Системы линейных уравнений.

- Системой m линейных уравнений с n неизвестными x_1, x_2, ..., x_n называется система вида

(*)
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

a_{ij} - коэффициенты системы, $i=1,\ldots,m$; $j=1,\ldots,n$

b_i - свободные члены.

- Решением системы (*) называется такой набор чисел (c_1, c_2,…, c_n), что при его подстановке в систему вместо соответствующих неизвестных (c_1 вместо x_1, …, c_n вместо x_n) каждое из уравнений системы обращается в тождество.

- Если система (*) имеет хотя бы одно решение, то она называется совместной; система, не имеющая ни одного решения, называется несовместной.

- Система называется определенной, если она имеет единственное решение; и неопределенной, если она имеет более одного решения.

- В случае неопределённой системы каждое её решение называется частным решением системы. Совокупность всех частных решений называется общим решением.

- Если $b_1=b_2=\ldots=b_m=0$, то система называется однородной; в противном случае она называется неоднородной.

- Две системы называются эквивалентными или равносильными, если любое решение одной из них является также решением другой, т.е. если они имеют одно и то же множество решений.

  (любые две несовместные системы считаются эквивалентными)

- Элементарными преобразованиями линейной системы называются следующие преобразования:

- перестановка уравнений системы;

- умножение или деление коэффициентов и свободных членов на одно и то же число, отличное от нуля;

- сложение и вычитание уравнений;

- исключение из системы тех уравнений, в которых все коэффициенты и свободные члены равны нулю.

- Систему (*) можно записать в матричной форме: AX=B,

где

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

матрица коэффициентов системы;

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

матрица-столбец (вектор-столбец) неизвестных

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

матрица-столбец (вектор-столбец) свободных членов

1. Решение систем линейных уравнений при помощи обратной матрицы.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

основная матрица системы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

матрица-столбец (вектор-столбец) неизвестных

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

матрица-столбец (вектор-столбец) свободных членов

Пусть $\det A \neq 0$, тогда $\exists\ A^{-1}$

$$A \cdot X = B$$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E} \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Решить систему линейных уравнений при помощи обратной матрицы:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 4x + 5y + 6z = 9 \\ 7x + 8y = -6 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot X = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}}_{B}$$

1) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 27 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, A^{-1}$

2) $A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -48$ $\qquad$ $A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 24$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 42$ $\qquad$ $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -21$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3$ $\qquad$ $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -48 & 42 & -3 \\ 24 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

3) $$\left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

4) $$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot\left(A^*\right)^T = \frac{1}{27}\cdot 3\cdot\begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

5) $X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{3}{9} \begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

то есть: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{matrix}$

Ответ: (-2; 1; 2)

2. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.

Система n уравнений с n неизвестными, определитель которой отличен от нуля, всегда имеет решение и притом единственное.

Оно находится следующим образом: значение каждого из неизвестных равно дроби, знаменателем которой является определитель системы, а числитель получается из определителя системы заменой столбца коэффициентов при искомом неизвестном на столбец свободных членов.

- Дана система n линейных уравнений с n неизвестными x_1, x_2, …, x_n:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

- Систему можно записать в матричной форме: AX=B,

где

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица коэффициентов системы;

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

матрица-столбец (вектор-столбец) неизвестных

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

матрица-столбец (вектор-столбец) свободных членов

$$A \cdot X = B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

пусть

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + ... + A_{n1}b_n}{\Delta}$$

$$x_2 = \frac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + ... + A_{n2}b_n}{\Delta}$$

....

$$x_n = \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + ... + A_{nn}b_n}{\Delta}$$

$$A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta x_1$$

разложение *det* по элементам 1-го столбца

столбец свободных членов

Итак: $$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}$$

$$A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta x_2$$

разложение *det* по элементам 2-го столбца

столбец свободных членов

Итак: $x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta}$

$$A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + ... + A_{nn}b_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & b_2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & b_n \end{vmatrix} = \Delta x_n$$

разложение *det* по элементам n-го столбца

столбец свободных членов

Итак: $x_n = \dfrac{\Delta x_n}{\Delta}$

То есть: $x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta}; \quad x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta}; \quad ... \quad x_n = \dfrac{\Delta x_n}{\Delta}$

Формулы Крамера

$$\boxed{x_k = \frac{\Delta x_k}{\Delta}, \quad k = 1, 2, ..., n}$$

где $\Delta = det\text{A} \neq 0$,

Δx_k- определитель, получающийся из detA заменой $к$-го столбца на столбец свободных членов.

Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 4x + 5y + 6z = 9 \\ 7x + 8y = -6 \end{cases}$$

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & 6 \\ -6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 9 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -2 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -18 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -54$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ 7 & -6 & 0 \end{vmatrix} = -9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 27$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & -6 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & -2 \end{vmatrix} = 54$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-54}{27} = -2; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{27}{27} = 1; \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{54}{27} = 2$$

Ответ: (-2; 1; 2)