Поля и линейные пространства

Обозначения

Заглавные латинские буквы (A, …)- множества

Прописные латинские буквы (a,b…) – элементы множества

$\cup - \textit{объединение множеств}$

$\cap - \textit{пересечение множеств}$

$\times - \textit{декартово произведение множеств}$

Поле

Определение. Множество К называется полем, если в нем введены две бинарные операции: сложение $+ : K \times K \to K$ и умножение $\cdot : K \times K \to K$ удовлетворяющие аксиомам:

$1.\textit{Коммутативность сложения}$

$$a + b = b + a, \quad \forall a, b \in K$$

$2.\,Ассоциативность\ сложения$

$(a+b)+c = a+(b+c),\ \ \forall a,b,c \in K$

$3.\,Существование\ нуля:$

$\exists\, 0 \in K:\ a+0=a,\ \forall a \in K$

$4.\ Существование\ \ противоположного$

$элемента:$

$\forall a \in K\ \exists b \in K : a+b=0$

$(b := -a)$

5. *Коммутативность умножения* :

$$ab = ba, \ \forall a, b \in K$$

6. *Ассоциативность умножения*

$$(ab)c = a(bc) \quad \forall a, b, c \in K$$

7. *Дистрибутивность* :

$$a(b + c) = ab + ac, \ \forall a, b, c \in K$$

8. *Существование единицы* :

$$\exists 1 \in K, 1 \neq 0 : 1 \cdot a = a, \ \forall a \in K$$

9. *Существование обратного элемента*

$$\forall a \in K, a \neq 0 \ \exists b \in K : \ a \cdot b = 1 \ (b := a^{-1})$$

Простейшие свойства поля

1. Нулевой элемент единственный
2. Противоположный элемент единственный.
3. Единичный элемент единственный.
4. Обратный элемент единственный.

Определение вычитания и деления в поле

Определение.

$$a - b := a + (-b)$$

$$\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$$

Замечание. Такое определение корректно, благодаря единственности противоположного и обратного элемента.

Примеры полей

Множество R – вещественных чисел является полем

Множество Q - рациональных чисел является полем.

Множество F_2 ={0,1} – из двух элементов является полем

Линейное пространство.

Определение. Множество V называется линейным пространством над полем K, если в нем введены две бинарные операции: сложение $+ : V \times V \to V$ и умножение на число из поля: $K \times V \to V$ удовлетворяющие аксиомам:

1.*Коммутативность сложения*

$$\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a},\ \forall\, \overline{a},\overline{b}\in V$$

2. *Ассоциативность сложения* :

$$(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c}),\ \forall\, \overline{a},\overline{b},\overline{c}\in V$$

3.*Существование нуля* :

$$\exists\, \overline{0}\in V : \overline{a}+\overline{0}=\overline{a},\ \forall\, \overline{a}\in V$$

4. *Существование противоположного элемента*: $\forall \overline{a} \in V \ \exists \overline{b} \in V : \overline{a} + \overline{b} = \overline{0}$

5. *Умножение на* 1 *из поля*:

$1 \cdot \overline{a} = \overline{a}, \ \forall \overline{a} \in V$

6. *Дистрибутивность*: $(\alpha + \beta)\overline{a} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{a}$

7. $\alpha(\overline{a} + \overline{b}) = \alpha\overline{a} + \alpha\overline{b}$

8. $\alpha(\beta\overline{a}) = (\alpha\beta)\overline{a}, \ \forall \alpha, \beta \in K, \forall \overline{a}, \overline{b} \in V$

Простейшие следствия из аксиом ЛП

1. Нулевой элемент единственный.
2. Противоположный вектор единственный.

Определение: $\bar{a}-\bar{b}:=\bar{a}+(-\bar{b})$

$$3.\ 0\cdot\bar{a}=\bar{0},\ \forall\bar{a}\in V$$

$$4.\ -\bar{a}=(-1)\bar{a},\ \forall\bar{a}\in V$$

$$5.\ \alpha\cdot\bar{0}=\bar{0},\ \forall\alpha\in K$$

Линейная комбинация векторов

V- ЛП $\overline{a_1}, \overline{a_2} \ldots \overline{a_n} \in V$ *– набор векторов*

$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n \in K$ *– набор чисел*

Определение. Выражение вида

$$\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \ldots \alpha_n \overline{a_n} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{a_i}$$

называется линейной комбинацией векторов

Линейная оболочка векторов

Определение. Пусть $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots \overline{a_n}$ - система векторов. Множество <u>всех</u> линейных комбинаций данной системы векторов называют линейной оболочкой системы векторов: $< \overline{a_1}, \overline{a_2} \ldots \overline{a_n} >$

Выражение вектора через линейную комбинацию

Определение. Если некоторый вектор $\overline{a} \in V$ представлен в виде

$$\overline{a} = \alpha_1 \overline{a}_1 + \alpha_2 \overline{a}_2 + \dots + \alpha_n \overline{a}_n$$

то говорят, что вектор $\overline{a}$ линейно выражается через вектора $\overline{a}_1, \overline{a}_2 \dots \overline{a}_n$

Линейная зависимость

Определение. Система векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ называется линейно зависимой, если существует <u>ненулевой</u> набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ таких, что

$$\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \ldots + \lambda_n \overline{a_n} = \overline{0}$$

Линейная независимость

Определение. Система векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ называется линейно независимой, если

$$\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \ldots + \lambda_n \overline{a_n} = \overline{0}$$

тогда и только тогда, когда все числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ равны нулю.

Алгебраические свойства систем линейных векторов.

1. Если система векторов содержит нулевой вектор, то она линейно зависима.
2. Если часть системы векторов (подсистема) линейно зависима, то и вся система векторов тоже линейно зависима.
3. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда существует вектор, линейно выражающийся через остальные вектора

Геометрические свойства систем векторов.

1. Система состоящая из одного вектора линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.
2. Система состоящая из двух векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда вектора коллинеарны.
3. Система состоящая из трех векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда три вектора компланарны.

Базис линейного пространства

V – ЛП

Определение. Система векторов $\overline{e_1}, \overline{e_2} \ldots \overline{e_n}$,

$\overline{e_i} \in V$ называется базисом ЛП V,

если эта система ЛНЗ и любой вектор из V линейно выражается через $\overline{e_1}, \overline{e_2} \ldots \overline{e_n}$

Замечание. В ЛП V базис определяется не единственным образом (можно выбрать несколько базисов), но количество базисных векторов n остается неизменной величиной.

Размерность линейного пространства

Определение. Количество векторов в базисе называется размерностью линейного пространства V.

Обозначение. $\dim V = n$.

Координаты вектора в базисе

Из определения базиса ЛП V следует, что любой вектор в этом ЛП линейно выражается через базисные векторы :

$$\bar{x} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n$$

Определение. Координатами вектора x называются коэффициенты в разложении по базисным векторам:

$$\bar{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

Координаты вектора в базисе

Замечание. Координаты вектора x зависят от выбора базиса. В разных базисах у одного и того же вектора x разные координаты.

Подпространства линейного пространства

Подпространства и подмножества

Определение. Подмножество W линейного пространства V называется линейным подпространством, если оно является линейным пространством относительно операций из V.

Обозначение: $W \subset V$

Утверждение. $\forall W, \bar{0} \in W$ (ноль принадлежит любому подпространству)

Утверждение. Для любого линейного пространства V подмножества {0} и V являются подпространствами.

Примеры подпространств.

$$V = R^2$$

$$W_1 = \{y = 3x\}$$

$$W_2 = \{y = 3x + 1\}$$

Равносильное определение.

Утверждение. Множество W является линейным подпространством V тогда и только тогда, когда оно замкнуто относительно операций сложения и умножения на число:

$$\overline{x} + \overline{y} \in W, \ \forall \overline{x}, \overline{y} \in W$$

$$\alpha \overline{x} \in W, \forall \overline{x} \in W, \forall \alpha \in K$$

Подпространства матриц

Пусть

$$V = Mat(n \times n, R)$$

$$W_1 = \{A \in V : A^t = A \ \ (a_{ij} = a_{ji})\}$$

$$W_2 = \{A \in V : A^t = -A(a_{ij} = -a_{ji})\}$$

W_1 – симметрические матрицы

W_2 – кососимметрические матрицы

Подпространства C[a,b]

Пусть V=C[a,b] – пространство непрерывных функций на отрезке [a,b]

$$W_1 = C^1[a,b]$$

$$W_2 = C^2[a,b]$$

$$\vdots$$

$$W_\infty = C^\infty[a,b]$$

$$W_\infty \subset \ldots W_2 \subset W_1 \subset V$$

Пересечение и объединение подпространств

Пусть V – ЛП, W_1, W_2 – подпространства V

Определение.

$$W_1 \cap W_2 = \{x : x \in W_1 \; и \; x \in W_2\}$$

Утверждение. Пересечение подпространств является подпространством.

Замечание. Объединение подпространств

$$W_1 \cup W_2 = \{x : x \in W_1 \; или \; x \in W_2\}$$

не является подпространством.

Сумма подпространств

Определение.

$$W_1 + W_2 = \{x = w_1 + w_2, w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

Утверждение. Сумма двух подпространств является подпространством.

Замечание. Разложение произвольного вектора из W_1+W_2 по W_1 и W_2 возможно не единственным образом.

Пример суммы подпространств

Пример. $W_1 = XOY$

$W_2 = YOZ$

$W_1 + W_2 = R^3$

Поскольку для любого вектора возможно разложение:

$$\bar{x} = (\alpha \bar{i} + \beta \bar{j}) + (\delta \bar{j} + \mu \bar{k})$$

Прямая сумма подпространств

Определение. Пространство V называется прямой суммой подпространств W_1 и W_2, если $V=W_1+W_2$ и любой вектор x представим в виде $x=w_1+w_2$ единственным образом.

Обозначение. $V = W_1 \oplus W_2$

Пример. $R^2 = OX \oplus OY$

Поскольку разложение $\bar{x} = \alpha\,\bar{i} + \beta\,\bar{j}$ единственнно

Теорема о размерности

Теорема. Пусть V=W1+W2. Тогда

$$\dim V = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2$$

Доказательство.

Пусть $e_1, e_2 \dots . e_k$ - базис $W_1 \cap W_2$.

$\dim(W_1 \cap W_2) = k$

$e_1, e_2 \dots . e_k, a_1, a_2 \dots . a_\ell$ - базис W1, $\dim W1 = k+\ell$

$e_1, e_2 \dots . e_k, b_1, b_2 \dots . b_m$ - базис W_2, $\dim W_2 = k+m$

Для доказательства теоремы достаточно проверить, что $e_1, e_2 \dots . e_k, a_1, a_2 \dots . a_\ell$ $b_1, b_2 \dots . b_m$ - базис V

Доказательство

1. Проверим, что e_1, $e_2 \dots . e_k$, a_1, $a_2 \dots$ a_ℓ b_1, $b_2 \dots$ b_m ЛНЗ система векторов

$$\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots \alpha_k \bar{e}_k + \beta_1 \bar{a}_1 + \dots \beta_\ell \bar{a}_\ell + \gamma_1 \bar{b}_1 + \dots \gamma_m \bar{b}_m = \bar{0}$$

$$\alpha_1 e_1 + \dots \alpha_k e_k + \beta_1 a_1 + \dots \beta_\ell a_\ell = -\gamma_1 b_1 - \dots \gamma_m b_m$$

Левая часть последнего равенства принадлежит W1, правая часть принадлежит W2, следовательно и левая и правая части принадлежат W1⋂W2, это значит, что правую часть можно выразить через базис пересечения.

Доказательство

$$-\gamma_1 b_1 - \ldots - \gamma_m b_m = \lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_k e_k$$

Следовательно,

$$\lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_k e_k + \gamma_1 b_1 + \ldots \gamma_m b_m = \overline{0}$$

Следовательно,

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_m = 0 \qquad (*)$$

(*Поскольку вектора* $e_1, \ldots e_k, b_1, \ldots b_m$ *ЛНЗ как базис* W_2)

Доказательство

Следовательно,

$$\alpha_1 e_1 + \dots \alpha_k e_k + \beta_1 a_1 + \dots \beta_{\square} a_{\square} = \overline{0}$$

Следовательно,

$$\alpha_1 = \dots \alpha_k = \beta_1 = \dots \beta_{\square} = 0 \qquad (**)$$

(*Поскольку* $e_1, \dots e_k, a_1, \dots a_{\square}$ *ЛНЗ как базис* W_1)

Из (*) *и* (**) *следует, что*

$e_1, \dots e_k, a_1, \dots a_{\square}, b_1, \dots b_m$ *ЛНЗ*

Доказательство

2. Проверим, что любой вектор из ЛП V линейно выражается через систему e1,…ek, a1,…aℓ, b1…bm.

$$V = W_1 + W_2 \Rightarrow$$

$$x = (\alpha_1' e_1 + \ldots \alpha_k' e_k + \beta_1' a_1 + \ldots \beta_\ell' a_\ell) +$$

$$+ (\alpha_1'' e_1 + \ldots \alpha_k'' e_k + \gamma_1'' b_1 + \ldots \gamma_m'' b_m)$$

$\square$

Теоремы о прямой сумме

Теорема 1. Пусть V=W1+W2. Тогда $V = W_1 \oplus W_2$

Тогда и только тогда, когда ноль раскладывается единственным образом:

$$\bar{0} = \bar{0} \oplus \bar{0}$$

.

Теорема 2.

$$V = W_1 \oplus W_2 \Leftrightarrow W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

Изменение координат вектора при замене базиса

Матрица перехода

V – линейное пространство

$e_1, e_2, e_3 \ldots . e_n$ – первый базис (1)

$e'_1, e'_2, e'_3, \ldots e'_n$ – второй базис (2)

(количество векторов n=dimV, но сами вектора разные)

Выразим вектора второго базиса через вектора первого базиса:

$$\begin{cases} e_1' = t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \dots + t_{n1}e_n \\ e_2' = t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \dots + t_{n2}e_n \\ \dots \\ e_n' = t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \dots + t_{nn}e_n \end{cases} \qquad (3)$$

выражение векторов второго базиса через вектора первого базиса

$$T_{1\to 2} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix} \quad (4) -$$

матрица перехода от первого базиса ко второму

Формулу (3) можно переписать

в матричной форме:

$$\left(e_1', e_2', \ldots e_n'\right) = \left(e_1, e_2, \ldots e_n\right) T_{1\to 2} \quad (5)$$

или

$$e' = e T_{1\to 2}$$

Изменение координат вектора

$$x \in V \Rightarrow x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots x_n e_n$$

$$или\ в\ матричном\ виде: x = \left(e_1, e_2 \ldots e_n\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$в\ другом\ базисе: x = x_1' e_1' + x_2' e_2' + \ldots x_n' e_n'$$

$$или\ в\ матричном\ виде: x = \left(e_1', e_2', \ldots e_n'\right) \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

Используя формулу (5) *получаем* :

$$\left(e_1, e_2 \ldots e_n\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(e_1, e_2 \ldots e_n\right) T_{1\to 2}\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T_{1\to 2}\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Из формулы (6) *следует*:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = (T_{1\to 2})^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T_{2\to 1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Изоморфизм линейных пространств

Определение изоморфизма

$V1$, $V2$ – два ЛП

Определение. Пространство $V1$ изоморфно $V2$, если существует взаимно-однозначное соответствие f: $V1 \to V2$ такое, что $f(x1+x2)=f(x1)+f(x2)$ и $f(\alpha x1)=\alpha f(x1)$ для любых $x1$, $x2$ принадлежащих $V1$, α принадлежащих K.

Обозначение. $V_1 \cong V_2$

Свойства изоморфизма

1. Рефлективность $V \cong V$
2. Симметричность $V_1 \cong V_2 \Rightarrow V_2 \cong V_1$
3. Транзитивность

$$V_1 \cong V_2, V_2 \cong V_3 \Rightarrow V_1 \cong V_3$$

Утверждение. Если V1 изоморфно V2, то f(0v1)=0v2 (при изоморфизме ноль переходит в ноль)

Доказательство.

$$f(\overline{0}_{V_1}) = f(0\cdot\overline{x}) = 0\cdot f(\overline{x}) = \overline{0}_{V_2}$$

Теорема. V изоморфно W тогда и только тогда, когда dimV=dimW.

Доказательство.

1. *Пусть* $V \cong W$, $\bar{e}_1, \ldots \bar{e}_n$ *– базис* V. *Покажем, что*

$f(e_1), f(e_2) \ldots f(e_n)$ *– базис* W.

Составим ЛК:

$$\lambda_1 f(\bar{e}_1) + \lambda_2 f(\bar{e}_2) + \ldots \lambda_n f(\bar{e}_n) = 0_W$$

Подействуем обратной биекцией:

$$f^{-1}(\lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \ldots \lambda_n f(e_n)) = f^{-1}(O_W)$$

$$\lambda_1\bar{e}_1+\lambda_2\bar{e}_2+\dots+\lambda_n\bar{e}_n=\bar{0}_V \Leftrightarrow \lambda_1=0,\dots\ \lambda_n=0$$

$$\Rightarrow f(\bar{e}_1), f(\bar{e}_2),\dots\ f(\bar{e}_n)-\text{ЛНЗ.}$$

Теперь проверим, что $\forall w\in W$

можно выразить через $f(\bar{e}_1),\ f(\bar{e}_2),\dots\ f(\bar{e}_n)$

$$f^{-1}(\bar{w})=\bar{v}=\beta_1\bar{e}_1+\dots\ \beta_n\bar{e}_n$$

Тогда $\bar{w}=f(f^{-1}(\bar{w}))=f(\beta_1\bar{e}_1+\dots\ \beta_n\bar{e}_n)=$

$$=\beta_1 f(\bar{e}_1)+\dots\ \beta_n f(\bar{e}_n)$$

Следовательно, $f(e_1),\dots\ f(e_n)$ – *базис* W,

$$\dim W=n$$

2. *Обратно, пусть* $\dim V = \dim W = n$.

Пусть $e_1, \ldots e_n$ *– базис* V, $e_1^{'}, \ldots e_n^{'}$ *– базис* W.

Тогда отобржение $f(e_1) = e_1^{'} \ldots f(e_n) = e_n^{'}$

устанавливает изоморфизм между V *и* W

(*самостоятельно проверить свойства*).

ЧТД

Утверждение. Любое линейное пространство размерности n изоморфно n-мерному координатному пространству R^n.

Доказательство.

Всякий вектор $v=\alpha_1 e_1+\ldots\alpha_n e_n$ принадлежащий ЛП V изоморфен вектору с координатами $(\alpha_1,\ldots.\alpha_n)$

(Выполнение свойств изоморфизма проверить самостоятельно)

Спасибо за   внимание!