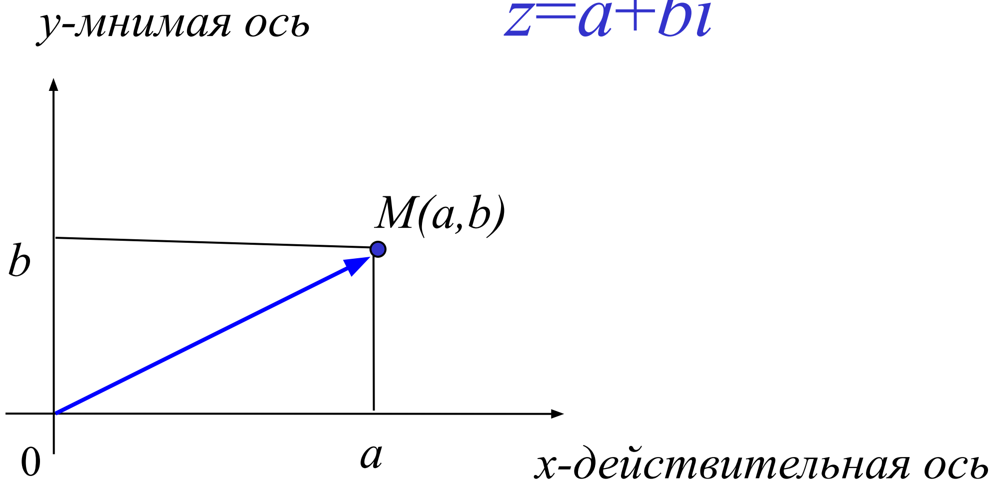
Теория комплексных чисел

Геометрическая интерпретация комплексного числа XVIII-XIX вв

- Г.Вессель, Ж.Арган, К. Гаусс

$z=a+bi$



К. Гаусс

1. Изобразить на комплексной плоскости следующие числа:

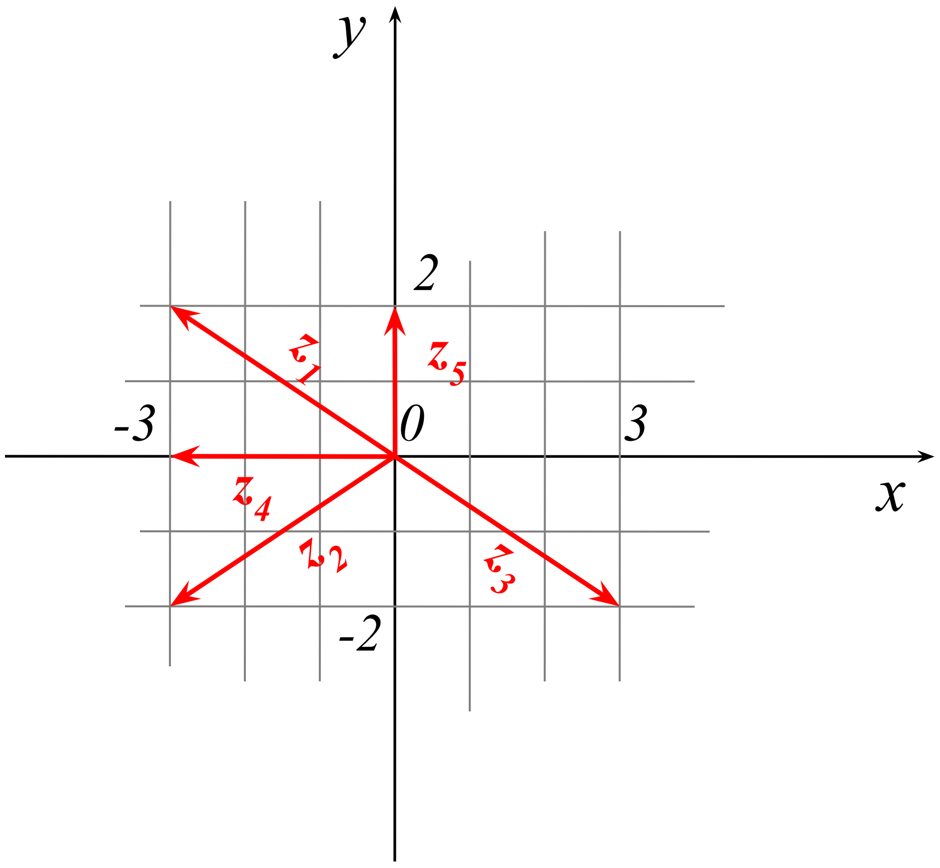
$$z_1 = -3 + 2 \cdot i$$

$$z_2 = \overline{z_1}$$

$$z_3 = -z_1$$

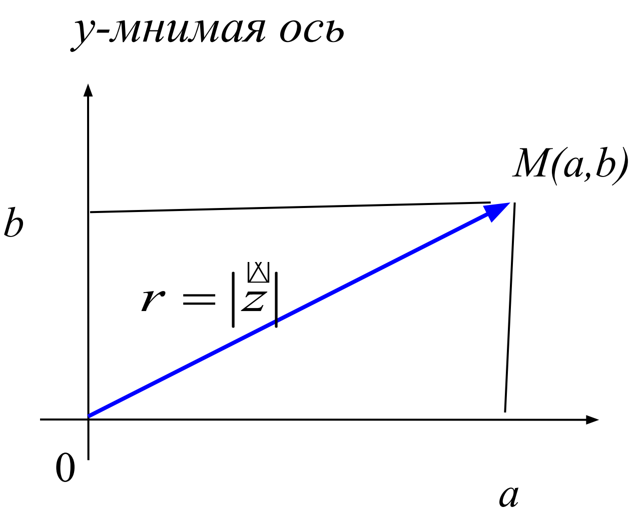
$$z_4 = \operatorname{Re} z_1$$

$$z_5 = \operatorname{Im} z_1$$



Модуль комплексного числа

- **Модулем** комплексного числа $z=a+bi$ называется длина вектора $\vec{z}$



$$\boxed{|\vec{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

2. Найти модуль комплексного числа:

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$z_1 = 2 - i$ $\qquad |z_1| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

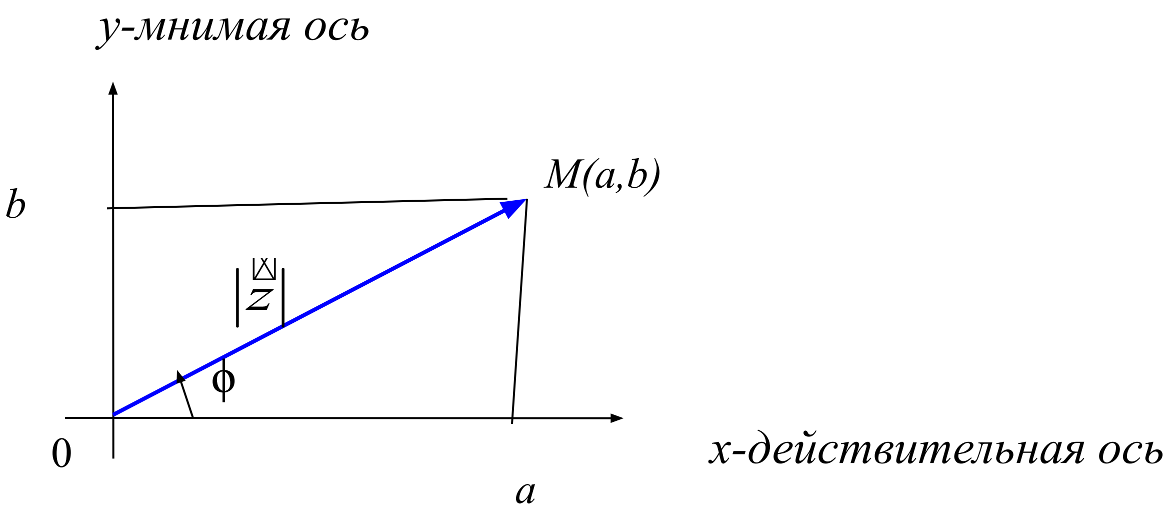
$z_2 = 2\sqrt{6} + 5i$ $\qquad |z_2| = \sqrt{\left(2\sqrt{6}\right)^2 + 5^2} = \sqrt{24+25} = \sqrt{49} = 7$

$z_3 = i$ $\qquad |z_3| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$

$z_4 = -4$ $\qquad |z_4| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$

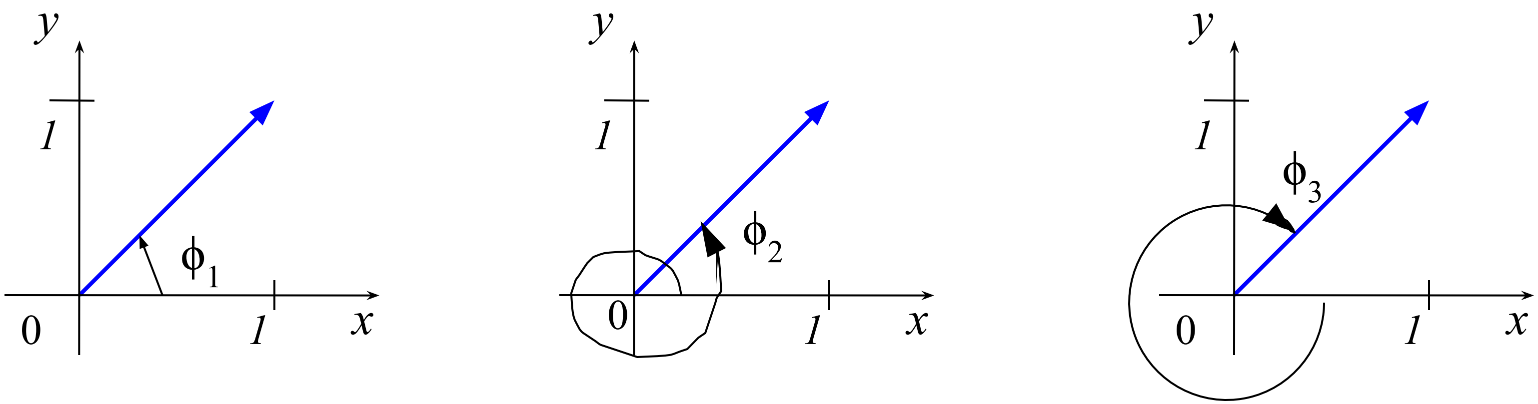
Аргумент комплексного числа

- Аргументом комплексного числа называется угол ϕ, который образует вектор OM с положительным направлением оси абсцисс. $\phi = \arg z$



Аргумент определяется неоднозначно

$$z = 1 + i$$



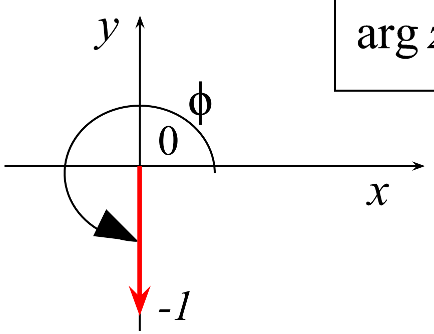
$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4} \qquad \varphi_2 = 2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4} \qquad \varphi_3 = \frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7\pi}{4}$$

Любые два аргумента комплексного числа отличаются друг от друга слагаемым, кратным 2π.

Для нашего примера: $\varphi_k = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in Z$

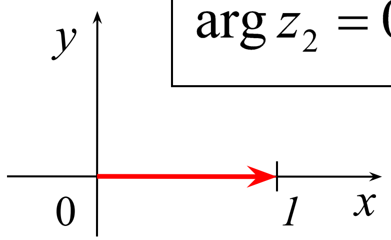
3. Найти аргументы комплексного числа:

$$z_1 = -i$$



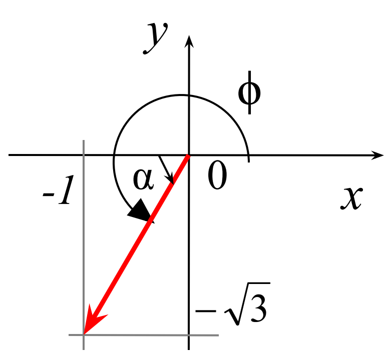
$$\boxed{\arg z_1 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z}$$

$$z_2 = 1$$



$$\boxed{\arg z_2 = 0 + 2\pi k,\ k \in Z}$$

$$z_3 = -1 - \sqrt{3} \cdot i$$



$$\tan\alpha = \frac{\left|-\sqrt{3}\right|}{\left|-1\right|} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{3}$$

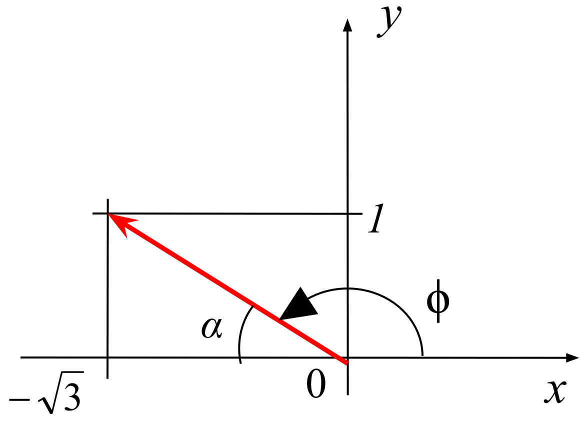
$$\varphi = \pi + \alpha = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$\boxed{\arg z_3 = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z}$$

4.Найти модуль и аргумент комплексного числа:

$$z=\frac{\sqrt{3}-i^{17}}{i^{18}}=\frac{\sqrt{3}-i}{-1}=-\sqrt{3}+i$$

$$|z|=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$$



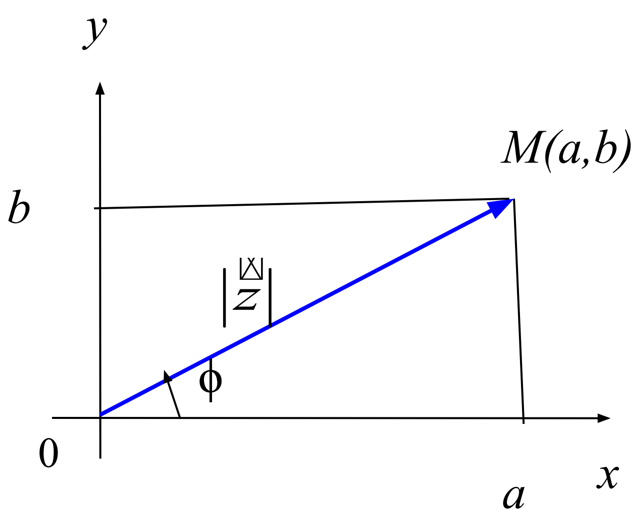
$$\tan\alpha=\frac{|b|}{|a|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\quad\Rightarrow\quad\alpha=\frac{\pi}{6}$$

$$\varphi=\pi-\alpha=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$$

$$\arg z=\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$$

Тригонометрическая форма комплексного числа

$$z = a + bi \qquad r = |\vec{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

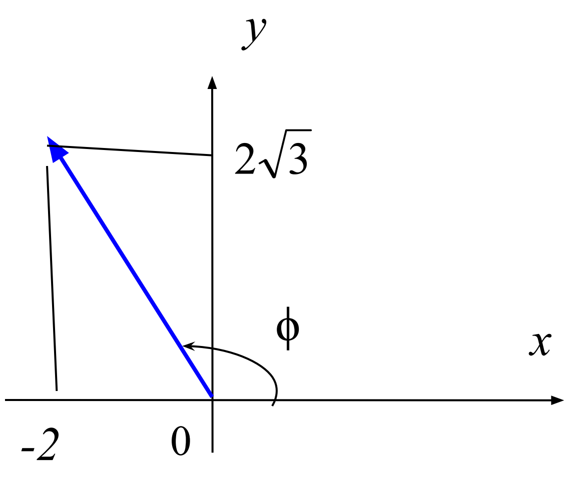


$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{a}{r} \\ \sin\varphi &= \frac{b}{r} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = r\cdot\cos\varphi \\ b = r\cdot\sin\varphi \end{cases}$$

$$\boxed{z = a + bi = r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)}$$

5.Записать число $z = -2 + 2\sqrt{3} \cdot i$ в тригонометрической форме:

$$r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$$



$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{a}{r} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \\ \sin\varphi &= \frac{b}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\boxed{z = -2 + 2\sqrt{3} \cdot i = 4 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{3} \right)}$$

6. Записать число в алгебраической форме:

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \underline{\sqrt{3} - i}$$

7. Записать число в алгебраической форме:

$$z = 2\left(\cos\frac{25\pi}{3} + i\sin\frac{25\pi}{3}\right)$$

$$\frac{25\pi}{3} = \frac{24\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 8\pi + \frac{\pi}{3} = 2\pi\cdot 4 + \frac{\pi}{3}$$

$$z = 2\left(\cos\left(2\pi\cdot 4 + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\pi\cdot 4 + \frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \underline{1 + i\sqrt{3}}$$

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме
Умножение комплексных чисел.

- Пусть $$z_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)$$ $$z_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)$$

$$z_1z_2 = r_1r_2\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right) =$$
$$= r_1r_2\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\cos\varphi_1 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\right) =$$
$$= r_1r_2\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\left(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2\right)\right) =$$
$$= r_1r_2\left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right)$$

$$\boxed{z_1z_2 = r_1r_2\left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right)}$$

8. Найти произведение комплексных чисел:

$$z_1 = \frac{7}{2}\left(\cos 95^0 + i\sin 95^0\right) \quad u \quad z_2 = 2\left(\cos\left(-65^0\right) + i\sin\left(-65^0\right)\right)$$

$$z_1 z_2 = \frac{7}{2}\cdot 2\left(\cos\left(95^0 + \left(-65^0\right)\right) + i\sin\left(95^0 + \left(-65^0\right)\right)\right) =$$

$$= 7\left(\cos\left(95^0 - 65^0\right) + i\sin\left(95^0 - 65^0\right)\right) = 7\left(\cos 30^0 + i\sin 30^0\right) =$$

$$= 7\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \underline{\frac{7\sqrt{3}}{2} + \frac{7}{2}i}$$

Деление комплексных чисел.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2\cos\varphi_1-i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2)^2-(i\sin\varphi_2)^2}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\cos\varphi_1\sin\varphi_2))}{\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))}$$

9. Найти частное комплексных чисел:

$$z_1 = \frac{2}{3}\left(\cos 150^0 + i\sin 150^0\right) \quad и \quad z_2 = 2\left(\cos 90^0 + i\sin 90^0\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\frac{\left(\cos 150^0 + i\sin 150^0\right)}{\left(\cos 90^0 + i\sin 90^0\right)} = \frac{1}{3}\left(\cos\left(150^0 - 90^0\right) + i\sin\left(150^0 - 90^0\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\cos 60^0 + i\sin 60^0\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \underline{\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i}$$

10. Записать в тригонометрической форме комплексное число:

$$z = \frac{\left(\cos\frac{\pi}{3} - i \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right) \cdot \left(\sqrt{3} + i\right)}{i - 1}$$

- Пусть

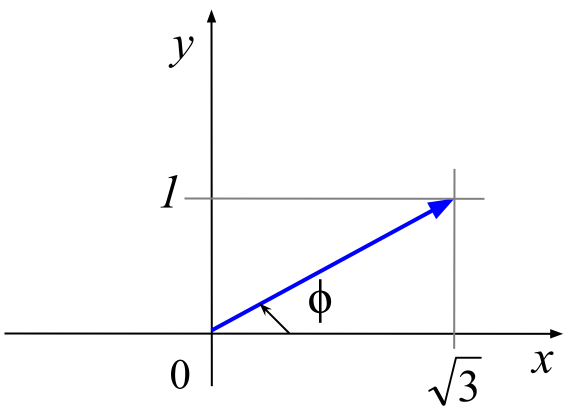
$$z_1 = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} \qquad z_2 = \sqrt{3} + i \qquad z_3 = i - 1 = -1 + i$$

Запишем каждое из чисел в тригонометрической форме.

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = \underline{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$z_2 = \sqrt{3} + i$$

$$r = |z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

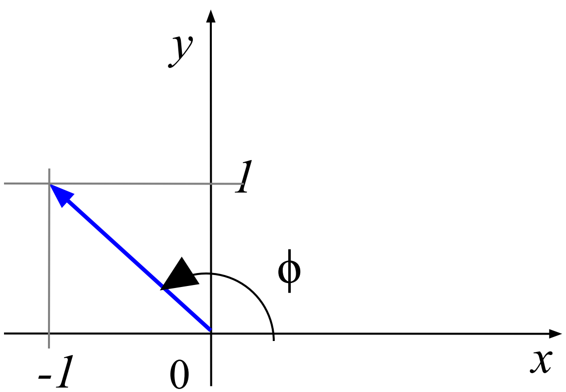


$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi &= \frac{b}{r} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$$

$$z = \sqrt{3} + i = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{\pi}{6} \right)$$

$$z_3 = -1 + i$$

$$r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$



$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{a}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin\varphi &= \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4}$$

$$z = -1 + i = 2 \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{3\pi}{4} \right)$$

$$z=\frac{\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+i\right)}{i-1}=\frac{\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}\right)\right)=\underline{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)\right)}$$

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Возведение в степень.

- Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$\boxed{z^n = r^n(\cos\varphi n + i\sin\varphi n)}$$

- формула Муавра

11. Возвести в четвертую степень комплексное число:

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z^4 = 2^4\left(\cos\frac{\pi}{3}\cdot 4 + i\sin\frac{\pi}{3}\cdot 4\right) = \underline{16\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)}$$

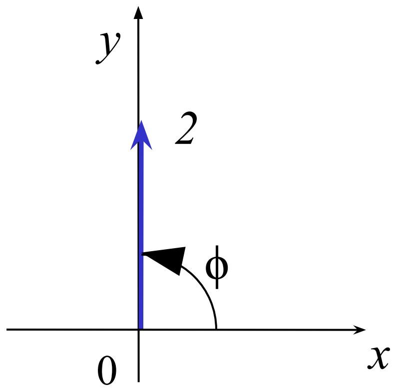
12. Возвести в степень комплексное число и записать результат в алгебраической форме:

$$z = \left(\frac{2 \cdot i}{-\sqrt{2} + i \cdot \sqrt{2}} \right)^{18}$$

Пусть $z_1 = 2i$ $z_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

Запишем каждое из чисел в тригонометрической форме.

$$z_1 = 2i$$

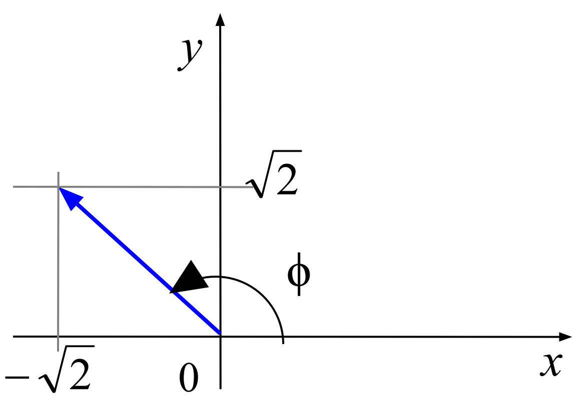


$$r = |z| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$z = 2i = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{\pi}{2} \right)$$

$$z_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$



$$r = |z| = \sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2+2} = 2$$

$$\varphi = \frac{3\pi}{4}$$

$$z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2 \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{3\pi}{4} \right)$$

Разделим одно число на другое в тригонометрической форме:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2i}{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)=$$

$$=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

А теперь возведём в степень: $z=\left(\dfrac{2\cdot i}{-\sqrt{2}+i\cdot\sqrt{2}}\right)^{18}=$

$$=\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{18}=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\cdot 18\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\cdot 18\right)=$$

$$=\cos\left(-\frac{9\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{9\pi}{2}\right)$$

Теперь можно результат записать в алгебраической форме:

$$z=\cos\left(-\frac{9\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{9\pi}{2}\right)=\cos\frac{9\pi}{2}-i\sin\frac{9\pi}{2}=$$

$$\frac{9\pi}{2}=\frac{8\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=4\pi+\frac{\pi}{2}=2\pi\cdot 2+\frac{\pi}{2}$$

$$=\cos\left(2\pi\cdot 2+\frac{\pi}{2}\right)-i\sin\left(2\pi\cdot 2+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}=$$

$$=0-i$$

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Извлечение корня.

- Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Корнем n-ой степени из числа z ($n \in N$, $n \geq 2$) называется такое комплексное число u, для которого справедливо равенство $u^n = z$

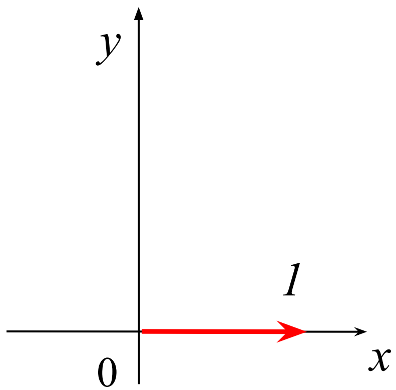
Корень n-ой степени из комплексного числа z ***<u>имеет ровно n значений</u>****, которые находятся по формуле:*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

13. Найти все значения корня: $\sqrt[6]{1}$

Пусть $z = 1$

Запишем данное число в тригонометрической форме:



$$r = |z| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

$$\varphi = 0$$

$$z = 1 = \cos 0 + i \sin 0$$

$$\sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos\frac{0 + 2\pi k}{6} + i\sin\frac{0 + 2\pi k}{6} = \cos\frac{\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi k}{3}$$

$$k = 0,1,2,3,4,5$$

$$k = 0: \quad u_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

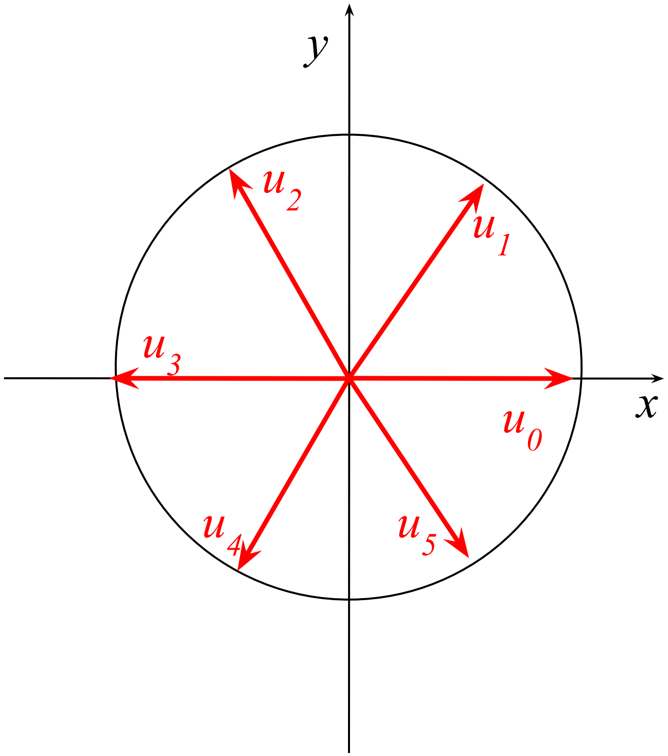
$$k = 1: \quad u_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 2: \quad u_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 3: \quad u_3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

$$k = 4: \quad u_4 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 5: \quad u_5 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



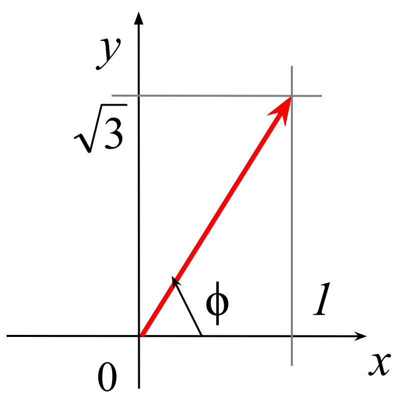
14. Решить уравнение: $z^5 - 1 - i\cdot\sqrt{3} = 0$

$$z^5 = 1 + i\cdot\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt[5]{1 + i\sqrt{3}}$$

Пусть $z = 1 + i\sqrt{3}$

Запишем данное число в тригонометрической форме:

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{3+1} = 2$$



$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{a}{r} = \frac{1}{2} \\ \sin\varphi &= \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$z = 1 + i\sqrt{3} = 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sqrt[5]{1+i\sqrt{3}} = \sqrt[5]{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{5}+i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{5}\right) =$$

$$= \sqrt[5]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{15}+\frac{2\pi k}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{15}+\frac{2\pi k}{5}\right)\right), \quad k=0,1,2,3,4$$

$$z = \sqrt[5]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{15}+\frac{2\pi k}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{15}+\frac{2\pi k}{5}\right)\right), \quad k = 0,1,2,3,4$$

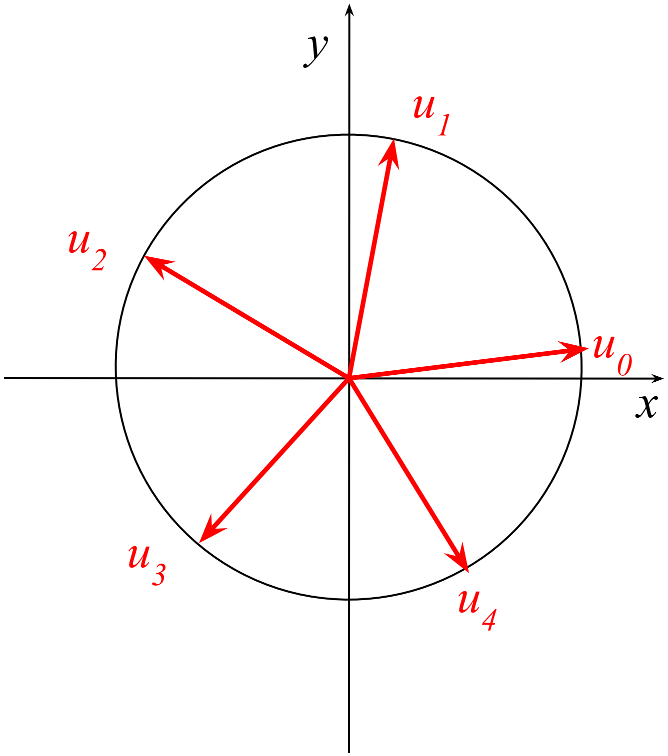
$$k=0: \quad u_0 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}\right)$$

$$k=1: \quad u_1 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{15}+i\sin\frac{7\pi}{15}\right)$$

$$k=2: \quad u_2 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{15}+i\sin\frac{13\pi}{15}\right)$$

$$k=3: \quad u_3 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{15}+i\sin\frac{19\pi}{15}\right)$$

$$k=4: \quad u_4 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{15}+i\sin\frac{25\pi}{15}\right)$$



15. Сделать действия в тригонометрической форме и ответ записать в алгебраической форме:

1) $\left[2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)\right]^3$ Ответ. $0-8i$

2) $\left[3\left(\cos\frac{11\pi}{3}+i\sin\frac{11\pi}{3}\right)\right]^2$ Ответ. $-\frac{9}{2}-\frac{9\sqrt{3}}{2}i$

16. Сделать действия над комплексными числами и ответ записать в тригонометрической форме:

1) $$\frac{\sqrt{2}\left(\cos 40^0 + i\sin 40^0\right)}{3\left(\cos 60^0 + i\sin 60^0\right)}$$

Ответ. $$\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\left(-20^0\right) + i\sin\left(-20^0\right)\right)$$

2) $$2\left(\cos 30^0 + i\sin 30^0\right)\cdot\sqrt{3}\left(\cos 70^0 + i\sin 70^0\right)$$

Ответ. $$2\sqrt{3}\left(\cos 100^0 + i\sin 100^0\right)$$

17. Представить числа в тригонометрической форме:

1) $z=-\frac{1}{5}+\frac{\sqrt{3}}{5}i$ Ответ. $\frac{2}{5}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

2) $z=-\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{6}i$ Ответ. $\frac{1}{3}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

18. Найти $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ в тригонометрической форме для чисел

$$z_1 = -\frac{1}{5} + \frac{\sqrt{3}}{5}i \quad и \quad z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{6}i$$

Ответ. $$z_1 \cdot z_2 = \frac{2}{15}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

Ответ. $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{5}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

19. Найти $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^7$ в тригонометрической форме и результат представить в алгебраической форме, если

$$z_1 = -\frac{1}{5} + \frac{\sqrt{3}}{5}i \quad u \quad z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{6}i$$

Ответ. $$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^7 = \frac{6^7}{5^7}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right) = 0 + \frac{6^7}{5^7}i$$

20. Найти все значения корня: $\sqrt[3]{-2+2\sqrt{3}\,i}$

Ответ.

$$u_0=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right)$$

$$u_1=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}\right)$$

$$u_2=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9}\right)$$