Математика
Лекция 1
Основы математической логики и теории множеств

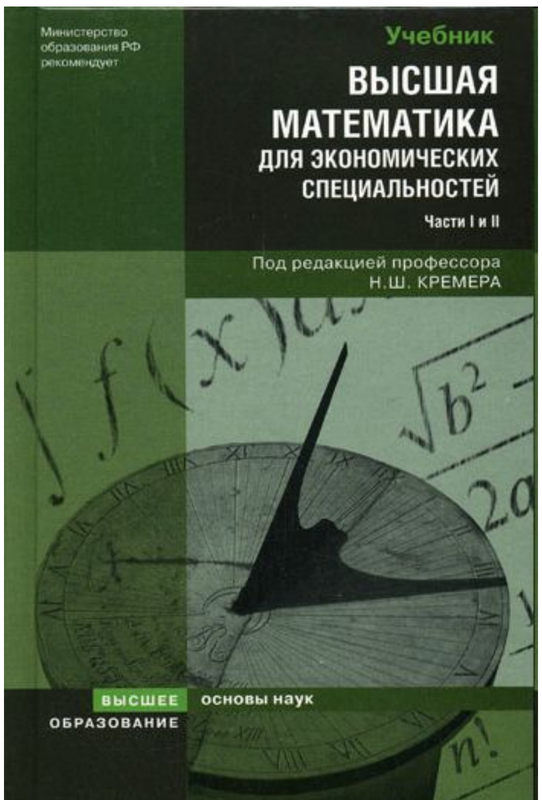
Данчул Александр Николаевич
д.т.н., профессор

2016

Основная литература

1. Высшая математика для экономических специальностей. Учебник и Практикум (части I и II) / Под ред. Н.Ш. Кремера. М.: Высшее образование, 2008 и позже.

2. Теория вероятностей и математическая статистика. Н.Ш. Кремер. М.: ЮНИТИ, 2007 и позже.



Высказывания и операции над ними

Опр 1. ***Высказыванием*** называется повествовательное предложение, о котором можно говорить, что оно либо ***Истинно***, либо ***Ложно.***

Основные ***операции*** над высказываниями соответствуют связкам между предложениями, употребляемым в обычной речи.

	Операция	**Связка**
1	отрицание $\overline{a}$	не a
2	дизъюнкция $a \vee b$	a или b
3	конъюнкция $a \wedge b$	a и b
4	импликация $a \Rightarrow b$	если a,…то b
5	эквивалентность $a \Leftrightarrow b$	a тогда и только тогда, когда b

Операции задаются с помощью ***таблиц истинности***. В строках такой таблицы помещаются **все комбинации** значений простых высказываний и соответствующее им значения сложного высказывания - результата операции.

Операции над высказываниями

1. Отрицание

a	$\overline{a}$
И	Л
Л	И

Пример.

a «2,5 – целое число»;

$\overline{a}$ «неверно, что 2,5 – целое число»

или

«2,5 – не целое число»

2. Дизъюнкция

a	b	$a \vee b$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Пример.

a «4 < 8 »;

b «4 = 8»;

$a \vee b$ «$4 \le 8$».

3. Конъюнкция»

a	b	$a \wedge b$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Пример.

a «4 < 8 »;

b «3 <4»;

$a \wedge b$ «3 < 4 < 8».

Операции над высказываниями

4. Импликация

характеризует верность рассуждения, которым из условия импликации *a* получено следствие *b*.

a	b	$a \Rightarrow b$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

1) При верных рассуждениях из истинных высказываний следуют истинные.

2) Рассуждение, которым из истинного условия получено ложное следствие, не может быть верным.

3) Из ложного условия верным рассуждением можно получить как истинное, так и ложное следствие.

5. Эквивалентность

характеризует равенство логических значений высказываний *a* и *b*.

a	b	$a \Leftrightarrow b$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Пример. a «$4 < 8$»; b «$4 = 8$»;

$a \Leftrightarrow b$ "$4 < 8 \Leftrightarrow 4 = 8$" - ложно

Логические законы

Опр. 2. Сложное высказывание называется ***логическим законом***, если оно истинно при всех комбинациях логических значений входящих в него простых высказываний.

Пример.

Закон исключенного третьего $a \vee \overline{a}$

a	$\overline{a}$	$a \vee \overline{a}$
И	Л	И
Л	И	И

Опр. 3. Два сложных высказывания называются ***логически эквивалентными (равносильными)***, если их эквивалентность является логическим законом.

$\overline{a \wedge \overline{a}}$ - закон противоречия ($a \wedge \overline{a}$ - ложь)

$\overline{a \vee b} \Leftrightarrow \overline{a} \wedge \overline{b}$; $\overline{a \wedge b} \Leftrightarrow \overline{a} \vee \overline{b}$ - законы Моргана

$((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$ - закон последовательного вывода

$(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\overline{b} \Rightarrow \overline{a})$ - закон контрапозиции

$(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow ((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a))$ - закон необходимого и достаточного условия

Одноместные предикаты

В любом высказывании можно выделить некоторый объект и свойство этого объекта.

Опр. 4. Одноместным предикатом $P(x)$ называется предложение, содержащее переменную x и превращающееся в высказывание при подстановке вместо нее конкретного значения из заданного множества M, которое называется ***полем*** этого ***предиката***.

Полученное высказывание может быть истинным или ложным в зависимости от того, какое именно значение переменной x мы подставили в предикат.

Опр. 5. Таблицы, в которых указываются значения высказываний, получаемых из предикатов путём подстановки в них конкретных значений переменных называются ***матрицами предиката***.

Пример. Предикат $P(x)$ – “$x < 9$” определен на поле $M = \{5, 6, 11\}$. Матрица этого предиката имеет вид

x	5	6	11
$P(x)$ “$x < 9$”	И	И	Л

Двухместные предикаты

В некоторых высказываниях можно выделить два объекта и отношение между ними.

Опр. 6. Двухместным предикатом $P(x, y)$ называется предложение, содержащее переменные x и y, превращающееся в высказывание при подстановке вместо них конкретных значений из заданных множеств M_x и M_y , которые называются ***полями*** этого ***предиката по соответствующим переменным***.

Пример. Предикат $P(x,y)$ – “$x < y$” определен на полях $M_x = \{4, 6\}; M_y = \{5, 7\}$.

Матрица этого двухместного предиката

$x \backslash y$	5	7
4	И	И
6	Л	И

Пример. Двухместный предикат $P(x,y)$ – “$x < y$”, одноместный предикат $Q(y)= P(6,y)$ – “$6 < y$”, высказывание $p = P(6,7)$ – “$6 < 7$”

Кванторы общности и существования

Используются для логической характеристики ***всего поля*** предиката.

При навешивании ***квантора общности*** на предикат $P(x)$ с полем M получаем высказывание “для любого x из поля M верно $P(x)$”.

Это высказывание обозначается

$$\underset{M}{\forall} x\, P(x) \qquad \text{или} \qquad \forall x\, P(x)$$

Оно истинно, если при подстановке ***любого*** значения x из поля М в предикат $P(x)$ он становится истинным высказыванием, и ложно в противном случае.

Пример. $P(x)$ – «$x < 6$»; M=**R** – множество действительных чисел.

$$\underset{\mathrm{R}}{\forall} x \;\; x < 6 \;\; \text{– ложное высказывание}$$

Квантор общности – аналог операции конъюнкции.

$$M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \Rightarrow \underset{M}{\forall} x\, P(x) \Leftrightarrow P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \ldots \wedge P(x_n)$$

Кванторы общности и существования

При навешивании ***квантора существования*** на предикат $P(x)$ с полем M получаем высказывание “существует x из поля M для которого верно $P(x)$”. Это высказывание обозначается:

$$\underset{M}{\exists} x\, P(x) \qquad \text{или} \quad \exists x\, P(x)$$

Оно истинно, если при подстановке ***хотя бы одного*** значения x из поля М в предикат $P(x)$ он становится истинным высказыванием, и ложно в противном случае.

Пример. $P(x)$ – «$x < 1$»; M=**N** – множество натуральных чисел.

$\underset{\mathrm{N}}{\exists} x \;\; x < 1$ – ложное высказывание

Квантор существования – аналог операции дизъюнкции.

$$M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \Rightarrow \underset{M}{\exists} x\, P(x) \Leftrightarrow P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_n)$$

Связь между кванторами общности и существования

Поскольку кванторы общности и существования являются обобщением операций конъюнкции и дизъюнкции, между ними существует связь, аналогичная законам Моргана.

$$\overline{a \vee b} \Leftrightarrow \overline{a} \wedge \overline{b} \qquad \boxed{\overline{\exists x\, P(x)} \Leftrightarrow \forall x\, \overline{P(x)}}$$

$$\overline{a \wedge b} \Leftrightarrow \overline{a} \vee \overline{b} \quad \Rightarrow \quad \overline{\forall x\, P(x)} \Leftrightarrow \exists x\, \overline{P(x)}$$

Пример. $\overline{\forall x\; x < 6} \Leftrightarrow \exists x\;\; x \geq 6;\qquad \overline{\exists x\; x < 6} \Leftrightarrow \forall x\;\; x \geq 6$

К предикатам можно применять те же логические операции, что и к высказываниям. Поля предикатов при этом должны совпадать. В результате этих операций получаются новые, ***сложные*** предикаты.

В двухместных предикатах можно навешивать кванторы на обе переменные (результат – высказывание) или одну из них. (результат – одноместный предикат относительно другой переменной).

$$\forall x \forall y\, P(x, y) \Rightarrow \exists x \forall y\, P(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y\, P(x, y) \Rightarrow \exists x \exists y\, P(x, y)$$

Основные понятия теории множеств

Исходными являются понятия ***множество и элемент множества.***

Рассматриваются только те объекты и множества, о любом из которых можно сказать, что этот объект либо является элементом этого множества (принадлежит ему), $a \in M$, либо не принадлежит ему

$$a \notin M \Leftrightarrow \overline{a \in M}$$

Множество можно задать

1) Указанием всех его элементов, например, $M = \{1, 2, 4\}$.

2) Указанием свойства $P(x)$, которое имеют все элементы этого множества, а другие элементы его не имеют.

$M = \{x : P(x)\}$ или $M = \{x | P(x)\}$, например $M = \{x : x > 0\}$.

Пустым множеством называют множество $\varnothing$, не содержащее элементов.

$$\forall a \; a \notin \varnothing \quad \text{или} \quad \overline{\exists a \; a \in \varnothing}.$$

Универсальным множеством будем называть множество ***I***, состоящее из всех элементов, рассматриваемых в данной задаче, и не противоречащее пониманию множества, описанному выше.

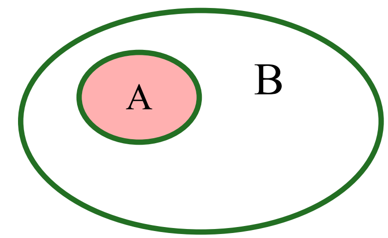
$$\forall a \; a \in I \quad \text{или} \quad \overline{\exists a \; a \notin I}.$$

Равенство и включение множеств

Опр. *7.* Два множества A и B называются ***равными***, тогда и только тогда, когда они состоят из одних и тех же элементов.

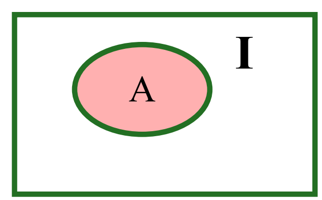
$$A = B \underset{Df}{\Leftrightarrow} \forall x \;\; x \in A \Leftrightarrow x \in B. \qquad \{4,2,1\} = \{1,2,4\}.$$

Опр. 8. Множество A ***включено*** в множество B (является его ***подмножеством***), тогда и только тогда, когда любой элемент множества A является элементом множества B.



$$A \subseteq B \underset{Df}{\Leftrightarrow} \forall x \;\; x \in A \Rightarrow x \in B. \qquad \{2,1\} \subseteq \{1,2,4\}.$$

$$\forall A \;\; \varnothing \subseteq A; \qquad \forall A \;\; A \subseteq I.$$



Теор. Два множества равны тогда и только тогда, когда они включены друг в друга

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

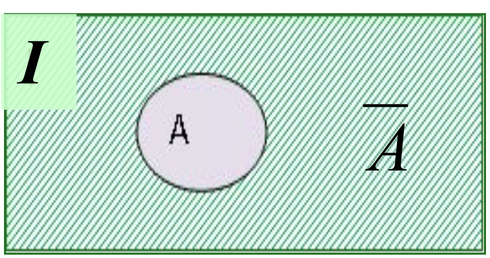
Операции над множествами

Существуют три основных операции над множествами, которые определяются через логические операции:

	Операция над множествами	Логическая операция
1	Дополнение	отрицание
2	Объединение	дизъюнкция
3	Пересечение	конъюнкция

1. Операция "**дополнение**" обозначается $\overline{A}$, читается "не A". В дополнение множества A входят те и только те элементы, которые не принадлежат множеству A.

$$\forall x \; x \in \overline{A} \underset{Df}{\Leftrightarrow} x \notin A.$$



Пример 1. $\boldsymbol{I}=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A=\{1, 3, 5\}$

$$\overline{A} = \{2, 4\}$$

Пример 2. $\overline{I} = \varnothing$, $\overline{\varnothing} = I$.

Операции над множествами

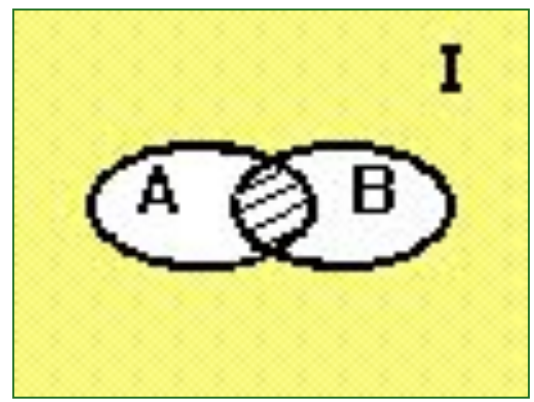
2. Объединение $A \cup B$, определяется выражением

$$\forall x \;\; x \in A \cup B \underset{Df}{\Leftrightarrow} x \in A \vee x \in B$$

В объединение множеств входят элементы каждого множества

3. Пересечение $A \cap B$, определяется выражением

$$\forall x \;\; x \in A \cap B \underset{Df}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge x \in B$$



В пересечение множеств входят общие элементы всех множеств

Пример. $A = \{1,\ 3,\ 5\}$; $B = \{7,\ 3\}$.

$$A \cup B = \{1, 3, 5, 7\};\;\; A \cap B = \{3\}.$$

Тождества теории множеств

Опр. 4. Тождествами называются высказывания про множества, которые истинны при любых видах входящих в них множеств.

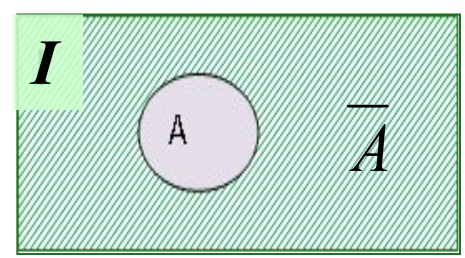
В определении операций над множествами используются логические операции. Поэтому тождествам теории множеств соответствуют некоторые логические законы, использующиеся при их доказательстве ***методом принадлежности***.

Пример. Тождество $A \cup \overline{A} = I$

Запишем высказывание о принадлежности произвольного элемента согласно определению равенства множеств. Полученное высказывание должно быть логическим законом.

$\forall x \;\; x \in A \cup \overline{A} \Leftrightarrow x \in I;$ $\quad \forall x \;\; x \in A \vee x \in \overline{A} \Leftrightarrow \text{И}$

$\forall x \;\; x \in A \vee \overline{x \in A} \Leftrightarrow \text{И};$ $\quad \forall x \;\; a_x \vee \overline{a_x} \Leftrightarrow \text{И}$



Получили логический закон исключенного третьего $\quad a \vee \overline{a}$

Кортежи

Опр. 5. Под ***кортежем*** будем понимать упорядоченную совокупность объектов, которые называются ***компонентами кортежа***. Число компонент кортежа называется его ***длиной***.

Компоненты кортежа записываются в угловых скобках.
Каждая компонента кортежа имеет свой номер (своё место) в кортеже.
Компоненты кортежей, как и элементы множеств, могут быть любого вида, в том числе и кортежи и множества, однако, ***компоненты кортежа могут совпадать***.

$< 1, 7, 1 >$ - кортеж длины 3. $< \{1, 7\}, 1 >$ - кортеж длины 2.

Кортежи из двух компонент принято называть ***парами***, кортежи из трёх компонент - ***тройками***.

Опр. 6. Два кортежа равны, если они имеют одинаковую длину и все компоненты этих кортежей с одинаковыми номерами равны между собой.

Прямое (декартово) произведение множеств

Опр. 7. Прямым или ***декартовым*** произведением $A \times B$ множеств A и B называется множество, состоящее из всех упорядоченных пар, первая компонента которых является элементом множества A, а вторая – элементом множества B.

$$\forall a \forall b < a,b > \in A \times B \underset{Df}{\Leftrightarrow} a \in A \wedge b \in B$$

$$A \times B = \{< a,b >: a \in A \wedge b \in B\}$$

Пример. Пусть $A=\{1, 2\}$ $B=\{1, 2, 3\}$, тогда:

$$A \times B=\{<1; 1>, <1; 2>, <1; 3>, <2; 1>, <2; 2>, <2; 3>\}$$

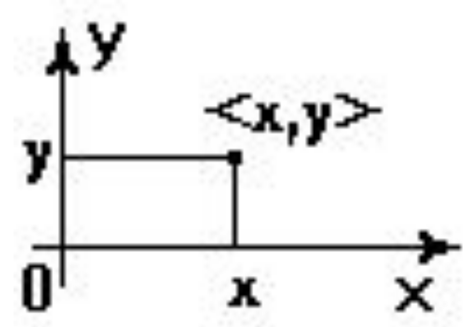
$$B \times A=\{<1; 1>, <1; 2>, <2; 1>, <2; 2>, <3; 1>, <3; 2>\}$$

Очевидно, что в общем случае $A \times B \neq B \times A$, то есть прямое произведение множеств не коммутативно.

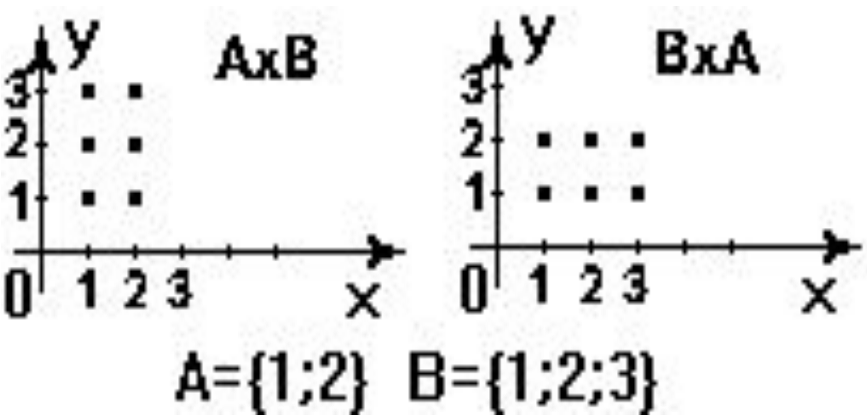
.

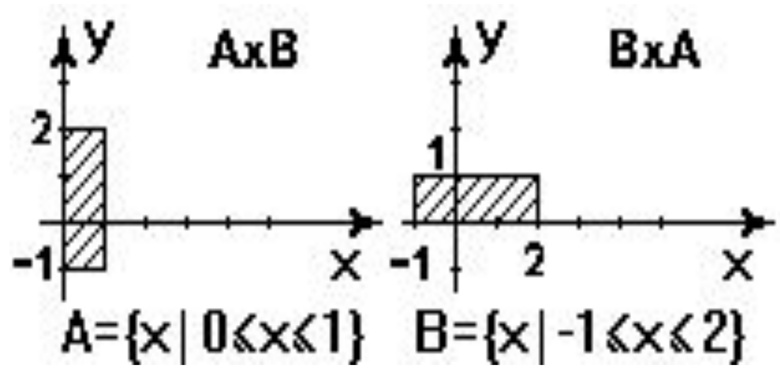
Прямое (декартово) произведение множеств

Пару <*x*, *y*> можно трактовать как точку на координатной плоскости X0Y с координатами *x* и *y*.



Тогда прямое произведение будет соответствовать “прямоугольному” множеству точек на этой плоскости, причём в произведении $A \times B$ первый сомножитель – множество абсцисс этих точек, а второй – множество ординат.





Такое представление называется *координатной диаграммой*.