Линейная алгебра

Лекция 2

Определители

План лекции

- **Определитель 2-го порядка.**
- **Определитель n-го порядка.**
- **Свойства определителя.**
- **Основные методы вычисления определителя:**

  метод приведения к треугольному виду;

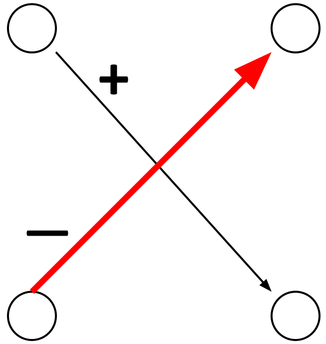
  метод понижения порядка.

Определитель 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

<u>Определителем 2-го порядка</u>, соответствующим матрице $\mathbf{A}$ (определителем матрицы $\mathbf{A}$), называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$



Примеры вычисления определителя 2-го порядка

1) $$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-5) - 6\cdot 2 = 3$$

2) $$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha - \left(-\sin^2\alpha\right) = 1$$

Определитель $\mathbf{n}$-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определителем $\mathbf{n}$-го порядка, соответствующим матрице $\mathbf{A}$, называется число $\mathbf{detA}$, равное сумме всех произведений элементов матрицы, взятых по одному из каждого столбца и каждой строки и снабженных знаком «+» или «-» по определённому правилу – «правилу знаков», которое состоит в следующем:

Определитель n-го порядка. Правило знаков

$$\det(\mathrm{A}) = \sum_{s=(j_1,j_2,\ldots,j_n)} (-1)^{t(s)} a_{1,j_1} a_{2,j_2} \ldots a_{n,j_n}$$

Число t (s) равно числу транспозиций, которое нужно сделать, чтобы перейти от основной перестановки $(1,2,\ldots,\mathrm{n})$ к перестановке $s = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$.

Пример.

Произведение $a_{2,5}a_{4,4}a_{1,3}a_{5,2}a_{3,1}$ входит в определитель 5-го порядка со знаком « + », т.к.

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{t}\,(\mathrm{s}) = 2$$

Свойства определителя

1. Умножение некоторой строки (столбца) матрицы определителя на некий коэффициент равносильно умножению самого определителя на этот коэффициент.

   Если все элементы некоторой строки (столбца) содержат общий множитель, то его можно вынести за знак определителя).

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Свойства определителя

2. Если все элементы некоторой строки (столбца) матрицы равны нулю, то и определитель равен нулю.
3. При перестановке двух строк (столбцов) между собой величина определителя меняет лишь знак.
4. Определитель не меняется при транспонировании (свойство равноправности строк и столбцов матрицы).
5. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.
6. Определитель с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю.

Свойства определителя

7. Если к некоторой строке (столбцу) определителя прибавить другую строку (столбец), умноженную на произвольное число, то величина определителя не изменится.

8. Определитель верхнетреугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & .. & .. & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & .. & c_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & .. & c_{3n} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{nn} \end{vmatrix} = c_{11} \cdot c_{22} \cdot c_{33} \cdots c_{nn}$$

Свойства определителя

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется следующий определитель n-го порядка

$$\begin{array}{cl} A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & 0 & .. & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & 0 & .. & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & .. & 0 & .. & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & .. & 0 & .. & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & .. & 0 & .. & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & .. & 0 & .. & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix} & \text{i-}\textit{ая строка} \end{array}$$

j-й столбец

Свойства определителя

9. Сумма произведений элементов любой строки (столбца) определителя на их алгебраические дополнения равна этому определителю, т.е.

$$\left|\mathrm{A}\right| = a_{i1}\mathrm{A}_{i1} + a_{i2}\mathrm{A}_{i2} + a_{i3}\mathrm{A}_{i3} + \ldots + a_{in}\mathrm{A}_{in}$$

10. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц:

$$\det\left(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}\right) = \det\left(\mathrm{A}\right)\cdot\det\left(\mathrm{B}\right)$$

Элементарные преобразования

Под элементарными преобразованиями понимаются:

1) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;

2) прибавление к одной строке (столбцу) другой, умноженной на любое число;

3) перемена местами двух строк (столбцов).

Методы вычисления определителей

1. Метод приведения к треугольному виду

Матрица определителя приводится элементарными преобразованиями над строками (или столбцами) к верхнетреугольному виду.

Определитель полученной матрицы вычисляется как произведение диагональных элементов:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & .. & a_{nn} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & .. & .. & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & .. & c_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & .. & c_{3n} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\boxed{= c_{11} \cdot c_{22} \cdot c_{33} \cdots c_{nn}}$$

Методы вычисления определителей

2. Метод понижения порядка

Минором M_{ij}, соответствующим элементу a_{ij} определителя n-го порядка, называется определитель (n-1)-го порядка, получающийся из исходного определителя вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Справедливо следующее равенство: $\mathrm{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\mathrm{M}_{ij}$.

Разложение определителя по i-ой строке

$$|\mathrm{A}| = a_{i1}\mathrm{A}_{i1} + a_{i2}\mathrm{A}_{i2} + a_{i3}\mathrm{A}_{i3} + \ldots + a_{in}\mathrm{A}_{in} =$$

$$= a_{i1}M_{i1} - a_{i2}M_{i2} + a_{i3}M_{i3} + \ldots + a_{in}(-1)^{i+n}M_{in}$$

Линейная алгебра

Лекция 2

Обратная матрица

План лекции

- **Определение обратной матрицы**
- **Свойства обратимой матрицы**
- **Вырожденная и невырожденная матрицы**
- **Необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы**
- **Основные методы нахождения обратной матрицы:**

  метод присоединенной матрицы;

  метод элементарных преобразований.

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Квадратная матрица $\mathbf{A}$ называется **обратимой**, если найдётся квадратная матрица $\mathbf{B}$ такая, что выполняются равенства:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$$

В этом случае матрица $\mathbf{B}$ называется **обратной** к матрице $\mathbf{A}$ и обозначается

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$$

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОБРАТИМЫХ МАТРИЦ

Если квадратные матрицы **A** и **B** обратимы, то справедливы следующие соотношения:

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

$$\left(A \cdot B\right)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'$$

Вырожденные и невырожденные матрицы

Матрица $\mathbf{A}$ называется <u>невырожденной</u>, если определитель матрицы отличен от нуля, и <u>вырожденной</u> в противном случае.

$\det(\mathrm{A}) = 0$ – матрица А вырожденная.

$\det(\mathrm{A}) \neq 0$ – матрица А невырожденная.

ТЕОРЕМА (условия существования обратной матрицы)

Для того чтобы для матрицы $\mathbf{A}$ существовала обратная, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы был отличен от нуля, т.е. чтобы $\mathbf{A}$ была невырожденной. При этом:

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{21} & \dots & \mathrm{A}_{n1} \\ \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{22} & \dots & \mathrm{A}_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{A}_{1n} & \mathrm{A}_{2n} & \dots & \mathrm{A}_{nn} \end{pmatrix}, \quad \Delta = \det(\mathrm{A})$$

Основные методы построения обратной матрицы. Метод присоединенной матрицы

Присоединенная матрица $A^{\vee}$ определяется как транспонированная к матрице, составленной из алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A :

$$\mathrm{A}^{\vee} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{21} & \ldots & \mathrm{A}_{n1} \\ \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{22} & \ldots & \mathrm{A}_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{A}_{1n} & \mathrm{A}_{2n} & \ldots & \mathrm{A}_{nn} \end{pmatrix}$$

Справедливо равенство $A^{\vee} A = A A^{\vee} = \det A \cdot E$.

Из теоремы следует, что если $\mathbf{A}$ – невырожденная матрица, то

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{\vee}}$$

Метод элементарных преобразований

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие:

1) *перестановка строк (столбцов);*
2) *умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;*
3) *прибавление к элементам строки (столбца) элементов другой строки (столбца), умноженных на некоторое число.*

Для данной квадратной матрицы $\mathbf{A}$ $\mathbf{n}$-го порядка строят прямоугольную матрицу $\mathbf{\Gamma_A = (A \mid E)}$ размера $\mathbf{n{\times}2n}$, приписывая к $\mathbf{A}$ справа единичную матрицу.

Используя элементарные преобразования над строками, приводят матрицу $\mathbf{\Gamma_A}$ к виду $\mathbf{(E \mid B)}$, что всегда возможно, если $\mathbf{A}$ невырождена. Тогда $\mathbf{B = A^{-1}}$.