной функции Кобба-Дугласа имеются данные

1 Год	2 Q	3 K	4 L
1899	100	100	100
1900	101	107	105
1901	112	114	110
1902	122	122	118
1903	124	131	123
1904	122	138	116
1905	143	149	125
1906	152	163	133
1907	151	176	138
1908	126	185	121
1909	155	198	140
1910	159	208	144
1911	153	216	145
1912	177	226	152
1913	184	236	154
1914	169	244	149
1915	189	266	154
1916	225	298	182
1917	227	335	196
1918	223	266	200
1919	218	387	193
1920	231	407	193
1921	179	417	147
1922	240	431	161

Индексы реального объема производства, реальных капитальных затрат и реальных затрат труда (промышленность США, 1899-1922 гг.) (1899=100%)

$$Q(K,L) = cK^a L^b$$

Проверка линейных гипотез общего вида

$$LnQ = \ln c + a \ln K + b \ln L$$

Пример

Для оценки производственной функции Кобба-Дугласа имеются данные

Год	Q	K	L	ln(Q)	ln(K)	ln(L)
1899	100	100	100	4,60517	4,60517	4,60517
1900	101	107	105	4,615121	4,672829	4,65396
1901	112	114	110	4,718499	4,736198	4,70048
1902	122	122	118	4,804021	4,804021	4,770685
1903	124	131	123	4,820282	4,875197	4,812184
1904	122	138	116	4,804021	4,927254	4,75359
1905	143	149	125	4,962845	5,003946	4,828314
1906	152	163	133	5,023881	5,09375	4,890349
1907	151	176	138	5,01728	5,170484	4,927254
1908	126	185	121	4,836282	5,220356	4,795791

Пример $$Q(K,L) = cK^a L^b$$

$$LnQ = \ln c + a\ln K + b\ln L$$

Регрессионная статистика	
Множественный R	0,9802
R-квадрат	0,9607
Нормированный R-квадрат	0,9570
Стандартная ошибка	0,0557
Наблюдения	24

	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*
Y-пересечение	-0,34741	0,376168	-0,92356	0,366206
ln(K)	0,223948	0,055264	4,052332	0,000573
ln(L)	0,851982	0,122892	6,932798	7,54E-07

$$LnQ = -0,35 + 0,22\ln K + 0,85\ln L$$

0,22 – эластичность выпуска по капиталу
0,85 – эластичность выпуска по труду

$$R^2 = 0,961$$

<u>Пример</u> $$LnQ = -0,35 + 0,22\ln K + 0,85\ln L$$

0,22 – эластичность выпуска по капиталу
0,85 – эластичность выпуска по труду

$$Q(K,L) = e^{-0,35} K^{0,22} L^{0,85}$$

Степенная модель

$$y = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_{r-1}^{a_{r-1}} a_r \xi$$

$$\underbrace{\ln y}_{y'} = a_1 \underbrace{\ln x_1}_{x_1'} + a_2 \underbrace{\ln x_2}_{x_2'} + a_{r-1} \underbrace{\ln x_{r-1}}_{x_{r-1}'} + \underbrace{\ln a_r}_{a_r'} + \underbrace{\ln \xi}_{\xi'}$$

$$\hat{a}_r = \exp\left(\hat{a}_r'\right)$$

Коэффициенты модели являются эластичностями.

Примеры нелинейных моделей, сводящихся к линейным

$$Q\left(P, I, P_1, ..., P_r\right) = Ap_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_r^{a_r} p^{a_{r+1}} I^{a_{r+2}} \xi$$ – многомерная функция спроса;

$a_1 \ldots a_r$ – перекрестные эластичности спроса;

a_{r+1} – прямая эластичность спроса по цене;

a_{r+2} – эластичность спроса по доходу.

Примеры нелинейных моделей, сводящихся к линейным

$Q(K, L, t) = AK^{a_1} L^{a_2} e^{a_3 t} \xi$ – функция Кобба – Дугласа с учетом технического прогресса.

$a_3 = \dfrac{Q'_t}{Q}$ - относительная скорость роста объема выпуска (темп прироста).

$a_3 \cdot 100\%$ показывает на сколько процентов увеличится объем производства за единицу времени за счет технического прогресса (при неизменных K и L)

<u>2 тип моделей</u> (модели, не сводящиеся к линейным)

$$y_i = f(x_{i1} \ldots x_{ik}, a_1 \ldots a_r) + \xi_i$$

$$S(a_1 \ldots a_r) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_{i1} \ldots x_{ik}, a_1 \ldots a_r))^2$$

$$\min_{a_1 \ldots a_r} S(a_1 \ldots a_r)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_r} = 0 \end{cases}$$