Интегральное исчисление

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение Функция *F(x)* называется первообраз-ной для функции *f(x)*, если $F'(x) = f(x)$

Интегральное исчисление

Первообразная и неопределенный интеграл

<u>Определение</u> Функция *F(x)* называется первообраз-ной для функции *f(x)*, если $F'(x) = f(x)$

<u>Примеры</u> 1) $f(x) = x^2$

Интегральное исчисление

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение Функция *F(x)* называется первообраз-ной для функции *f(x)*,если $F'(x) = f(x)$

Примеры 1) $f(x) = x^2$ $F(x) = \frac{x^3}{3}$, т.к. $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$

2) $f(x) = x^3$

Интегральное исчисление

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение Функция *F(x)* называется первообраз-ной для функции *f(x)*, если $F'(x) = f(x)$

Примеры 1) $f(x) = x^2$ $F(x) = \frac{x^3}{3}$, т.к. $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$

2) $f(x) = x^3$ $F(x) = \frac{x^4}{4}$, т.к. $\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$

3) $f(x) = x$

Интегральное исчисление

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение Функция *F(x)* называется первообраз-

ной для функции *f(x)*,если $$F'(x) = f(x)$$

Примеры 1) $f(x) = x^2 \quad F(x) = \frac{x^3}{3}$, т.к. $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$

2) $f(x) = x^3 \quad F(x) = \frac{x^4}{4}$, т.к. $\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$

3) $f(x) = x \quad F(x) = \frac{x^2}{2}$, т.к. $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$

Первообразная и неопределенный интеграл

Замечание Для заданной функции f(x) ее первообразная определена неоднозначно.

Пример $f(x)=x^2$

$$F(x)=\frac{x^3}{3},\qquad F(x)=\frac{x^3}{3}-5,$$

$$F(x)=\frac{x^3}{3}+1,$$

$$F(x)=\frac{x^3}{3}+C,\ C\in R$$

Первообразная и неопределенный интеграл

Теорема Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то любая функция вида $F(x)+C$, где $C \in R$ является первообразной для $f(x)$.

Первообразная и неопределенный интеграл

Опр. Совокупность всех первообразных для функции *f(x)* называется неопределенным интегралом от функции *f(x)* и обозначается $\int f(x)dx$

Примеры

Свойства неопределенного интеграла

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

(производная от неопределенного интеграла равна подинтегральной функции)

Свойства неопределенного интеграла

2) $\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx$

(константу можно выносить за знак неопределенного интеграла)

Свойства неопределенного интеграла

3) $\int \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

(интеграл от суммы равен сумме интегралов)

(интеграл от разности равен разности интегралов)

Табличные интегралы

1) $$\int 0\,dx = C$$

2) $$\int 1\,dx = \int dx = x + C$$

3) $$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$$

4) $$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

5) $$\int e^x dx = e^x + C$$

6) $$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1$$

Табличные интегралы

1) $\int 0 \, dx = C$

Табличные интегралы

1) $\int 0\,dx = C$

2) $\int 1\,dx = \int dx = x + C$

Табличные интегралы

1) $\int 0 \, dx = C$

2) $\int 1 \, dx = \int dx = x + C$

3) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$

Табличные интегралы

1) $\int 0\, dx = C$

2) $\int 1\, dx = \int dx = x + C$

3) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$

4) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

Табличные интегралы

1) $\int 0\,dx = C$

2) $\int 1\,dx = \int dx = x + C$

3) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$

4) $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

5) $\int e^x dx = e^x + C$

Табличные интегралы

1) $\int 0\,dx = C$

2) $\int 1\,dx = \int dx = x + C$

3) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$

4) $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

5) $\int e^x dx = e^x + C$

6) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1$

Табличные интегралы

7) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

Табличные интегралы

7) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

8) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

Табличные интегралы

7) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

8) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

9) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C$

Табличные интегралы

7) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

8) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

9) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C$

10) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} dx = -ctg\, x + C$

Табличные интегралы

11) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, x \in (-a, a); a > 0$$

12) $$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C, a \neq 0$$

13) $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ a \neq 0$$

14) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C, a \neq 0$$

Метод замены переменной

1. Пусть необходимо вычислить интеграл

$\int \sin\left(2x+3\right) dx.$ При этом $\int \sin y\, dy = \cos y + C$

является табличным

1. Сделать замену $y = 2x + 3$

2. Вычислить дифференциал $dy = (2x+3)' dx = 2\, dx$

3. Выразить $dx = \dfrac{1}{2} dy$

4. Подставить y и dy в исходный интеграл

$$\int \sin y \cdot \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} \int \sin y\, dy = -\frac{1}{2} \cos y + C = -\frac{1}{2} \cos(2x+3) + C$$

Метод замены переменной

2. Пусть необходимо вычислить интеграл вида

$$\int \cos\left(x^3-1\right)x^2\,dx.$$

1. Сделать замену $y = x^3 - 1$

2. Вычислить дифференциал $dy = \left(x^3-1\right)'dx = 3x^2dx$

3. Выразить $x^2dx = \dfrac{1}{3}dy$

4. Подставить в исходный интеграл

$$\int \cos\left(x^3-1\right)x^2\,dx = \int \cos y \cdot \frac{1}{3}dy = \frac{1}{3}\sin y + C = \frac{1}{3}\sin\left(x^3-1\right)+C$$

Интегрирование функций, содержащих

$$ax^2+bx+c$$

1. $\int \frac{A}{ax^2+bx+c}dx \quad (n=0, m=2)$ выделить полный квадрат,

т.е. привести знаменатель к виду $a\left(x+d\right)^2+e,$ после чего сделать замену $y=x+d$. Интеграл сведется к одному из табличных

$$\int \frac{dy}{y^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{y-a}{y+a}\right|+C, \quad e<0$$

$$\int \frac{dy}{y^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{y}{a}+C, \quad e>0$$

$$\int \frac{dy}{y^2}=-\frac{1}{y}+C, \quad e=0$$

Интегрирование функций, содержащих

2. $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$ ax^2+bx+c

выделить полный квадрат, т.е представить в виде:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a(x+d)^2+e}}$$

и сделать замену $y=x+d$. После этого интеграл сводится к одному из табличных

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right|+C,$$ если $a>0$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{m^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{m}+C,$$ если $a<0$

Метод интегрирования по частям

Теор. Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Эта формула называется формулой интегрирования по частям

Метод интегрирования по частям

Метод интегрирования по частям применяется для нахождения интегралов вида:

1. $\int x^n e^{ax}\,dx, \quad n \in N, a \in R$

2. $\int x^n \sin ax\,dx, \quad n \in N, a \in R$

3. $\int x^n \cos ax\,dx, \quad n \in N, a \in R$

4. $\int x^k \ln^n x\,dx, \quad n \in N, k \in R, k \neq -1$