Выпуклость графика функции. Точки перегиба

Производная второго порядка

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$. Ее производная $f'(x)$ является функцией от x на этом интервале.

$f'(x)$ – первая производная или производная первого порядка функции $f(x)$.

Если функция $f'(x)$ имеет производную (дифференцируема) на интервале $(a;b)$, то эту производную называют второй производной или производной второго порядка и обозначают

$$f''(x) = (f'(x))'$$

Пример

Если $f(x) = X^4 - 3X^2$

$f'(x) = 4X^3 - 6X$

$f''(x) = 12X^2 - 6$

Если $f(x) = \sin 2x$

$f'(x) = -2\cos 2x$

$f''(x) = -4\sin 2x$

Свойства функции, которые устанавливаются с помощью второй производной

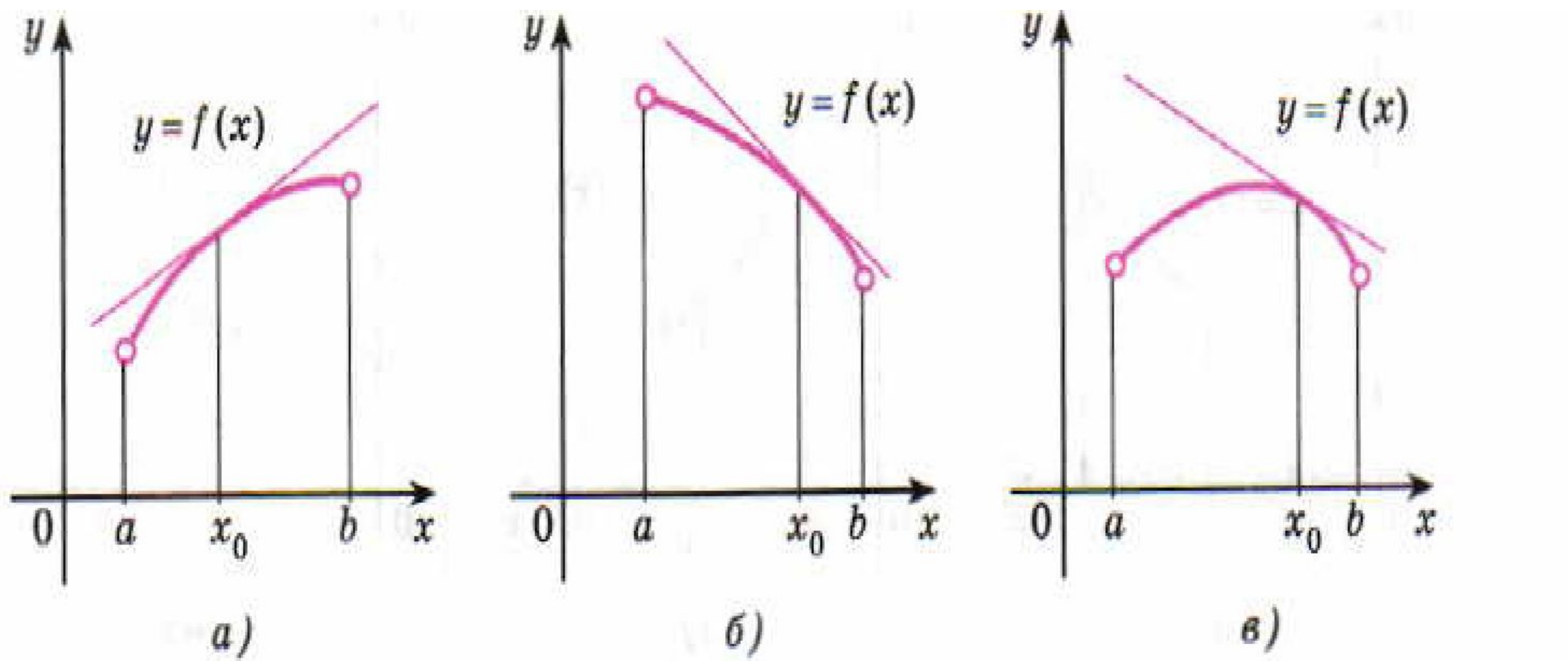


Рис. 143

На рисунке а изображен график возрастающей функции, на рисунке б убывающей, на рисунке в функция не является монотонной (сначала возрастает, затем убывает).

Все кривые обладают общим свойством – с возрастанием x от a до b угловой коэффициент касательной к каждой из данных кривых уменьшается, т.е. производная каждой из соответствующих функций убывает на интервале (a;b)

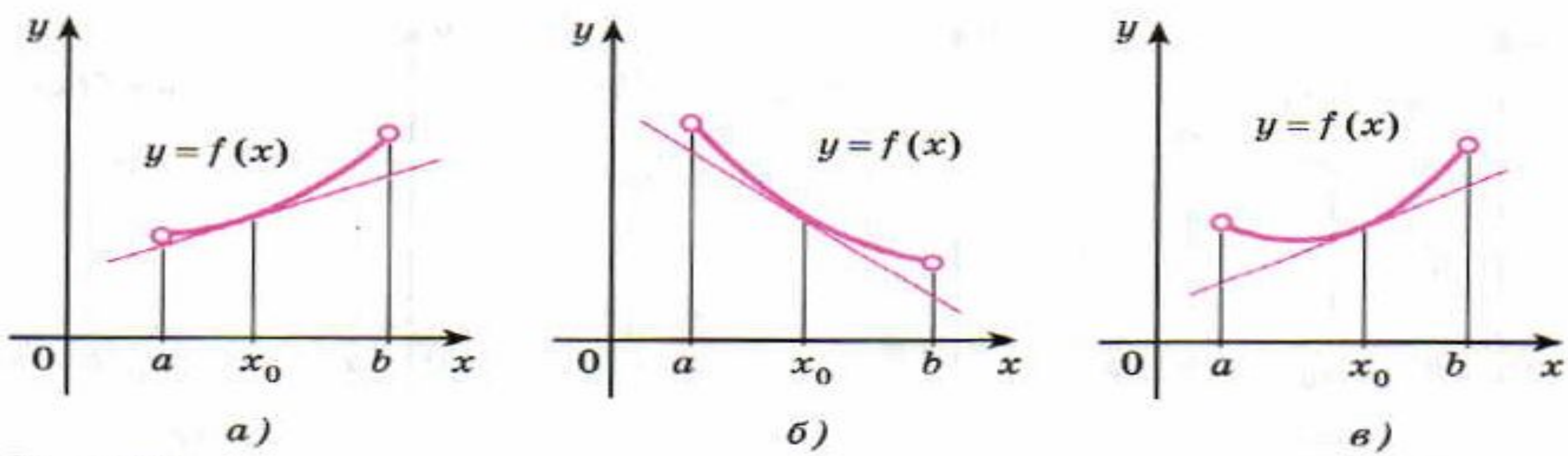
Из рисунков видно, что для любой точки x0 интервала (a;b) график функции y= f(x) при всех x є (a;b) и x ≠ x0 лежит ниже касательной к этому графику в точке (x0; f(x0))

Поэтому функции называются выпуклыми вверх.

Таким образом, функция y=f (x), дифференцируемая на интервале (a;b) называется выпуклой вверх на этом интервале, если ее производная f’(x) убывает на интервале (a;b)

Аналогично, функция f(x) называется выпуклой вниз на интервале (a,b), если f’(x) возрастает на этом интервале.

Для любой точки x0 интервала (a;b) график функции y= f(x) при всех x є (a;b) и x ≠ x0 лежит выше касательной к этому графику в



Интервалы, на которых функция выпукла вверх или вниз, называют интервалами выпуклости этой функции.

Если функция $f(x)$ имеет вторую производную на интервале $(a;b)$.

Если $f''(x) > 0$ на интервале $(a;b)$, то функция выпукла вниз на интервале

Если $f''(x) < 0$ на интервале $(a;b)$, то функция выпукла вверх на интервале

Пример

Найти интервалы выпуклости вверх и вниз функции $f(x)$, если:

1) $f(x) = x^3$; 2) $f(x) = \sin x$, $-\pi < x < \pi$.

1) Если $f(x) = x^3$, то $f''(x) = 6x$. Так как $f''(x) < 0$ при $x < 0$ и $f''(x) > 0$ при $x > 0$, то на промежутке $(-\infty; 0)$ функция x^3 выпукла вверх, а на промежутке $(0; +\infty)$ выпукла вниз (рис. 146).

2) Если $f(x) = \sin x$, то $f''(x) = -\sin x$. Пусть $-\pi < x < 0$, тогда $\sin x < 0$ и $f''(x) > 0$. Следовательно, функция $\sin x$ (рис. 147) выпукла вниз на интервале $(-\pi; 0)$. Аналогично функция $\sin x$ выпукла вверх на интервале $(0; \pi)$, так как $-\sin x < 0$ при $0 < x < \pi$. ◁

В задаче 1 были рассмотрены функции $f(x) = x^3$ и $f(x) = \sin x$, для которых точка $x = 0$ является одновременно концом интервала выпуклости вверх и концом интервала выпуклости вниз.

Точка x_0 дифференцируемой функции $f(x)$ называется *точкой перегиба* этой функции, если x_0 является одновременно концом интервала выпуклости вверх и концом интервала выпуклости вниз для $f(x)$.

Иными словами, *в точке перегиба x_0 дифференцируемая функция меняет направление выпуклости.*

Отметим, что при переходе через точку перегиба x_0 функции $f(x)$ график этой функции переходит с одной стороны касательной к этому графику в точке x_0 на другую сторону.

С помощью второй производной можно находить точки перегиба.

Пусть функция $f(x)$ имеет на интервале $(a; b)$ вторую производную. Тогда если $f''(x)$ меняет знак при переходе через x_0, где $x_0 \in (a; b)$, то x_0 — точка перегиба функции $f(x)$.

Найти точки перегиба функции:
1) $f(x) = xe^{-x}$; 2) $f(x) = x^4 - 2x^3$.

Найдём первую и вторую производные функции.
1) $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x)$,
$f''(x) = -e^{-x}(1 - x) - e^{-x} = e^{-x}(x - 2)$.
Так как $f''(x) < 0$ при $x < 2$ и $f''(x) > 0$ при $x > 2$, то $x = 2$ — точка перегиба функции xe^{-x}. Других точек перегиба нет.
2) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$, $f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1)$.
Функция $f''(x)$ меняет знак при переходе через точки 0 и 1 (и только в этих точках). Следовательно, $x = 0$ и $x = 1$ — точки перегиба функции $f(x) = x^4 - 2x^3$. ◁